A COMPLEXIDADE DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO E A QUALIDADE DAS APRENDIZAGENS: A BIFURCAÇÃO PROCEPTUAL[1]

Fernando Luís Santos e António Domingos

ESE Jean Piaget de Almada, Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNL, UIED

fsantos@almada.ipiaget.org, amdd@fct.unl.pt

RESUMO

Este artigo apresenta a análise a um episódio que faz parte do estudo mais alargado sobre um modelo avaliação da complexidade do raciocínio matemático de alunos na formação inicial de professores de ensino básico. O enfoque centra-se na forma como os alunos operacionalizam os conceitos matemáticos e por inerência o raciocínio geométrico, melhorando assim a qualidade de sua aprendizagem matemática. O objetivo deste artigo é o de expor a conceptualização sobre a diferença entre aqueles que relacionam e comprimem processos matemáticos e os que se mantém numa aprendizagem rotineira baseada em procedimentos, diferença esta denominada de *bifurcação proceptual.* É usado um modelo de análise baseado em duas dimensões: (i) avaliativa/classificativa utilizando os níveis SOLO; (ii) interpretativa utilizando as teorias de David Tall sobre o pensamento matemático avançado e o pensamento *proceptual*. Para tal foram analisadas 41 respostas a uma questão aberta de geometria classificando-as nos níveis SOLO. Após análise dos raciocínios evidenciados identificaram-se 3 dos 5 níveis SOLO existindo evidências da *bifurcação proceptual* e de vários tipos de raciocínio matemático envolvidos nestes níveis.

Palavras chave: *Bifurcação proceptual*, currículo, formação inicial de professores, raciocínio geométrico, níveis SOLO.

INTRODUÇÃO

O texto apresenta um episódio exploratório de um estudo mais vasto sobre um modelo de formação centrado na complexidade do raciocínio matemático e a qualidade das aprendizagens no contexto da formação inicial de professores de ensino básico. Neste modelo argumenta-se que o currículo deve oferecer uma matriz matemática suficientemente forte e flexível para que se possa manipular e criar as condições para que os alunos aprendam matemática com qualidade.

Centrado na complexidade do pensamento matemático (Tall, 2002) o objetivo deste artigo é o aumentar a coerência sobre a conceptualização da diferença entre os alunos que relacionam e comprimem processos matemáticos e os que se mantém numa aprendizagem rotineira baseada em procedimentos, diferença denominada de *bifurcação proceptual.* Para tal será utilizando um modelo de análise baseado numa dimensão avaliativa/classificativa recorrendo aos níveis SOLO e noutra interpretativa utilizando as teorias de David Tall (2002) sobre o pensamento *proceptual*.

O modelo foi desenvolvido tendo em conta o argumento que o currículo de matemática na formação inicial de professores (licenciatura em Educação Básica) necessita de fomentar uma compreensão dos conceitos matemáticos ajudando os alunos a adquirir um reconhecimento das conexões entre diferentes campos da matemática e suas ligações com outras áreas, tendo em conta que o objetivo central é o de formar professores generalistas, a maioria futuros educadores de infância e professores de 1.º ciclo do ensino básico em regime de monodocência.

Os alunos que optam pela transformação de situações rotineiras e algorítmicas em estruturas mais simples comprimindo-as em conceitos conseguem relacioná-las numa

1 Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto *Promover o Sucesso em Matemática* (contrato PTDC/CPE-CED/121774/2010).

aprendizagem conceptual, e no caso específico deste texto, com um raciocínio geométrico promovendo assim a criação de novo conhecimento no sentido em que Gray e Tall (1994) denominaram de *bifurcação proceptual (proceptual divide)*.

Esta visão segue as ideias de Tall (2007), no desenvolvimento da sua teoria de conhecimento matemático centrada na mudança entre o processo e o conceito, denominado de *proceito*, visto como uma junção de três componentes (um processo, um objeto matemático e um símbolo).

A implementação deste modelo de formação fomenta o estudo, caracterização e avaliação em várias dimensões pela análise das respostas dos alunos às várias tarefas realizadas, utilizando o modelo SOLO (*Structure of Observed Learning Outcomes*) de Biggs e Collis (1982) e Biggs e Tang (2007) para categorizar essas respostas. Associando a evolução dos alunos e seu raciocínio matemático às teorias de Tall (2002, 2007) sobre o Pensamento Matemático Avançado nomeadamente aos conceitos de *proceito*, *pensamento proceptual* e *bifurcação proceptual* (Gray & Tall, 1994) como enquadramento teórico, procuramos perceber a forma como estes operacionalizam os conceitos matemáticos e desenvolvem o seu raciocínio.

O campo da avaliação tem sido uma área fértil devido ao reconhecimento da necessidade de encontrar formas mais eficazes de avaliar a qualidade das aprendizagens matemáticas e a complexidade do pensamento matemático. Para Biggs (segundo Pegg, 2003) o processo avaliativo só tem a ganhar se as classificações se tornarem informativas baseadas numa hierarquia que descreva a evolução da aprendizagem.

Ao pretender-se analisar a qualidade das aprendizagens nos alunos, há necessidade de descrever claramente os diferentes raciocínios, com descrições focalizadas em tópicos como a capacidade de interpretar, analisar, organizar e aplicar o conhecimento matemático não se centrando somente na memorização e sua reprodução.

