Investigação em Educação Matemática

2012

Práticas de ensino da Matemática

sociedade portuguesa de investigação em educação matemática

Investigação em Educação Matemática

2012

Práticas de ensino da Matemática

Editores:

Ana Paula Canavarro

Leonor Santos

Ana Maria Boavida

Hélia Oliveira

Luís Menezes

Susana Carreira

Investigação em Educação Matemática 2012

Práticas de ensino da Matemática

Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática

Editora: Leonor Santos

Editores convidados: Ana Paula Canavarro, Ana Maria Boavida, Hélia Oliveira, Luís Menezes, Susana Carreira

ISSN: 2182-0023

Corpo de revisores

Ana Cláudia Henriques, Ana Maria Boavida, Ana Paula Canavarro, António Domingos, António Guerreiro, António Ribeiro, Carlos Miguel Ribeiro, Catarina Delgado, Célia Mestre, Cláudia Domingues, Cláudia Oliveira, Cristina Martins, Darlinda Moreira, Elisabeth Ramos, Fátima Delgado, Fátima Mendes, Floriano Viseu, Helena Martinho, Hélia Oliveira, Hélia Pinto, Hélia Ventura, Henrique Guimarães, Isabel Vale, Joana Brocardo, João Pedro da Ponte, José Duarte, José Fernandes, Leonor Santos, Luís Menezes, Lurdes Serrazina, Manuel Saraiva, Manuel Vara Pires, Margarida Rodrigues, Maria Helena Martinho, Maria José Delgado, Maria Manuel Nascimento, Mónica Baptista, Nélia Amado, Nelson Mestrinho, Neusa Branco, Paulo Dias, Regiz Lima, Renata Carvalho, Ricardo Gonçalo, Rosa Antónia Ferreira, Rosário Monteiro, Sandra Campelos, Sandra Nobre, Sandra Quintas, Sílvia Semana, Susana Colaço, Susana Carreira, Teresa Pimentel.

Edição:

Luís Pinheiro, ESE de Portalegre

Apoios

Instituto Politécnico de Portalegre

Escola Superior de Educação de Portalegre

Centro Interdisciplinar de Investigação e Inovação

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

ÍNDICE

APRESENTAÇÃO 1

PRÁTICAS DE ENSINO DA MATEMÁTICA

SITUATING MATHEMATICS TEACHING PRACTICES IN A PRACTICE OF AMBITIOUS MATHEMATICS TEACHING
Magdalene Lampert e Hala Ghousseini 5

PRÁTICAS DE ENSINO QUE PROMOVEM O PENSAMENTO ALGÉBRICO: UM ESTUDO COM DUAS PROFESSORAS NO 7.º ANO DE ESCOLARIDADE
José António Duarte 31

PRÁTICAS DE ENSINO E DE AVALIAÇÃO DESENVOLVIDAS POR PROFESSORES NO CONTEXTO DA IMPLEMENTAÇÃO E GENERALIZAÇÃO DO PROGRAMA DE MATEMÁTICA DO ENSINO BÁSICO
António Borralho, Domingos Fernandes e Isabel Vale 63

EXPLORAR TAREFAS MATEMÁTICAS

EXPLORAR TAREFAS MATEMÁTICAS
Ana Paula Canavarro e Leonor Santos 99

MODELAÇÃO MATEMÁTICA NO ENSINO PROFISSIONAL: CONSTRUÇÃO E EXPLORAÇÃO DE UMA TAREFA
Cláudia Oliveira e Hélia Oliveira 105

A ADAPTAÇÃO DAS TAREFAS MATEMÁTICAS: COMO PROMOVER O USO DE MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES
Ana Patrícia Gafanhoto e Ana Paula Canavarro 121

TAREFAS EM CONTEXTOS SIGNIFICATIVOS NO DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO MULTIPLICATIVO
Hélia Pinto 135

UM PERCURSO DIDÁTICO DE ESTRUTURAÇÃO ESPACIAL E GEOMÉTRICA
Cristina Loureiro 149

UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO BASEADA NUMA ABORDAGEM PARALELA DAS VÁRIAS REPRESENTAÇÕES DOS NÚMEROS RACIONAIS E NO USO DO MODELO DA BARRA
Hélia Ventura e Hélia Oliveira 161

PRÁTICAS DE SELEÇÃO E CONSTRUÇÃO DE TAREFAS QUE VISAM O DESENVOLVIMENTO DO SENTIDO DE NÚMERO: O CASO DO PROFESSOR MANUEL
Catarina Delgado, Joana Brocardo e Hélia Oliveira 175

A MEDIAÇÃO DO PROFESSOR E A EXPLORAÇÃO DE UMA ATIVIDADE DE MODELAÇÃO MATEMÁTICA NO ENSINO DA ÁLGEBRA LINEAR
Ricardo Gonçalves e Cecília Costa 187

DESENVOLVENDO O SENTIDO DE NÚMERO RACIONAL: QUE DESAFIOS PARA O PROFESSOR?
Margarida Nunes Silva, Ana Maria Boavida e Hélia Oliveira 201

AS TAREFAS E A COMUNICAÇÃO NUMA ABORDAGEM EXPLORATÓRIA NO ENSINO DOS NÚMEROS RACIONAIS
Marisa Quaresma e João Pedro da Ponte 215

O QUESTIONAMENTO ORAL COMO PRÁTICA AVALIATIVA DA AULA DE MATEMÁTICA: O PROFESSOR JOSÉ
Paulo Dias e Leonor Santos 229

O ESTUDO ACOMPANHADO EM ARTICULAÇÃO COM A MATEMÁTICA: PRÁTICAS DE DUAS PROFESSORAS
Fátima Delgado, Rosa Antónia Ferreira e José António Fernandes 241

PRÁTICAS DE ENSINO EXPLORATÓRIO DA MATEMÁTICA: O CASO DE CÉLIA
Ana Paula Canavarro, Hélia Oliveira e Luís Menezes 255

PERSPETIVAS TEÓRICAS NO ESTUDO DAS PRÁTICAS PROFISSIONAIS DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA
João Pedro da Ponte, Neusa Branco, Marisa Quaresma *et al* 267

PROJETO P3M - PRÁTICAS PROFISSIONAIS DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA
João Pedro da Ponte, Hélia Oliveira, Ana Paula Canavarro *et al* 279

ROTINAS NA MATEMÁTICA ELEMENTAR
Joana Maria de Castro 283

DESENVOLVER CAPACIDADES TRANSVERSAIS

ENSINAR MATEMÁTICA DESENVOLVENDO AS CAPACIDADES DE RESOLVER PROBLEMAS, COMUNICAR E RACIONAR: CONTORNOS E DESAFIOS
Ana Maria Boavida e Luís Menezes 287

O QUE É QUE A MARIA QUER SABER?
António Guerreiro 296

A COMUNICAÇÃO ORAL NUMA DISCUSSÃO MATEMÁTICA EM GRUPO-TURMA: O PAPEL DA PROFESSORA
Sílvia Semana e Leonor Santos 307

DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO E AS PRÁTICAS DE COMUNICAÇÃO NUMA AULA
Cláudia Domingues e Maria Helena Martinho 321

DESENVOLVIMENTO DA CAPACIDADE DE ARGUMENTAÇÃO MATEMÁTICA DE ALUNOS DO 11.º ANO DE MATEMÁTICA A E PRÁTICAS AVALIATIVAS DOS PROFESSORES: O CASO DE LAURA
Rosário Monteiro e Leonor Santos 335

UM NOVO-VELHO DESAFIO: DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS À CRIATIVIDADE EM MATEMÁTICA
Isabel Vale e Teresa Pimentel 347

PRÁTICAS DE ENSINO COM CÁLCULO MENTAL
Renata Carvalho e João Pedro da Ponte 361

PAVIMENTAÇÕES COM O GEOMETER'S SKETCHPAD: UM ESTUDO NO 10º ANO DE ESCOLARIDADE
António Domingos e Maria João Mendes Vieira 371

A INTEGRAÇÃO DA FOLHA DE CÁLCULO NO ESTUDO DO TÓPICO EQUAÇÕES DO 2.º GRAU NO 9.ºANO DE ESCOLARIDADE
Sandra Nobre, Nélia Amado e João Pedro da Ponte 387

O PENSAMENTO ALGÉBRICO E A ARITMÉTICA
Laura Bandarra Pinto 403

A EXPLORAÇÃO DE TAREFAS MATEMÁTICAS PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO DE ALUNOS DO 4.º ANO DE ESCOLARIDADE
Célia Mestre e Hélia Oliveira 417

PRÁTICAS AVALIATIVAS NA EXPLORAÇÃO DE UMA TAREFA EM CONGRESSO MATEMÁTICO
Paula Fonseca, Ana Maria Boavida e Leonor Santos 433

CONTANDO AZEITONAS NO PRÉ-ESCOLAR: POTENCIALIDADES DO COLAR DE CONTAS, MOLDURAS DE DEZ E PRATOS COM PONTOS NO DESENVOLVIMENTO DO CONCEITO DE NÚMERO
Maria José Delgado, Paula Serio, Fernanda Azedo *et al* 435

CONTEXTOS DE DESENVOLVIMENTO DE PRÁTICAS DE ENSINO

CONTEXTOS DE DESENVOLVIMENTO DE PRÁTICAS DE ENSINO
Hélia Oliveira e Susana Carreira 439

CONTRIBUTO DAS PRÁTICAS DE FORMAÇÃO PARA AS PRÁTICAS LETIVAS: UM ESTUDO EXPLORATÓRIO
Maria de Lurdes Serrazina 443

AS TAREFAS COMO SUPORTE À CONDUÇÃO DE AULAS
Cristina Martins e Leonor Santos 455

PRÁTICAS LETIVAS E FORMAÇÃO CONTÍNUA EM MATEMÁTICA: UM DIÁLOGO NECESSÁRIO
Régis Luíz de Souza e João Pedro da Ponte 467

LA MEDIACIÓN DEL DOCENTE Y LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA DE LOS ESTUDIANTES
Patricia Flores, Olimpia Figueras e François Pluvinage 479

O *LESSON STUDY* COMO ESTRATÉGIA DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES A PARTIR DA PRÁTICA PROFISSIONAL
Mónica Baptista, João Pedro da Ponte, Isabel Velez *et al* 494

EXPLORAR TAREFAS PARA PROMOVER O RACIOCÍNIO ESTATÍSTICO NO ENSINO SECUNDÁRIO: POSSIBILIDADE OU MIRAGEM?
Sandra Quintas, Hélia Oliveira e Rosa Antónia Ferreira 506

O CONHECIMENTO PROFISSIONAL DE UMA PROFESSORA QUANDO ABORDA O HISTOGRAMA NUMA AULA DE 7º ANO
Ana Cristina Leiria e María Teresa Astudillo 518

A INTEGRAÇÃO DO TANGRAM NA AULA DE GEOMETRIA – UMA PRIMEIRA ABORDAGEM AO CONCEITO DE ÁREA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DOS PRIMEIROS ANOS
Nelson Mestrinho e Hélia Oliveira 530

EVOLUCIÓN DE TAREAS DE ENSEÑANZA DE ÁLGEBRA A PARTIR DE LA REFLEXIÓN SOBRE LA PRÁCTICA DE DOCENTES PARTICPANTES EN UN CURSO DE FORMACIÓN
Elisabeth Ramos e Pablo Flores 542

RECURSOS DIDÁTICOS NUMA AULA DE ENSINO EXPLORATÓRIO: DA PRÁTICA À REPRESENTAÇÃO DE UMA PRÁTICA
Hélia Oliveira, Luís Menezes e Ana Paula Canavarro 558

OS RECURSOS INTERATIVOS QUE ACOMPANHAM OS MANUAIS DE MATEMÁTICA
Paula Cristina Teixeira e José Manuel Matos 572

“E SE UM ALUNO SEGUE UM CAMINHO QUE EU NÃO COMPREENDO?” — GERIR O TRABALHO INVESTIGATIVO NA AULA DE MATEMÁTICA
Manuel Vara Pires 574

A COMPLEXIDADE DO PENSAMENTO MATEMÁTICO E A QUALIDADE DAS APRENDIZAGENS: TAREFAS MATEMÁTICAS
Fernando Luís Santos e António Domingos 576

TAREFAS NA E PARA A FORMAÇÃO MATEMÁTICA DE PROFESSORES – ALGUMAS ESPECIFICIDADES
C. Miguel Ribeiro e Arne Jakobsen 580

BLOCOS PADRONIZADOS: CONTRIBUIÇÃO PARA UMA ATITUDE DE REFLEXÃO PERANTE ESCOLHAS PEDAGÓGICAS
Conceição Costa e Regina Kopke 582

MODELAÇÃO MATEMÁTICA COMO AMBIENTE DE APRENDIZAGEM: UMA PRIMEIRA APROXIMAÇÃO NO 1.º CICLO
Fernando Martins, Marta Vieira, Diogo Reis e C. Miguel Ribeiro 584

Apresentação

O professor, o que ele é enquanto pessoa, as conceções que tem sobre a escola, o ensino e a aprendizagem, as opções que toma e as ações que desenvolve na sua prática de ensino marcam de forma indiscutível as aprendizagens dos alunos. O reconhecimento da importância do papel do professor não é recente e a investigação que toma por objeto de estudo o professor tem mais de meio século. Contudo, o foco dos aspetos relacionados com o professor tem vindo a evoluir ao longo dos tempos, bem como as abordagens metodológicas seguidas.

Procurando relacionar o conhecimento profissional do professor com o rendimento escolar dos alunos, nos meados dos anos 50 do século XX são desenvolvidos diversos estudos de cariz quantitativo. Estabelecendo uma estreita relação entre o conhecimento profissional do professor e o número de disciplinas da área científica que ensina, ao nível do ensino universitário, ou o número de cursos realizados na sua formação, procura-se quantificar este conhecimento. Para tal são, sobretudo, usados, como instrumentos de recolha de dados, questionários e testes de medida. Estes estudos, contudo, revelam-se pouco frutuosos dado não evidenciarem uma relação significativa entre os professores com "maior" conhecimento profissional e os resultados escolares dos alunos. Podem mesmo encontrar-se resultados considerados perturbadores, caso de professores com maior formação científica estarem associados a alunos com piores níveis de desempenho escolar.

Este tipo de resultados veio questionar a investigação até então realizada, dando origem a uma viragem marcante. A entrada na sala de aula é assim reconhecida como indispensável para estudar o que fazem os professores e o que aprendem os alunos. Encarando o professor como aplicador do currículo prescrito, pretende-se identificar quais os métodos mais eficazes para ensinar cada conteúdo. Embora mantendo-se ainda muitas das características metodológicas do período anterior é possível dizer-se que a entrada dos investigadores na sala de aula veio tornar mais evidente a complexidade não só das diversas dimensões em presença, como da atividade de ensino. Progressivamente de uma investigação positivista ou pós-positivista, de cariz quantitativo, passa-se a uma metodologia interpretativa. O foco é o sentido dado ao professor ao seu ensino, nele incluindo as suas conceções, conhecimento profissional, tomadas de decisão e razões subjacentes.