ENSINANDO GEOMETRIA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES

Os tópicos relacionados com a preparação de futuros professores tem sido investigados mais em termos pedagógicos e didáticos do que na dimensão da importância do desenvolvimento do conhecimento científico e conceptual destes profissionais. Estudos sobre este tópico têm mostrado sinais de preocupação devido a este tipo de conhecimento matemático não estar presente em muitos professores (Veloso, 2004), relacionando desta forma a qualidade das suas aprendizagens por intermédio da interpretação dos raciocínios desenvolvidos.

Para Tall (1989) o desenvolvimento do currículo deve oferecer aos alunos contextos onde estes desenvolvam o seu conhecimento matemático, conduzindo a um crescimento significativo do seu raciocínio. Este processo difícil de transição de uma matemática menos formal para uma compreensão mais formalizada dos processos matemáticos e conceitos, necessita de ser avaliada, quer em termos da complexidade do raciocínio evidenciado quer em termos da qualidade das aprendizagens realizadas.

Aprender matemática significa participar em diferentes tipos de práticas matemáticas. Uma forma de explicar as variações entre cada prática pode ser vista através das definições de Tall (2002) sobre o pensamento matemático avançado (PMA) e o pensamento matemático elementar (PME) partindo do problema identificado por Dreyfus (Tall, 2002) como o ciclo de *generalização → síntese → abstração* considerado como fundamental no desenvolvimento de conceitos matemáticos. Estes dois processos (generalização e síntese) juntamente com a representação formam os pré-requisitos necessários para o aluno desenvolver a capacidade de conscientemente fazer abstrações de situações, alcançando um nível mais complexo do pensamento matemático.

A QUALIDADE DA APRENDIZAGEM.

Consideramos neste estudo a qualidade da aprendizagem não apenas como a classificação quantitativa que um aluno alcança quando responde a uma questão, mas também o processo qualitativo de produção da resposta (raciocínio) utilizando factos, conceitos e capacidades para produzir essa resposta.

Obviamente este é um processo complexo devido à qualidade da aprendizagem não depender exclusivamente do aluno, mas também de outras dimensões como a qualidade do ensino, o conhecimento prévio dos tópicos abordados, a motivação, a autorregulação da aprendizagem, entre outras.

Para Biggs & Collis (1982) existem duas formas de avaliar: (i) comparando as classificações do aluno com outros que tiveram as mesmas experiências educativas e (ii) comparando as respostas do aluno com um conjunto de critérios pré-definidos transformando esta avaliação num modelo mais formativo. Neste estudo adotou-se o modelo SOLO para identificar o raciocínio numa abordagem mais próxima desta segunda forma.

O MODELO SOLO.

A ênfase na análise da qualidade das respostas dos alunos torna o modelo SOLO interessante para este estudo. No desenvolvimento dos problemas o foco não está no grau de correção das respostas, mas na estrutura (natureza) das respostas, codificadas em categorias baseadas nos níveis SOLO permitindo uma descrição mais detalhada do desenvolvimento do raciocínio evidenciado pelos alunos e na qualidade das suas aprendizagens.

Tabela 1. *Descrição dos níveis no modelo SOLO relacionando-os com os indicadores de resposta adaptado de Biggs e Collis (1982) e de Ceia (2002)*

	Raciocínio	Indicadores
Abstrato	Vai para além do tópico, efetua conexões a outros conceitos e generaliza.	Teoria, generalização, testa hipóteses e usa reflexão. Evidencia capacidade máxima, utiliza dados relevantes e sua interrelações. Não sente necessidade de responder de forma fechada possibilitando alternativas.
Relacional	Efetua conexões complexas e sintetiza partes do significado global.	Compara, explica as causas, integra, analiza, relata e aplica. Evidencia alta capacidade, utiliza dados relavantes e interrelações. Não existem inconsistências dentro do tópico, mas responde de forma fechada.
Multi-estrutural	Efetua algumas conexões mas falta visão unificadora.	Enumera, classifica, descreve, lista, agrupa e trabalha com algoritmos. Evidencia capacidade média, consegue isolar os dados relevantes. Consegue obter conclusões diferentes com os mesmos dados.
Uni-estrutural	Efetua conexões simples sem identificar a sua importância.	Identifica, memoriza e efetua procedimentos simples. Evidencia baixa capacidade, aponta somente um dado relevante. Tira conclusões precipitadas baseadas num único aspeto.

Pré-estrutural	Disponibiliza informação solta e desorganizada, não relaciona.	Não relaciona os dados. Evidencia capacidade mínima, dá respostas confusas. Respostas inconsistentes.

Este modelo SOLO é utilizado como uma ferramenta que permite um enquadramento sustentado na complexidade do pensamento matemático, tendo em vista a qualidade da aprendizagem e permite evitar a ênfase num único tipo de resposta ou raciocínio.

A *BIFURCAÇÃO PROCEPTUAL.*

A abordagem processual da aprendizagem da matemática está sustentada em enquadramentos positivistas onde, por intermédio de um conjunto de procedimentos predefinidos (algoritmos, por exemplo) se obtém uma resposta. Está assente na ideia de que, ao fazer um número suficiente de exercícios similares o aluno obtém as rotinas necessárias para aprender matemática.

Apesar do seu sucesso no curto prazo ser óbvio, e numerosas políticas educativas as adotarem pois garantem resultados estatísticos interessantes (visto a curto prazo) como no caso dos alunos que se preparam para um exame repetindo até à exaustão os enunciados anteriores. No longo prazo podem ser vistas lacunas nessa abordagem, quando esse mesmo aluno necessita de relacionar os conteúdos aprendidos em anos anteriores, não existindo assim uma aprendizagem que suporte a compreensão dos conceitos estudados.

Gray e Tall (1994) utilizam o conceito de capsular um processo num objeto mental, enraizado nos trabalhos de Piaget para sustentar ciclos de construção de estruturas mentais que na teoria de Piaget são os ciclos de assimilação e acomodação, ou de reificação na teoria de Sfard (1994). A utilização de símbolos, contudo, tem um duplo significado, introduzindo alguma ambiguidade entre o procedimento e o conceito. A forma como os alunos lidam com esta ambiguidade e os raciocínios que desenvolvem parece ser a raiz da qualidade das aprendizagens em matemática.

> Caracterizamos o pensamento proceptual como a capacidade de manipular o simbolismo de forma flexível como processo ou conceito, trocando livremente simbolismos diferentes para o mesmo objeto. É o pensamento proceptual que dá grande poder através da utilização flexível e ambígua desse simbolismo que representa a dualidade do processo e conceito utilizando a mesma notação. (Gray & Tall, 1994, p.6)

A esta combinação de raciocínio processual e conceptual denomina-se de *pensamento proceptual*. Quando se evidencia uma inabilidade para relacionar este dois tipos de pensamento torna-se difícil desenvolver um conhecimento conceptual. Esta dicotomia entre aqueles que conseguem e os que não conseguem ultrapassar a barreira do raciocínio processual é definida pela *bifurcação proceptual,* sendo esta, para Gray e Tall (1994), uma das maiores barreiras e um dos fatores que mais tem contribuído para falhas no ensino e na aprendizagem da matemática.

Conjetura-se assim que a utilização de questões abertas, em geometria, proporciona uma visão das bifurcações existentes entre a aplicação de um raciocínio mais ou menos flexível pela utilização dos *proceitos* e aqueles que se centram nos procedimentos. A figura 1 representa de forma genérica essa bifurcação baseada num esquema apresentado por Gray (1993) na área da aritmética, sendo adaptada para uma forma genérica.

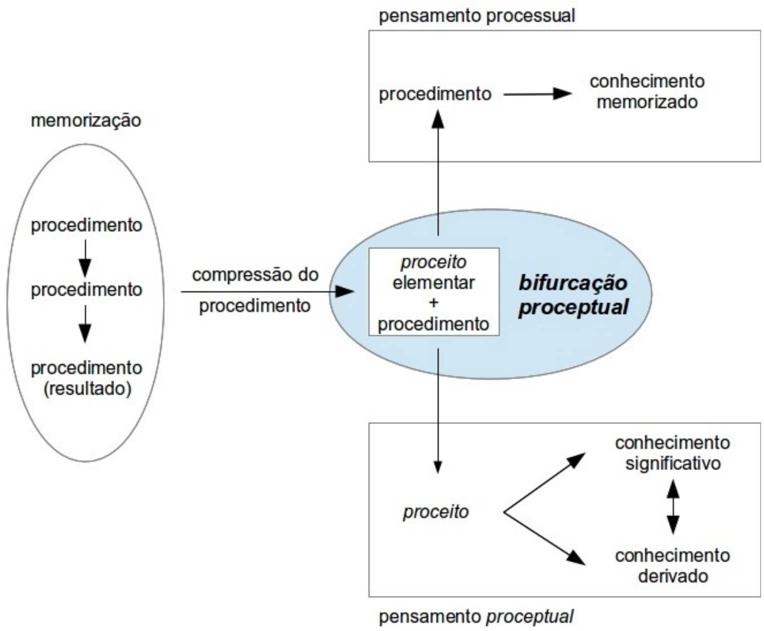


Figura 1. Identificação da *bifurcação proceptual* relacionando a aprendizagem de um objeto matemático com o pensamento processual e o pensamento *proceptual* baseado em Gray (1993).

No processo de aprendizagem de um conceito e/ou objeto matemático um aluno que simplesmente repete procedimentos, mesmo que exista compressão do processo (que pode ser um algoritmo, uma fórmula, entre outros) pode não conseguir efetuar uma relação entre os dados de entrada e os resultados obtidos. Este procedimento pode ser lembrado por intermédio da experiência como um processo memorizado, relembrado quando necessário, combinando vários *proceitos* elementares, mas conduzem a outros *proceitos* elementares (definidos como um conjunto de processos, objetos e símbolos) Este tipo de raciocínios estão ligados a um pensamento processual.

Para ter raciocínios a um nível de pensamento *proceptual*, o aluno para além da compressão do processo, relaciona os dados recolhidos com os resultados obtidos. Podemos considerar que os novos *proceitos* resultam da combinação de *proceitos* elementares com outros processos abrangidos pela simbologia própria do conceito a estudar, o conhecimento adquirido assume um caráter significativo e não memorizado podendo ser aplicado e situações derivadas onde a sua aplicação não é tão evidente, ou em que a questão não é tão diretamente relacionada com um procedimento padrão.

A APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA.