Neste percurso temporal agora descrito, podemos afirmar que, na atualidade, a compreensão das práticas dos professores, em particular os de Matemática, assume, entre os investigadores, uma importância indiscutível. Muitas são as questões que precisamos de estudar para compreendermos a complexidade destas práticas. Algumas delas são discutidas nos artigos publicados nesta revista, resultantes de versões sujeitas a um processo de revisão por pares das comunicações e posters apresentados no Encontro de Investigação em Educação Matemática, subordinado ao tema *Práticas de ensino da Matemática*, realizado em Castelo de Vide, nos dias 12 e 13 de maio de 2012.

Esta revista inclui quatro sessões. A primeira apresenta as conferências plenárias do encontro. Começa com um artigo de Magdalene Lampert da Universidade de Michigan, Estados Unidos da América, intitulado *Situating Mathematics Teaching Practices in a Practice of Ambitious Mathematics Teaching*. Nele, a autora descreve o design e a implementação de um modelo de aprendizagem de ensino na, de e para a prática: *Learning Teaching in, from, and for Practice* (LTP). Como explica, este modelo procura responder ao desafio que se coloca aos professores de Matemática quando procuram que todos os alunos não só adquiram conhecimentos, mas também sejam capazes de compreender e explicar o que sabem e de usar esse saber para construir argumentos sólidos e resolver problemas autênticos. O segundo artigo, da autoria de José Duarte da Escola Superior de Educação de Setúbal, intitula-se *Práticas de ensino que promovem o pensamento algébrico: Um estudo com duas professoras no 7.º ano de*

escolaridade. Tendo por objetivo o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 7.º ano de escolaridade, este estudo foca-se em aspetos das práticas de duas professoras, quando planeiam e elaboram tarefas para desenvolver o pensamento algébrico, apoiadas na tecnologia, e quando conduzem o ensino na sala de aula. Por último, o terceiro artigo *Práticas de Ensino e de Avaliação Desenvolvidas por Professores no Contexto da Implementação e Generalização do Programa de Matemática do Ensino Básico* é da autoria de António Borralho da Universidade de Évora. Descreve, analisa e interpreta práticas de ensino e de avaliação desenvolvidas por professores experimentadores e/ou por professores a lecionar no âmbito do processo de generalização do Programa de Matemática do Ensino Básico, homologado em 2007, e sujeito a uma fase de experimentação que se iniciou em 2008/2009.

Quando falamos de práticas de professores, habitualmente consideramos três fases intimamente relacionadas: a planificação, a concretização da ação prevista e, finalmente, a reflexão sobre o que se fez, para de forma informada se recomeçar o ciclo. A prática de ensino do professor envolve várias componentes. Nela destacamos a seleção e exploração das tarefas matemáticas, contexto determinante para o tipo de aprendizagens a desenvolver pelos alunos. Diversos artigos abordam assim o tema *Explorar tarefas matemáticas*, constituindo este grupo a segunda sessão desta revista.

Falar em aprendizagem matemática nos dias de hoje compreende a aquisição de conhecimentos e o desenvolvimento de capacidades transversais. Esta segunda componente é mais exigente, quer para o aluno, quer para o professor, uma vez que apela a capacidades intelectuais de ordem elevada. Criar experiências matemáticas significativas para os alunos e adequadas ao desenvolvimento destas capacidades exige por parte do professor um ensino que em muito se distancia do chamado ensino tradicional. Esta constatação levou-nos a dedicar um espaço próprio nesta revista, a sua terceira sessão, onde se apresenta um conjunto de artigos que apresentam situações concretas e discutem práticas de ensino propiciadoras para *Desenvolver capacidades transversais*.

A quarta sessão discute *Contextos de desenvolvimento de práticas de ensino*. Uma sociedade em contante evolução traz necessariamente novos e renovados desafios à educação. O que hoje se entende por saber matemática é certamente diferente do significado atribuído no passado. Tal evolução exige por parte do professor uma constante atualização e procura de aperfeiçoamento da sua prática profissional. Não poderíamos, assim, deixar de incluir nesta revista uma parte dedicada à discussão e problematização de possíveis contextos propiciadores do desenvolvimento das práticas de ensino.

Esperamos que o contributo que muitos autores deram para a publicação deste número da revista Investigação em Educação Matemática, dedicado às Práticas de Ensino em Matemática, possa inspirar e impulsionar a continuação da investigação nesta área.

Leonor Santos e Ana Paula Canavarro

Práticas de ensino da Matemática

SITUATING MATHEMATICS TEACHING PRACTICES IN A PRACTICE OF AMBITIOUS MATHEMATICS TEACHING

Magdalene Lampert[1]
University of Michigan and Boston Teacher Residency
mlampert@umich.edu

Hala Ghousseini
University of Wisconsin
ghousseini@wisc.edu

Abstract: "Practice" may have at least two meanings: 1. the things that teachers do to teach mathematics and 2. the ongoing pursuit of a craft or profession with shared language, tools, and principles to support action. Learning *ambitious practices* depends on creating and sustaining *a practice of ambitious teaching*.

Ambitious mathematics teaching aims to produce competent performance in complex domains for all students. If it is successful, students will not only acquire knowledge but they will be able to understand and explain what they know and be able to use what they know to construct solid arguments and solve authentic problems. This kind of teaching is challenging to learn because it involves not only skill and knowledge, but a commitment both to mathematics and to students. Many teachers, especially at the elementary level, have weak knowledge of mathematics. Moreover, their commitment to mathematics is problematic because what they are committed to is often limited to the rules of arithmetic. They may be committed to student learning, but the focus of that commitment is getting students to learn to use and apply those rules. This suggests that the teacher educator must work not only on building skill in teaching practices, but also on building appropriate knowledge and commitment.

In this talk, I will describe the design and implementation of a model for "Learning Teaching in, from, and for Practice" (LTP) by working simultaneously on developing teachers' skill, knowledge, and commitment. The model focuses on the practice of teaching as a collective endeavor drawing on common practices to continually improve students' performance and understanding. The design has three components: a *Cycle of Investigation and Enactment* in which teachers move between interactions with learners and their own learning, *Instructional Activities* which are containers for the practices, principles and mathematics that teachers need to learn, and *Designed Settings* in which professional learning communities link novices with more proficient others to improve student learning.

Key-words: Practice; ambitious teaching.

The question this paper addresses is broad: How can ambitious teaching practices in mathematics be established and maintained in school classrooms? There is no question that the major factor in establishing and maintaining such practices is the teacher, and that teachers will need to learn something that they do not now know how to do in order for this to happen. They will need resources—social, intellectual, and material—that are not now broadly available. And we will need to know not only about how to make those resources

[1] The authors are indebted to their colleagues in the Learning Teaching in, from, and for Practice Project: Heather Beasley, Angela Chan Turrou, Megan Franke, Elham Kazemi, Kate Crowe, and Adrian Cunard. Both the ideas in this paper and the project we describe are the results of a close collaboration with this group.

available to teachers, but how to get them used inside of the daily interactions that teachers have with students. We will argue that teachers' learning *ambitious practices* and *using them in classrooms* depends on creating and sustaining *a practice of ambitious teaching*.