A maioria da literatura sobre pensamento *proceptual* e sobre *proceitos* não foca o tema geometria. Segundo Meissner (2002) tal deve-se ao facto de o ensino da geometria ser centrado numa abordagem axiomática não existindo necessidade de utilizar símbolos para representar objetos e processos.

Estes objetos matemáticos em geometria são considerados imagens que seguem regras gramaticais para formar relações que só são possíveis quando as observamos como entidades, relacionando-as desta forma com algoritmos, possibilitando a sua compressão em *proceitos* (relação entre processo-procedimento-conceito).

As noções básicas de geometria euclidiana plana são muito úteis na representação de situações problemáticas em várias áreas da matemática. *Proceitos* como ângulos, retas, circunferências e círculos permitem aos alunos experimentar, observar, conjeturar, refutar e desenvolver raciocínios demonstrativos. Na elaboração do plano de estudos em análise, assumiu-se que a escolha dos tópicos a abordar não poderia estar restringida a uma única forma de *fazer* geometria, reconhecendo a importância da geometria euclidiana enquanto primeira teoria matemática, organizada axiomaticamente. Existem hoje alternativas viáveis mais interessantes do ponto de vista matemático, para alguns tópicos, a via euclidiana é a mais eficiente e clara, mas a visão métrica afigura-se adequada noutros tópicos tal como a geometria cartesiana vistas numa perspetiva puramente intuitiva na linha dos trabalhos de Lang e Murrow (1983).

ABORDAGEM METODOLÓGICA

No episódio apresentado mostra o processo de análise das respostas dos alunos seguindo uma metodologia de estudo de caso qualitativo de natureza interpretativa. Este episódio foi retirado de um estudo maior em desenvolvimento no qual se analisa e avalia um modelo de análise da complexidade do pensamento matemático num plano de estudos de matemática na formação inicial de professores e as aprendizagens dos alunos numa instituição de ensino superior politécnico particular e cooperativo na zona da grande Lisboa. Pretende-se identificar a *bifurcação proceptual* recorrendo à análise dos diferentes raciocínios analisados.

Esta análise específica foi realizada com base numa questão (escolhida de forma intencional) retirada de uma prova de avaliação realizada a 41 alunos do 2.º ano do curso de Educação Básica na unidade curricular de *Tópicos de Geometria*. Estes são alunos que revelam dificuldades nas aprendizagens matemáticas e onde cerca de metade acederam ao ensino superior por intermédio do processo de *maiores de 23*, processo pelo qual, indivíduos que não tendo concluído o ensino secundário e tenham mais de 23 anos, mediante algumas condicionantes inerentes da legislação, podem se inscrever no ensino superior.

O ensino é baseado no modelo em utilização na instituição, onde um terço da carga horária é lecionada por um matemático e centra-se nos aspetos teóricos dos conteúdos, sendo dois terços trabalhados de forma de laboratório focando-se em aspetos práticos e didáticos das aprendizagens teóricas.

A seleção da questão reside, por um lado, nos conteúdos matemáticos envolvidos, e por outro, no facto de ser uma questão suficientemente aberta para permitir um vasto leque de respostas e de raciocínios por parte dos alunos. A sua utilização justifica-se pelos objetivos deste tipo de questões não privilegiar somente a repetição de exercícios semelhantes mas, também, promover um paralelismo com aspetos de uma matemática mais formal que pretende desenvolver o raciocínio matemático.

A questão:

> *Considere o triângulo ABC em que [AB]=[BC]. Sendo N um ponto no segmento definido por A e C tal que BN bissecta o ângulo ABC, verifique que N é ponto médio de [AC].*

é uma variação de uma das proposições de Euclides que define um triângulo isósceles, é acompanhada de uma demonstração longa e que se tornou célebre pela utilização de uma *ponte* denominada de *pons asinorum*, onde o que é solicitado neste caso é a verificação do ponto N como ponto médio do segmento [AC].

Esta questão, que pode ser respondida de várias perspetivas aborda um vasto leque de conceitos e relações entre objetos matemáticos tais como: congruência de triângulos, bissectriz, relações entre lados e ângulos, áreas, teorema de Pitágoras entre outros.

Podemos considerar que a relação mais direta permite identificar a bissectriz BN como uma semirreta que divide o triângulo ABC em dois triângulos retângulos congruentes, logo [AN]=[NC] e portanto N é ponto médio de [AC]. Estes conceitos foram trabalhados em aulas teóricas (total de quatro horas) e práticas (total de oito horas) nas duas semanas imediatamente anteriores à realização da prova sendo abordados problemas deste tipo e suas possíveis relações com os tópicos estudados até à altura. Neste episódio um dos autores atuou como professor e como investigador.

As categorias de análise da questão e respostas subsequentes são baseadas nos indicadores dos níveis SOLO e nos seus atributos tal como enunciados por Biggs e Collis (1982) e a questão foi classificada como possivelmente *relacional* indicando uma orquestração entre os factos e os conceitos envolvidos, suas ações e objetivos.

Para uma análise mais profunda foram utilizadas as teorias de Tall (2002, 2007) para enquadrar aspetos importantes da *bifurcação proceptual* uma vez que os *proceitos* envolvidos são ambíguos e com base nessa análise procurou-se compreender os raciocínios envolvidos nas respostas dos alunos.

EXPECTATIVAS DA BIFURCAÇÃO *PROCEPTUAL* E DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Dos 41 alunos que realizaram a prova, segue a distribuição das respostas com base nos raciocínios classificados pelos níveis SOLO:

Tabela 2. *Distribuição dos alunos pelos níveis no modelo SOLO.*

Nível SOLO	Número de alunos
Abstrato	0
Relacional	2
Multi-estrutural	0
Uni-estrutural	13
Pré-estrutural	19
Não responderam	6
Total	41

Dois alunos que responderam de acordo com os critérios definidos para um nível *relacional* consistente com respostas onde comparam, explicam e aplicam os conhecimentos efetuando ligações complexas que revelam raciocínios relevantes.

Este tipo de raciocínio, classificado como de nível *relacional* de acordo com o modelo SOLO segue a linha de pensamento de Gray e Tall (2007) quando por intermédio da abstração as ideias matemáticas são comprimidas de forma a serem utilizadas em vários domínios e sob várias representações.

Nestes casos a representação simbólica deixa de estar ligada a um processo podendo ser apresentada como um conceito, com possibilidade de se traduzir num *proceito*, o que difere da representação mais tradicional onde um processo geral só terá significado quando aplicado a um conceito que possa ser manipulado.

Dos tipos de raciocínio emergem das respostas deste nível:

i) Respostas mistas entre a representação geométrica (desenho) em esboço que ajuda à compreensão da resolução e a representação algébrica, assumindo a veracidade do enunciado, chegando assim a uma conclusão correta, justificada pelos critérios de congruência de triângulos.

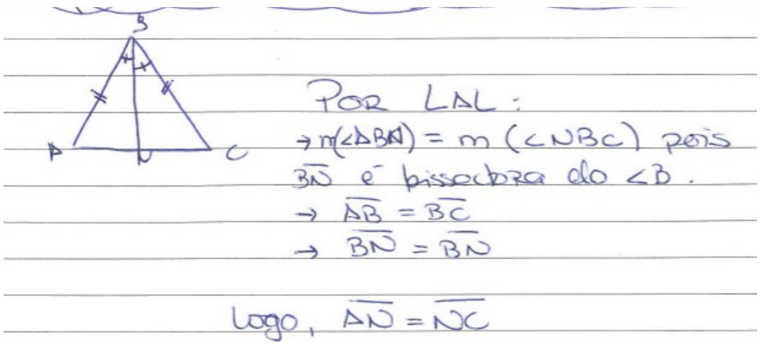


Figura 2. Exemplo de uma resposta de nível *relacional* onde o aluno utiliza os critérios de congruência de triângulos para justificar o resultado.

Este aluno para além da representação geométrica (esboço) que utiliza como suporte ao seu raciocínio divide imediatamente o ângulo ABC ao meio compreendendo o conceito de bissectriz e daí assume as relações necessárias para responder de forma adequada à questão colocada, faltando somente escrever a conclusão que se pressupõe pela última igualdade.

ii) respostas mistas entre a representação geométrica em esboço como auxiliar e texto explicativo dos passos seguidos para a resolução do problema.

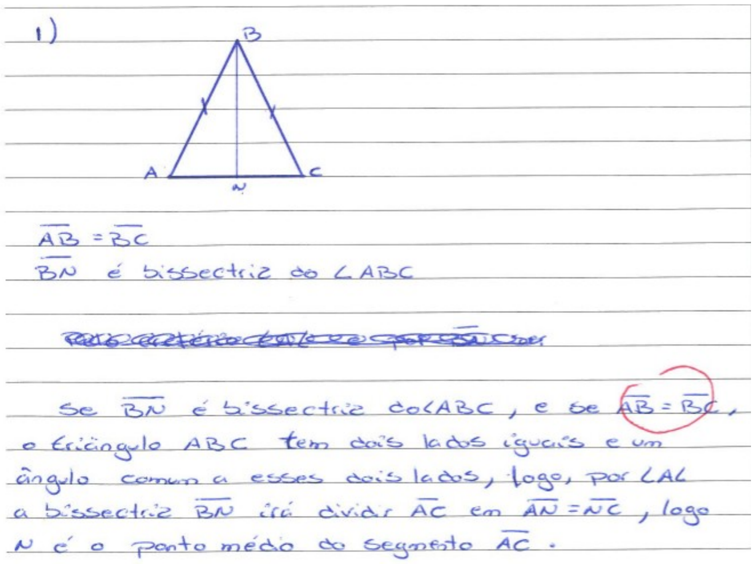


Figura 3. Exemplo de outra resposta de nível *relacional* onde o aluno descreve o processo de resolução até ao resultado final.

A resposta deste aluno, sendo descritiva, e não tão desenvolvida como a anterior, remete para o mesmo tipo de raciocínio do exemplo apresentado na figura 2.

Esta relação de um processo com uma sequência de manipulações geométricas entre os vários objetos matemáticos, ou um processo comprimido de relação entre os vários conceitos, e a capacidade de os utilizar em diferentes representações apresenta-se como uma bifurcação processual/conceptual, no sentido a que Gray e Tall (1994) denominaram de *bifurcação proceptual*.