A practice of ambitious mathematics teaching would aim to produce competent performance in complex domains for all students. If it were successful, students would not only acquire knowledge but they would be able to understand and explain what they know and be able to use what they know to construct solid arguments and solve authentic problems. This kind of teaching is challenging to learn because it involves not only skill and knowledge, but also an unusual commitment both to mathematics and to students. Many teachers, especially at the elementary level, have weak knowledge of mathematics. Moreover, their commitment to mathematics is problematic because what they know and are committed to is often limited to the rules of arithmetic and algebra. They may be committed to student learning, but the focus of that commitment is often limited to getting students to learn to use and apply those rules. A commitment to more ambitious goals would mean being committed to treating all students as sense-makers who have the intellectual confidence to take on the solution of problems they have never seen before. This vision of teaching suggests that teacher learning at all levels must work not only on building skill in teaching practices and the knowledge appropriate to enacting them, but also on building these commitments.

Before directly addressing the question of how ambitious teaching practices in mathematics can be established and maintained in school classrooms, I would like to examine the concept of ambitious teaching and the concept of practice. In the main part of this paper, I will describe the design and implementation of a model for "Learning Teaching in, from, and for Practice" (LTP). In this model, teacher educators work simultaneously on developing teachers' skills, knowledge, and commitments. The model focuses on the *practice* of teaching as a collective endeavor, drawing on common *practices* to continually improve students' performance and understanding. It works on improving teachers and improving teaching simultaneously (Lampert, in press; Hiebert & Morris, in press). The design has three components: a "Cycle of Investigation and Enactment" in which teachers move between interactions with learners and their own learning, "Instructional Activities" which are containers for the practices, principles and mathematics that teachers need to learn, and "Designed Settings" in which professional learning communities link novices with more proficient others to improve student learning.

Ambitious mathematics instruction

Between 1984 and 2000, Lampert conducted extensive research on how teaching could support the engagement of all students in diverse classrooms in learning to do authentic mathematics: i.e. reasoning, conjecturing, proving, problem solving, modeling, and the like. (See for example, Lampert, 1986, 1989, 1990, 2001.) This research was carried out as a design and development project in Lampert's own classroom, creating the teaching and doing it, and then analyzing what went into conducting the kinds of interactions with students that would motivate all of them to engage with serious intellectual work and learn to be come proficient in doing mathematics and understanding what and why they were doing. After articulating the interactive practices involved in this kind of teaching, the next step would be to design and develop ways to get more teachers to engage in this kind of work. Because of my institutional affiliations, the first approach that Lampert took to this project was to improve the skills and knowledge of individual teachers through working with novices in a university based teacher education program. We have come to see that working with individuals is not enough, and to develop and research systems that situate the learning of novice teachers in building and sustaining a practice of ambitious mathematics teaching.

Lampert's first encounter with calling the kind of mathematics teaching I had been investigating "ambitious" was in reading the work of researchers in the Consortium on Chicago School Research at the University of Chicago. Reading about the efforts of CCSR to understand how more ambitious teaching could happen in a large urban district with many failing schools became a key to my thinking about how the "practices" I had been describing might develop as a "practice" of teaching.[2] Chicago is the third most populous city in the US. It has 675 public schools, enrolling more than 435,000 students. It has historically had many schools that failed to educate students, and the highest concentration of underperforming schools has been in neighborhoods where most students are minorities, and poverty rates are high. The Consortium on Chicago School Research (CCSR) was created in 1990 after the passage of the Chicago School Reform Act that decentralized governance of the city's public schools. Researchers at the University of Chicago joined with researchers from the school district and other organizations to form CCSR with the imperative to study this landmark restructuring and its long-term effects. Since then CCSR has undertaken research on many of Chicago's school reform efforts, some of which have been embraced by other American cities as well. Because of the restructuring, researchers could look school-by-school for what made a difference, rather than teacher by teacher. For two decades, several researchers in CCSR have been trying to understand what it is about particular schools that enables them to be successful in establishing and maintaining "intellectually ambitious instruction" and to study the link between this kind of instruction and students' learning. Lampert decided to dig deeper to find out how schools might work to support a practice of ambitious mathematics teaching.

The most important finding of the work of CCSR has been that *school organization* focusing on *instructional guidance* is the key to establishing and maintaining ambitious teaching (Bryk, Sebring, Allensworth, Luppescu, & Easton, 2010). This finding, echoed in many other studies of improvement, implies that we need to think beyond the individual teacher as the force behind improving mathematics teaching. (See for example, Rowen, Correnti, Miller & Camburn, 2009; Stein & Coburn, 2008; Cohen, Gates, Glazer, Goldin, & Peurach, in press) This research finds that successful schools that are able to maintain *high academic ambitions for all students* depend on a dynamic instructional framework that challenges the pervasive norm of private, autonomous classrooms. The autonomy of teachers to determine what and how to teach contributes to high variability in use of effective practices and similarly variable results. In contrast, a shared instructional framework enables a school to manage the work of teaching by tying together the curricular materials and ongoing, diagnostic assessments on the material taught; a shared set of instructional activities; a set of routines that allows teachers to enact these activities; and time and support to continuously improve their teaching.

In 2006, researchers from CCSR defined intellectually ambitious instruction as follows:

We use the term "intellectually ambitious instruction" to refer to a group of related concepts and models of instruction. These include "teaching for understanding," "intellectually ambitious teaching and learning," and "authentic pedagogy." They also include essentials of effective instruction, such as disciplined inquiry and problem solving. These concepts and models are put forth with the idea that instruction must move toward more meaningful intellectual quality and rigor. Instruction should help students develop in-depth knowledge of subject matter, gain higher-order thinking skills, construct new knowledge and understanding, and effectively apply knowledge to real-world situations. (Smylie & Wenzel, 2006, p. 7)

At least in the US, current reforms of mathematics instruction are aiming in the same ambitious direction. Building on the earlier Principles and Standards for School Mathematics

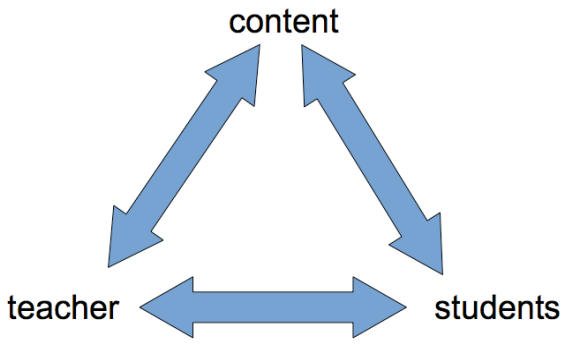
[2] "Practice" may have at least two meanings: 1. The things that teachers do to teach mathematics and 2. The ongoing pursuit of a craft or profession with shared language, tools, and principles to support action. I will say more about the distinction between them in the next section. (Lampert, 2011)

developed by the National Council of Teachers of Mathematics, a set of Common Core State Standards (CCSS) for Mathematics has recently been adopted in all but 5 of the 50 United States. These Standards describe the kind of performance that should be expected of students at all levels. We will list just a few of those performances here to make the connection between the Chicago work on ambitious instruction and what we might consider to be the goals of ambitious mathematics instruction. CCSS expects that at all grade levels:

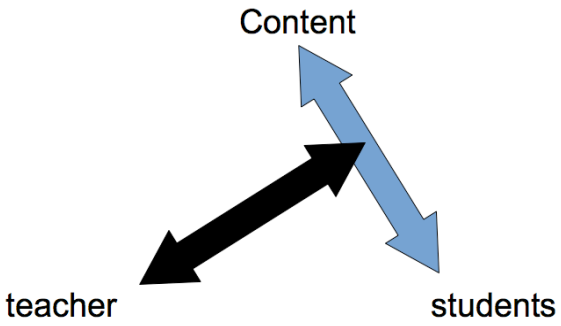
- Mathematically proficient students start by explaining to themselves the meaning of a problem and looking for entry points to its solution. They analyze givens, constraints, relationships, and goals. They make conjectures about the form and meaning of the solution and plan a solution pathway rather than simply jumping into a solution attempt.
- Mathematically proficient students understand and use stated assumptions, definitions, and previously established results in constructing arguments. They make conjectures and build a logical progression of statements to explore the truth of their conjectures. They are able to analyze situations by breaking them into cases, and can recognize and use counterexamples. They justify their conclusions, communicate them to others, and respond to the arguments of others.
- Mathematically proficient students can apply the mathematics they know to solve problems arising in everyday life, society, and the workplace. . . Mathematically proficient students can apply the mathematics they know to solve problems arising in everyday life, society, and the workplace.

Ambitious mathematics teaching in an instructional system

Teaching that results in the kind of learning expected today in the US depends not only on ambitious teachers, but also on students' active engagement in meaningful mathematical work, and on the materials that are used to represent the content to be learned in teacher-student interaction. And it depends on the coordination of these resources around a common goal (Cohen, Raudenbush, & Ball, 2003). In the context of school classrooms, teacher, students, and content are linked in a system, which several scholars of teaching have called "the instructional triangle."



The teacher's role in this instructional system is to assure that students are engaged with content productively, but it is only students who can learn.



It is along this darker arrow that the teacher enacts the mathematical teaching practices that are likely to engage students in the kind of intellectual work that reformers envision.

Teaching practice thus involves several kinds of social and intellectual relationships:

- Teaching is working to make a relationship *with the fundamental ideas and processes in mathematics* in order to figure out how to represent those ideas and processes to students and to assess what understanding students demonstrate in their not-yet-fully-competent performances. These representations and assessments must be done in both preparing for lessons and interacting with students' mathematics during lessons
- Teaching is working to establish and maintain relationships *with and among students*, one-by-one, in small groups, and as a whole class in order to engage them in the work they need to do to learn. These relationships are whole-person-to-whole-person, and they change over time as the teacher and the students change. The teacher works to structure relationships in minute-to-minute exchanges, but also in building consistent norms for individual and group interaction. In order to learn, students need to make relationships with the content and processes to be learned. The teacher's *work* is to make it possible for these relationships to happen, and happen productively, but the teacher cannot learn for the students.
- Teaching is working to establish and maintain relationships *with the people and institutions that surround the students in the class* that are productive of student learning, and helps students to successfully navigate those relationships.

Teaching practices, practicing teaching, and teaching practice

The word "practice" is used in several different ways in relation to teaching. Practice most commonly means *doing* as opposed to thinking about, investigating, or conceptualizing. Doing teaching is not thought-less. It is deliberate activity constructed to achieve a goal, informed by knowing what can support success. Practice can also mean *something that teachers regularly do* to support learning: they design and guide students' independent work, they orchestrate whole class discussions, they evaluate homework, and so on. These are all practices of teaching. They consist of regular routines that enable teachers and students to work together over time in predictable, productive ways. Another way in which practice enters into learning teaching is that teachers get better if they *do something over and over again*. This repetitive activity can lead to learning if there are structures in place for teachers to examine the outcomes of their actions, or if there is feedback based on whether the teacher is enacting principles of high quality teaching. Finally, we imagine that when novices learn to teach, they are joining the practice of teaching. Practices like teaching (and law and medicine and social work) are *collectives with shared commitments* whose members use common tools and

common language to work on problems and their solutions. Members of practices are identifiable by their commitment to common principles that guide their judgment in situations where they face uncertainty.

Recently, it has been used most commonly to refer to the things that teachers do (along that dark arrow) to engage students productively in doing and learning mathematics. A list of such practices is not easy to come up with for two reasons. One is that linking what teachers do with what students learn is not a simple matter (Cohen, Raudenbush, & Ball, 2003; Raudenbush, 2009). The other is the problem of "grain size" and agreement across reformers and educators about what qualifies as a practice (Boerst, Sleep, Cole, & Ball, 2008). Contemporary reformers of teacher education have sidestepped the question of whether practical wisdom or empirical research should determine which "best" practices should be the focus of teacher preparation. Instead, they speak of "core practices" (Grossman, & McDonald, 2008), "generative practices" (Franke & Chan, 2006; Franke & Kazemi, 2001), and "high-leverage practices" (Hatch & Grossman, 2009; Sleep, Boerst, & Ball, 2007). With these terms, researchers and reformers name the strategies, routines, or activities that novices need to learn to do and from which they will continue to learn teaching.

How is a Practice Learned?

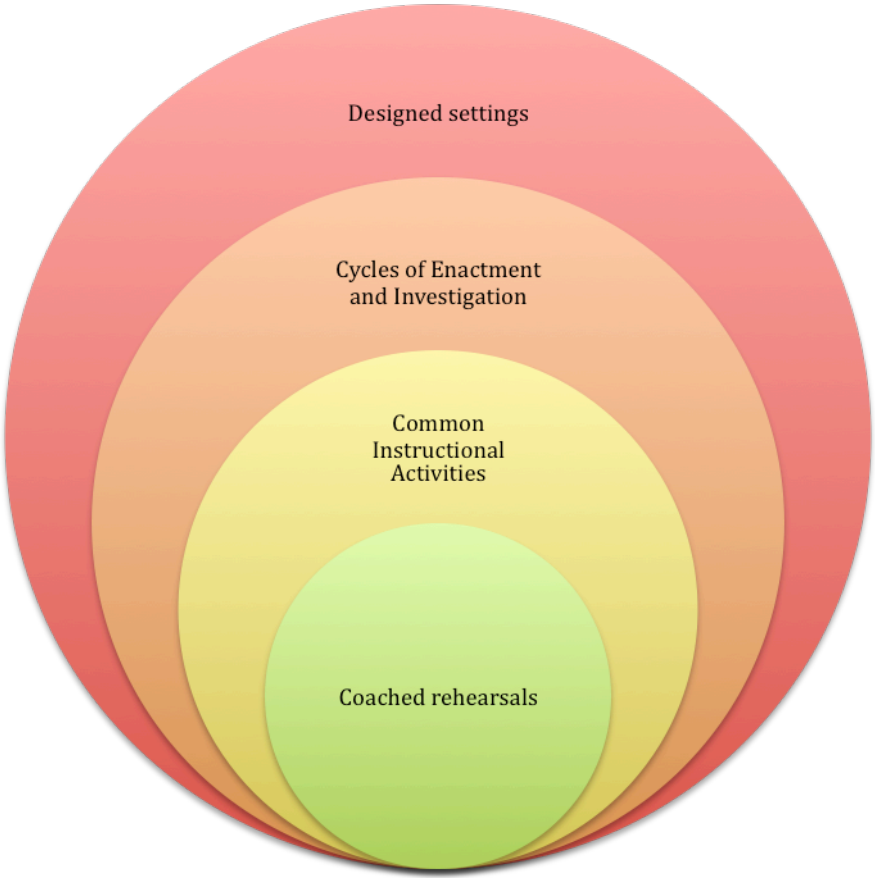
In settings for learning teaching, all four meanings of practice need to come into play. The novice must have opportunities to do teaching and learn from the doing. It is not enough to observe and analyze practice if the goal is to learn to do it. The novice must have opportunities to practice doing things he or she does not yet know how to do in a safe setting. "Safe" here has two meanings: first, it must be safe for the novice to make mistakes, and second, it must be safe for the k-12 students who are learning from the novice.