Após apresentar alguns dados que reforçam o modelo de análise, visto serem representativos de um pensamento *proceptual*, logo de fatores que ultrapassam a *bifurcação proceptual,* vejamos os casos onde esta relação não foi estabelecida:

De acordo com os critérios definidos para raciocínios de um nível *uni-estrutural,* consistente com respostas onde com base num único aspeto, o aluno assume conclusões, identificando, memorizando e realizando procedimentos elementares fazendo algumas ligações sem identificar a sua importância para a resolução do problema foram classificadas 13 respostas.

Destas respostas destacam-se raciocínios mistos entre a representação geométrica (desenho) em esboço que ajuda à compreensão da resolução e a representação algébrica que corresponde ao esboço realizado, assumindo a veracidade do enunciado, chegando assim a uma conclusão correta, mas não justificada de forma completa.

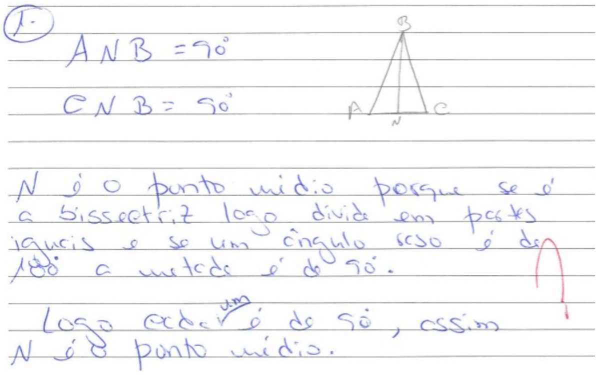


Figura 4. Exemplo de uma resposta de nível *uni-estrutural* onde o aluno identifica corretamente as duas igualdades existentes a partir da noção de bissectriz.

19 alunos responderam de acordo com os critérios definidos para um raciocínio de nível *pré-estrutural* consistente com respostas desorganizadas e não relacionadas com o tópico em questão. Dos raciocínios envolvidos nestas respostas salientam-se 3 tipos dos quais se destacam:

i) Raciocínios mistos entre a representação geométrica (desenho) em esboço e a representação algébrica que não corresponde ao esboço realizado, assumindo desde logo a veracidade do enunciado, chegando assim a uma conclusão correta, mas não justificada.

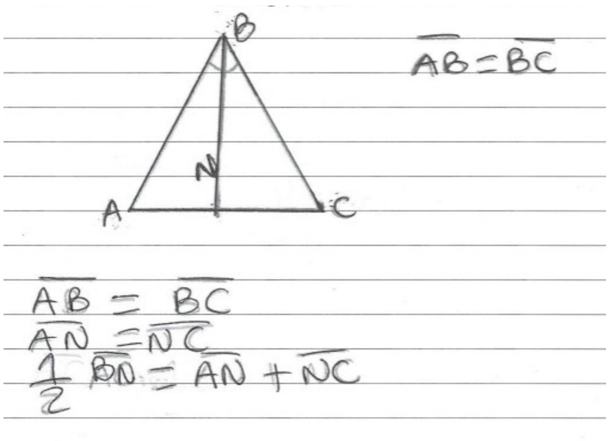


Figura 5. Exemplo de uma resposta de nível *pré-estrutural* onde o aluno identifica corretamente as duas igualdades existentes.

Este tipo de raciocínio processual é comum quando o aluno tem uma noção incompleta dos objetos matemáticos mas não das relações estabelecidas entre eles. Na resolução do problema recorre por vezes à memorização mas cometendo um erro na divisão do segmento de reta.

ii) raciocínios apresentados na forma escrita, baseados em definições e chegando a conclusões abusivas tendo em conta os argumentos matemáticos apresentados.

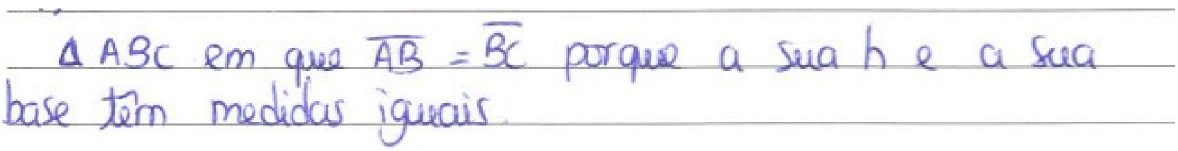
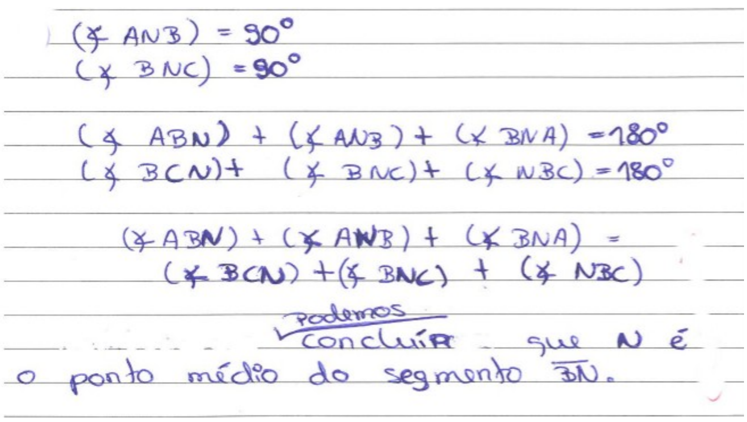

Δ ABC em que $\overline{AB} = \overline{BC}$ porque a sua h e a sua base têm medidas iguais.