This means that the teacher educator is responsible for structuring what the novice does so that it is productive of student learning and is also responsible for building a learning environment in which novices are willing and able to take risks. Novices need to do parts of teaching over and over until they become automatic, practicing them both in private and with peers, and receiving targeted feedback from the teacher educator (Dreyfus, 2004). Novices need to rehearse and be coached on what they will try with k-12 learners so that they can iron out some of the rough spots before interacting in actual lessons (Ericsson, Krampe, & Tesch-Romer, 1993). What novices practice should be the core practices that they need to know how to do competently before they enter their own classrooms. Teacher educators can design these core practices into Instructional Activity Frameworks that groups of novices will work on learning together. In this way, core practices can be learned in relation to teaching particular students and particular subject matter, but they can also be the "glue" that holds a group of novices together in a community of practice using common tools to achieve common goals.

Settings for learning ambitious teaching need to be settings where novices come to be members of a Practice of Ambitious Teaching. By participating with others working on the problems that must be addressed if students are to achieve ambitious learning goals, novices are inducted into this Practice (Wenger, 2003; Lave, 1993). In settings designed for novice learning, both teacher educators and more competent teachers are also working on the problems of Ambitious Teaching Practice. In such settings, teacher educators are constantly assessing whether novices, in classrooms, are showing evidence of working on ambitious learning goals with students in ways that are likely to be successful.

Based on these assumptions about the interdependence between learning ambitious practices and participating in the practice of ambitious teaching, the Learning Teaching Practice Project

has been experimenting with an approach to teacher education that includes Coached Rehearsals in which novices practice Common Instructional Activities which are learned through Cycles of Enactment and Investigation which occur inside of Designed Settings (figure). The balance of this paper will illustrate this approach.



Looking in on a Coached Rehearsal Designed to Learn Principled Practices

In order to begin to unpack these elements of the design, we would like to begin by inviting you to listen in on some classroom talk. Although this talk resembles the talk one might hear in an elementary classroom, it took place in a professional education program for novice teachers. Roberta, a novice teacher, is standing up in front of the whiteboard and begins to talk to a group of her peers and a teacher educator who are seated in front of her on the rug. Hala Ghousseini is the teacher educator whose work is represented here.[3] Roberta speaks as if her audience is a group of 7-year-old children, but she is also making her practice public to a group of teaching peers.

Roberta	We are going to work on a series of addition problems again…		
	You are so far away. [Moves closer to the group sitting on the rug.]		

[3] Co-author Hala Ghousseini is referred to in the transcript by her first name, Hala. All other participants are referred to by first name pseudonyms.

	You are so far away. [Moves closer to the group sitting on the rug.]		
	[picks up a marker and turns to write on the white board, puts it down and picks up another]	Hala	I think that blue one might be a better marker for you. Just anticipating a problem.
Roberta	forty-three plus ten. [Writes 43 + 10 = on the whiteboard] You can do this in your head, or you can do it on your paper. Quiet thumb when you know what forty-three plus ten is. Hala?		
Hala	Fifty-three.		
Roberta	Anyone have a different answer? [Waits] Everyone agrees that its fifty-three? Dorothy how did you get fifty-three?		
Dorothy	I just know that forty-three plus ten is fifty-three. So you just add it.		
Roberta	You were adding ten. [Goes to the white board and draws a number line and locates 43 at a point on it] If we do this on the number line, what would I do after forty-three? What would our next step be on the number line? [Waits] Hala?		
Hala	Make a jump of ten.		
Roberta	[Silently represents the jump of ten on the number line on the whiteboard] If we make a jump of ten, Allen, where would we land?		
Allen	Fifty-three.		
Roberta	[Silently labels the point at the end of the jump with 53] So forty-three [points to 43]		

	plus ten [runs her hand along the representation of the jump] is fifty-three [points to 53 and turns full frontal to the class].		

Roberta is acting the teacher in this classroom, and Hala, Dorothy, and Allen are acting the students. The content of their talk--the addition of two-digit numbers and the representation of that addition on an "open number line"--might lead us to place this talk in a primary school classroom. But Hala's seemingly simple interjection about using the blue marker, together with her labeling what she says as "anticipating a problem," suggests that there is something else going on here. Although it seems almost trivial, having a marker that works to represent students' strategies on the whiteboard so they can be interpreted in terms of a mathematically important representation is the kind of small but important "problem of practice" the beginning teachers need to attend to. Developing the habit of checking for working markers will make their work on harder things like representing student thinking go more smoothly. Hala, the teacher educator here, has raised this problem to the public sphere, and all of the novices in the group are challenged to pay attention to it.

Learning the practice of noticing

Hala's next talk move begins to demonstrate the distinction between her contributions (as teacher educator) to the talk and those of the novice teachers who participate as other students. She calls upon everyone to *notice* a particular mathematical teaching practice. By asking these novices to "notice" what Roberta has done, the teacher educator enables the identification of something important about a classroom situation, she makes connections between a specific interaction and the broader principled practice of "not getting stuck on the same student," and she encourages the novices to use what they know abut the context to make sense of what Roberta has done (vanEs & Sherin, 2002). There is more to noticing as it is practiced in the context of investigating teaching than simply calling attention to the "noticed-thing" (Sherin & Star, 2011). Hala makes the specific act into an *example* of what an ambitious mathematics teacher needs to do, linking enactment to the investigation of teaching practices.

		Hala	[Turning to the novice teachers, acting as "students" she is sitting among] Did you notice what happened? She reiterated the problem, forty-three plus ten, fifty-three. I gave the first answer, but she asked Dorothy, "How did you figure out fifty-three?" That's an example of not getting stuck on the same student who always gives that answer. Nice.

Hala is managing an activity structure we call "deliberate practice in rehearsals." What she does is designed to position novice teachers as participants in the collaborative work of solving

the kinds of problems of practice that arise when one is attempting to teach mathematics ambitiously in school classrooms. The exchanges between the teacher educator and the novices that occur outside of the enactment of the lesson are in the right hand two columns of the transcript, and the enactment of the lesson by the novice with the teacher educator and novice peers acting as students is in the left hand columns. They are rehearsing and reflecting upon what might happen when they will teach this lesson to children.

In the talk move transcribed above, the teacher educator is calling the attention of a group of novices to a teaching move made by one of their peers who is making public her efforts to work on the problems of practice associate with a particular mathematical activity. Roberta, Dorothy, and Allen are novice teachers who are three weeks into a teacher preparation program. Together with four other interns, they are participating in the deliberate practice of an activity they will all be teaching in the next hour.

Roberta	[Turning to the board] Let's do forty-three plus thirty. [writes 43 + 30 =] This time I want you to do it on your paper, on the open number line. Use that to figure it out. And when you have figured it out, just show a quiet thumb. [waits] Jill?		
Jill	Um. Seventy-three.		
Roberta	[writes 73 next to 43 + 30 =] Anyone have a different answer? Alexandra?		
Alexandra	Sixty. Three.		
Roberta	[writes 63 next to 73] Any other answer? [waits] Alexandra, how did you get your answer?		
Alexandra	Um, I knew that three and three was six, and then, oh, sixty-four?		
Roberta	So are you revising your answer?		