Figura 6. Exemplo de outra resposta de nível *pré-estrutural* onde o aluno assume a igualdade indicada no enunciado mas responde tendo em conta a noção de área do triângulo.

Este tipo de raciocínio descontextualizado, que não parte sequer de alguma representação gráfica (por exemplo um esboço do triângulo) aponta para que o aluno tenha memorizado algumas relações, mas não as consegue relacionar com o exercício do enunciado. Identifica triângulos e assume que a resposta tem a ver com a noção de área.

iii) raciocínios algébricos tentando relacionar vários objetos matemáticos. Esta é uma resposta típica de um raciocínio procedimental e memorizado onde por intermédio de uma mera manipulação algébrica de relações entre ângulos se tenta chegar a uma resposta.


$(\measuredangle ANB) = 90^\circ$
$(\measuredangle BNC) = 90^\circ$

$(\measuredangle ABN) + (\measuredangle ANB) + (\measuredangle BNA) = 180^\circ$
$(\measuredangle BCN) + (\measuredangle BNC) + (\measuredangle NBC) = 180^\circ$

$(\measuredangle ABN) + (\measuredangle ANB) + (\measuredangle BNA) = (\measuredangle BCN) + (\measuredangle BNC) + (\measuredangle NBC)$

podemos concluir que N é o ponto médio do segmento $\overline{BN}$.

Figura 7. Exemplo de uma terceira resposta de nível *pré-estrutural* onde o aluno assume que a relação entre ângulos resolve o problema.

A partir de duas afirmações corretas (que os ângulos ANB e BNC têm uma amplitude de 90º) o aluno efetua uma relação correta entre a soma dos ângulos internos de um triângulo projetando uma conclusão a partir destas igualdades. Este é um exemplo típico da *bifurcação proceptual* pois o aluno não se consegue *desligar* dos procedimentos assumindo abusivamente o resultado solicitado.

Na figura seguinte o aluno atribui aleatoriamente coordenadas a A e C, e utiliza a fórmula para encontrar o ponto médio entre esses dois pontos.

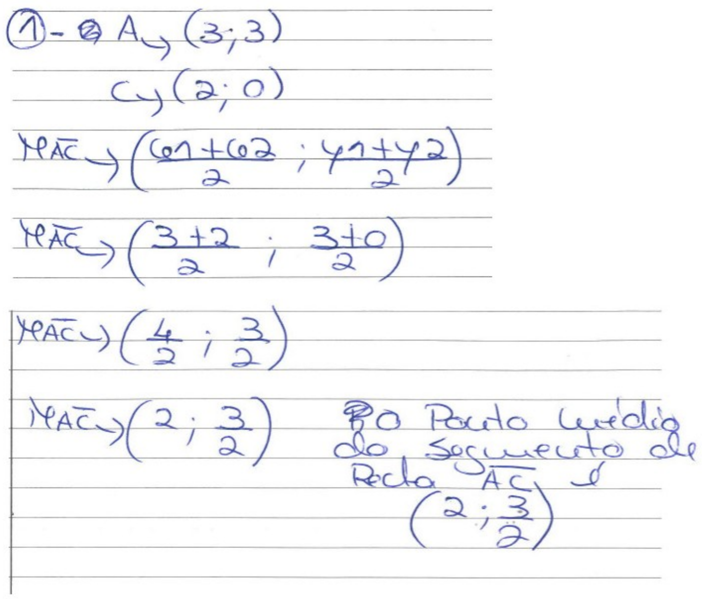


Figura 8. Exemplo de uma resposta de nível *pré-estrutural* onde o aluno utiliza a fórmula do ponto médio entre dois pontos para obter um resultado, centrada num caso particular.

A tendência para raciocínios e procedimentos realizados em outras situações diferentes são representados por este exemplo, onde para além de desconsiderar completamente o enunciado atribuindo coordenadas aos pontos A e C (o que não seria de todo necessário), ainda comete erros nas operações efetuadas com vista a encontrar o ponto médio entre os dois pontos, descurando completamente os restantes elementos do enunciado.

Para além de ser um exemplo típico de um raciocínio de nível *pré-estrutural* tendo em conta o critério de dar respostas inconsistentes, o aluno está tão centrado nos procedimentos e nas fórmulas que não consegue relacionar o processo com o conceito indicando mais uma vez a incapacidade na passagem de um pensamento processual para um pensamento *proceptual*, constatando aqui evidências da *bifurcação proceptual*.

Este tipo de raciocínios de nível *pré-estrutural* e *uni-estrutural* apresentados pelas respostas dos alunos revelam, que ainda não existe um compressão dos procedimentos em conceitos. Estes podem até existir enquanto processos matemáticos, que até podem resultar em exercícios de resposta fechada, não evidenciado de forma tão saliente a complexidade do pensamento matemático e muito menos a qualidade das aprendizagens matemáticas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste artigo foi analisada uma questão aberta de geometria numa tentativa de expor a conceptualização de Gray e Tall sobre a *bifurcação proceptual* e a análise aos raciocínios envolvidos.