Alexandra	Yeah.		
Roberta	You want to make it sixty-four instead? [Erases 63 and writes 64 in its place] So you looked at these two threes? [pointing to the three in 43 and the three in 30] And you said three and three is six?		
			Okay um, let's see [pointing to the 64] The other thing this Can I just . . .
		Hala	No that's a good one

Learning the practice of Eliciting-and-Responding

In this exchange with Alexandra, Roberta was relying on routines of ambitiously productive classroom "math talk" to elicit and respect Alexandra's thinking (Chapin, O'Connor, & Anderson, 2003). Alexandra expresses the idea that she should add the three in 30 to the three in 43. This is a moment of considerable challenge for a teacher. In terms of conventional arithmetic, 43 + 30 *is not* equal to 64. At this moment, the ambitious teacher would seek to respond to the student who made this assertion not with a correction, but with a question that gives her more information about what the student does and does not understand and with some new information that would respect the student and enable her to rethink her assertion and change her mind.

The rehearsal is structured to enable the work on what to do next a collaborative investigation with the teacher educator in the role of more knowledgeable other. When faced with the challenge of *what to do with* the thinking she has elicited, the novice Roberta breaks out of the teaching she is enacting and begins a more investigative dialogue with the teacher educator, Hala, who responds with a small intervention. This dialogue occurs in the company of a group of other novices, giving them an opportunity to learn along with the novice who is being directly coached.

The teachers' next move needs to both further investigate what Alexandra is thinking, and infuse her thinking with some representation of the meaning of the numbers she is supposed to be adding. She needs to know not only how to "support" a students' thinking, but how to "elicit" and "respond" to it in order to advance their learning. The latter phases of this complex suite of practices have been particularly challenging for reformers and teacher educators to advance (Jacobs, Lamb, Philipp, & Schappelle, 2011; Fraivillig, Murphy, & Fuson, 1999).

Hala, the teacher educator, has stopped the action briefly to indicate that the group will now be working together to figure out what to do with Alexandra's response. She labels it a "good one" because she has seen such procedures enacted by the children she observes in classrooms every day, and she knows that this presents a "problem of practice" that the novices she is working with might encounter when they teach this lesson in the coming hour.

Roberta proceeds to act on her hypothesis about what to do next, and then, in a way that leaves Roberta as the author of the action she wants to take ("if *you* want to"), the teacher educator scaffolds her next move, standing right next to her and acting the teacher. Roberta articulates her acceptance of the suggested move and Hala returns to acting the student by changing her physical position.

Roberta	[Pointing to the 3 in 43] This is in the one's place and this [pointing to the 3 in 30] is in the ten's place.		
		Hala	Or if you want, Roberta [stands up and walks to stand next to Roberta at the board], you can ask, "How many groups of ten are we adding to forty three?"
		Roberta	Okay, so let me ask that. [Hala sits down close to Roberta]
Roberta	How many groups of ten are we adding to forty-three? [pointing to 43]		
Alexandra	Three.		

Learning the Practice of Representing Mathematics and Student Thinking AND the Practice of Orienting Students to One Another's Thinking

Having ascertained that Alexandra can say how many tens are in thirty, Roberta experiments with a representation that she thinks might scaffold a mathematics learner with an idea like Alexandra's to move into the competent performance of double-digit addition. She then checks in with the teacher educator, using the pronoun "we" to indicate at least that she and the teacher educator are working on this together. Her "we" may also include all of the other novices in the group. The teacher educator responds with a suggestion, couched in a grammatical form ("could") that again positions Roberta as the one who is responsible for what she is going to do next. She points out that Jill's response, which preceded Alexandra's is a tool in the teaching environment that Roberta could draw on in order to move the lesson forward. Roberta does not just mechanically follow Hala's suggestion. Instead she does some thinking about it in interaction with Hala.

Roberta	So thirty is: [represents a decomposition of 30 into 10 + 10 + 10]		
		Roberta	[looking at Hala] Okay, so basically I can just kind of go on, right? We are not really going to deal with her strategy, we are going to come back to her.
		Hala	Yeah, and actually, if you had asked [turns to group] who said seventy-three? Jill. If you had asked Jill how

			she figured it out, you could come back to Alexandra, and you could use Jill ... Ask Jill and see how we are going to work it out to support Alexandra.

Hala confirms the appropriateness of Roberta's use of the decomposition representation that Roberta tried with Alexandra, and gives Roberta ownership over it, referring to it as "this decomposition that you did."

		Roberta	Okay, so with Alexandra, I did say, I'm understanding what you did, let's move on to someone else.
		Hala	So there's a way you can work with Alexandra to have her see that what she did needs revision.
		Roberta	Okay.
		Hala	By this decomposition that you did.
		Roberta	Okay.
		Hala	That's going in the right direction, to show her. What you did [indicates the shape of the decomposition with her hands]

After this "investigation" of the nature of the problem and an appropriate solution, the teacher educator invites the novice to cycle back into her approximation of enactment. She turns to Jill as she says, "We'll see what you did" involving Jill as a collaborator in producing the practice that everyone is to learn from.

		Hala	Why don't you go to Jill and we'll see what you did.
Roberta:	Okay Jill, How did you figure it out?		
Jill:	Forty-three, fifty-three, I made three jumps so forty three, fifty-three		
Roberta:	Over here on the number line? You did this jump? [runs her hand along the already recorded jump from forty-three to fifty-three on the open number line]		

Roberta's actions in response to Jill are both teaching Jill about the number line representation, and teaching Alexandra and the rest of the class about place value more broadly. This kind of responsive mathematics teaching is designed into the Instructional

Activity Framework of "Strings." A learner can use a strategy that became public in the previous addition (43 + 10 = 53) to figure out the next addition: 43 + 30).

Jill:	And then to sixty-three and then to seventy-three.		
Roberta:	[represents a jump of ten and records 63, then does the same to 73]		

Learning the Practice of Linking Meaning with Computational Proficiency

Roberta then uses another routine practice to give more students/peers (Suri, Dorothy, Andy) access to talk about the representation, engaging them in ways that obligate them to attend to and respond to both her and Jill while learning both teaching and mathematical talk. With these "students" Roberta engages in an enactment of teaching that expects students to master algorithms and symbolic tools, but also to be able to reason with the ideas and tools of others. Suri and Dorothy have the opportunity here to voice the meaning of the representation while attending to what Jill did to complete the addition. By talking in the role of students, these novice teachers are experiencing a kind of mathematical dialogue that they are unlikely to have seen or participated in very often in schools.

Roberta:	Suri, how did she get from fifty-three to sixty-three?		
Suri:	She jumped ten.		
Roberta:	[labels the jump with +10] And Dorothy, how did she get from sixty-three to seventy three?		
Dorothy:	She jumped ten.		
Roberta:	[Labels that jump with +10]		
Roberta:	Allen why do you think she jumped these three tens? [running her hand over the jumps]		
Allen:	It's like adding thirty.		
Roberta:	How is it like adding thirty?		
Allen:	[doesn't respond]		

This student/peer presents Roberta with another problem of practice: What is the teacher to make of a student who doesn't respond to a question intended to deepen her understanding of his understanding? This is a problem both of interpretation and pedagogy, as Roberta must move the lesson along while also attending to Allen. Roberta decides to make a "telling" move. The teacher educator gives a suggestion for an alternative, but directs Roberta's attention back to Alexandra's conjecture that 43 + 30 = 64 because 3 + 3 is six.