O trabalho realizado em aula com estes alunos pretende ultrapassar a barreira da geometria elementar para um pensamento matemático mais complexo sobre um conjunto de propriedades e conceitos comuns a ideias geométricas, por intermédio de uma compressão dos processos e procedimentos em conceitos ativos em linha com a conceção de *proceito.*

A utilização dos níveis SOLO para caracterizar as respostas tem a limitação de identificar uma imagem num determinado momento não sendo possível, e de forma isolada, avaliar e analisar o raciocínio matemático dos alunos, daí a necessidade de uma segunda dimensão para obter uma melhor compreensão do objeto em estudo.

Sugere-se que o modelo SOLO possa ser utilizado como um indicador da *performance* do aluno em questões específicas que sejam, elas mesmas, indicadoras da qualidade das aprendizagens em matemática e dos seus raciocínios, mas para alcançar essa interpretação é necessário recorrer à análise das respostas.

O sucesso relativo alcançado por alguns alunos pressupõe que estes tenham ultrapassado a *bifurcação proceptual* dando mostras de uma manipulação mental mais complexa das ideias e conceitos matemáticos envolvidos na resolução da questão em estudo evidenciando assim uma evolução de um pensamento processual para um pensamento *proceptual*. Essa compressão cognitiva implica também uma compressão no número de passos do processo de resolução o que por si não implica uma redução no tempo de resposta.

Os restantes alunos ainda não conseguiram ultrapassar o nível dos processos e dos procedimentos inerentes à manipulação de ideias geométricas, tendo alguns evidenciado ainda lacunas nos raciocínios efetuados. Essa compressão *proceptual* vai ocorrendo em vários estádios ao longo da aprendizagem da matemática fornecendo ao alunos uma hierarquia complexa de relações.

De salientar que é necessário aprofundar a análise pois não há evidências, tendo em conta que este é um estudo exploratório, de que estes resultados não possam advir de excertos de conhecimento factual e aí reside o problema na identificação da resposta como um mero processo memorizado ou como um *proceito*. Esta distinção entre um raciocínio ao nível do pensamento processual e outro raciocínio ao nível do pensamento *proceptual* pode ser identificada, mas deve ser sustentada em estudos mais alargados integrando mais atividades.

Pensamos que o modelo de análise centrado nas suas duas dimensões: i) identificação das categorias do raciocínio centrado no pensamento matemático tendo em conta os critérios dos níveis SOLO e ii) as ideias de *proceito*, pensamento *proceptual* e *bifurcação proceptual* sustentadas pelas teorias de Tall sobre a complexidade do pensamento matemático permitem uma análise mais detalhada do processo de aprender matemática com qualidade.

Conjeturando que o problema da *bifurcação proceptual* é recorrente na medida em que o conhecimento matemático se vai alargando, mas que enquanto existem alunos que têm alguma flexibilidade cognitiva para ultrapassar estas bifurcações no raciocínio evidenciado, existem outros que adotam uma postura processual, que lhes garante o sucesso (e não a qualidade da aprendizagem) imediato somente para se depararem como uma nova bifurcação.

REFERÊNCIAS

Albuquerque, C., Veloso, E., Rocha, I., Santos, L., Serrazina, L. & Nápoles, S. (2006). *A matemática na formação inicial de professores*. Lisboa: APM e SEM da SPCE.

Biggs, J. & Collis, K. (1982). *Evaluating the quality of learning*. London: Academic Press.

Biggs, J. & Tang, C. (2007). *Teaching for Quality Learning at University*. Berkshire. McGraw Hill.

Ceia, M. (2002). *A taxonomia SOLO e os níveis de van Hiele*. Visualizado em http://spiem.pt/DOCS/ATAS_ENCONTROS/2002/2002_15_MJMCeia.pdf

Gray, E. (1993). Count-on: The Parting of the Ways for Simple Arithmetic. In N. Hirabayashi, K. S. Hohda & F.-L. Lin (Eds.). *Proceedings of XVII International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.I pp.204-2011), Tsukuba. Japan.

Gray, E. & Tall D. (2007). Abstraction as a natural process of mental compression. *Mathematics Education Research Journal, 19 (2)*, 23-40.

Gray, E. & Tall D. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic. *The Journal for Research in Mathematics Education, 25 (2)*, 116–140.

Lang, S. & Murrow, G. (1983). *Geometry.* New Haven: Springer.

Meissner, H. (2002). Procepts in geometry. In J. Novotná (Ed.). *Proceedings of II European Research in Mathematics Education, Mariánské Lázně,* Czech Republic.

Pegg, J. (2003). Assessment in Mathematics: A developmental approach. In J. M. Royer (Ed.), *Advances in Mathematical Cognition* (pp. 227-259). New York: Information Age Publishing.

Sfard, A. (1994). Reification as the birth of a metaphor. *For the Learning of Mathematics, 14,* 44-55.

Tall, D. (2007). Developing a theory of mathematical growth. *ZDM 39 (1-2)*, 145-154, DOI: 10.1007/s11858-006-0010-3.

Tall, D. (2006). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof. In Grouws D.A. (ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (495–511)*, New York: Macmillan.

Tall, D. (Ed.). (2002). *Advanced Mathematical Thinking*. New York: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. (1989). Concept images, computers, and curriculum change. *For the learning of mathematics, 9 (3)*, 37-42.

Veloso, E. (2004). Educação matemática dos futuros professores. In A. Borralho, C. Monteiro & R. Espadeiro (Org.), *A matemática na formação do professor*. Évora: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.