Roberta:	There are three groups of ten in thirty. So she said, here's one group of ten, two groups of ten, three groups of ten.		
		Hala	Very nice. If Allen is quiet and doesn't even get that, you can go back and say, how many groups of ten did we add? Three groups of ten. Now lets go back to Alexandra.

Learning to Remain Committed to Ambitious Teaching

Roberta's reaction to Hala's refocusing is expressive of the problems faced by novice teachers who believe in teaching ambitiously, but have only traditional moves in their pedagogical repertoire when students make errors. Roberta has used all the discussion routines she has been taught, and so she jokingly expects that Alexandra should "get it now".

Roberta	Okay. Alexandra. Ummm. [Jokingly, but assertively] Do you get it now? [Laughter]		

She pauses, seemingly trying to think of something to say ("Okay. Alexandra. Ummm.) and then advances toward Alexandra and asks "Do you get it now?" with a tone in her voice that expresses her frustration and wish not to take "no" for an answer. Recognizing a shared problem of practice, the group laughs and shows though their body language that they identify with Roberta.

After a short exchange facing Roberta, Hala turns from Roberta to the group, reminding them that it is everyone's obligation to be thinking about what Alexandra "doesn't get."

		Hala	[To Roberta] So what is Alexandra... So let's think about this.
		Roberta:	So I really don't know that much about her strategy.
		Hala:	That's right. So the point here is not that her strategy is important or what. It's that we want her to understand.
		Roberta:	And I want her to verbalize that.
		Hala:	[To Roberta] You want her to understand. [To the group] What is it that Alexandra doesn't get?
		Roberta	But, also, she really, she's trying to do this one, where you start at forty, isn't she? Forty and then adding the

			three tens and then the three?
		Hala	[Facing toward Roberta] She's trying to do that? You are saying? Alexandra?
		Roberta	I am wondering if she is, because she's trying to separate them, let's add the tens first and then the ones. Although she's adding a ten and a one, so I am not quite sure. I'm not ... I really ... I'm not quite sure, but I am wondering if I try to do groups of ten here [pointing to the decomposition of 30 into 10 + 10 + 10] and groups of ten here [pointing to the three jumps of ten on the number line], if she's just not going to see it because
		Hala	So if you have this hypothesis that's what she is trying to do, you are going to have to ask her again to find out why did you add your numbers like this.

Although the teacher educator talks only to Roberta in the above series of exchanges, she obligates the other novices to think about the problem Roberta is confronting, and because their exchanges occur in front of the novices who have similar problems themselves, what Roberta does next is not only her own idea about how to proceed—she is trying this out for the group. Unlike more conventional academic talk, or the talk in professional education for teaching that occurs between a single "mentor teacher" and the "student teacher" in her classroom, this talk "is accountable to the community cuts across disciplines and creates environments in which students have time (and social safety) to formulate ideas, challenge others, accept critique, and develop shared solutions" (Michaels, O'Connor, & Resnick, 2007, p. 286).

The teacher educator here gives language and justification to the practices that the novice teachers are trying to learn to do. Referring to Roberta's interpretation of what Alexandra "is not going to see" as a "hypothesis," Hala suggests ways in which Roberta might gain more evidence to support or challenge her hypothesis, positioning her again as the author of her practice. The teacher educator engaged her in an extended "accountable talk:" simultaneously accountable to knowledge of mathematics for teaching as she ponders how to use the representations, accountable to the standards of reasoning that have been established in this professional education environment, namely "wondering" what a student is thinking based on the evidence she has, and not jumping to conclusions too quickly, *and* accountable to the community of learners of which she is a part, using the tools in the environment to safely formulate and exchange ideas, accept critique and develop a shared solution. Michaels *et al*. argue that "Combining the three aspects of Accountable Talk is essential for the full development of student capacities and dispositions for reasoned civic participation" (ibid.). Their concept of civic participation has much on common with the idea of "intellective character" developed by the psychologist Edmund Gordon.

Roberta	So Alexandra, when you did the problem, what did you do first?		
Alexandra	First I saw that there was a three plus three and I knew that that was six. See how the threes are right next to each other?		

Learning the Practice of Supporting a Student's Thinking while Leaving the Intellectual Work to the Student AND Learning Mathematics

Alexandra has given Roberta more information about what she is thinking. It seems to be important to her that "the threes are right next to each other." Roberta supports Alexandra by acknowledging her thinking, and then Hala and Roberta proceed to jointly construct the next set of moves in the lesson.

Roberta:	Yup.		
		Hala	So Roberta, what's the question to ask her then, when she says that?
Roberta:	So How many groups of ten are there?		
		Hala:	So she said she added the three plus the three. How does
		Roberta:	but its no longer a three. There are three tens here, so its like
		Alexandra [speaking to Roberta as a fellow-teacher]:	Couldn't you go ten twenty, thirty, forty, fifty
		Roberta:	So we could count our tens.
		Hala:	So I see that you were going somewhere by asking her how many groups of ten are in forty-three. What were you trying to do?
		Roberta:	I was trying to get her to see that this three is not a three, but we already said that here, so we have tens here and we have tens here [pointing to the decomposition and the jumps on the number line]

		Hala:	So what would be the next thing to ask her to do then, to ask her how many groups of ten are here? [pointing to the decomposition of thirty] Three. How many here? [pointing to the decomposition of forty] Four. So how many groups of ten do we have in all? To kind of get at that confusion she has
		Roberta:	about place value
		Hala:	Yes.

In this rehearsal, the teacher educator has given a group of novices several different kinds of opportunities to learn. By developing their social capacities for collaboration around problems of ambitious teaching practice, she contributes to their learning a new identity, with a possibility of growing their commitment to ambitious teaching. By setting up the situation as she did, he gives the novice an opportunity to deliberately "practice" many "practices." Between four and eight novice teachers rehearse for a math lesson every day (and a similar number rehearse for a literacy lesson). In a "class" of 25 novices, in the course of a week, everyone will have the kinds of relationships with a teacher educator that we saw here between Roberta and Hala at least twice, and often more. The competence of the novice teachers is constructed in interactions around ambitious practice and the challenges it poses to teachers.

The greatest part of analytic talk during the 10 minutes of deliberate practice represented in the transcript above is between the teacher educator, Hala, and the novice teacher, Roberta. The exception, which is an important one, is when we see Alexandra playing two different roles. As a peer novice, she suggests to Roberta what she might do to productively interact with a student who needs to learn place value. As a learner who was acting in a way that neglects place value when adding two digit numbers, she gives Roberta the opportunity to rehearse what she might do with such a student when she encounters this situation in a second grade classroom. We see Roberta being treated by the teacher educator as a learner and as a teaching colleague who is entitled, perhaps even obligated, to present questions that challenge information presented by the teacher educator. The other novice teachers in this group are attentive and responsive to each other in the way that they act as students so that Roberta can work on something of interest to all of them. Alexandra poses Roberta with problems of practice that are of daily concern to everyone given the students they are trying to teach and their effort to become ambitious mathematics teachers: "What indicates an understanding or lack of understanding of place value?" and "How do I as a teacher respect the learner as a sense-maker and also improve her mathematical proficiency?" *And* Alexandra feels entitled to offer an alternative solution to the second problem.

Context for this Rehearsal

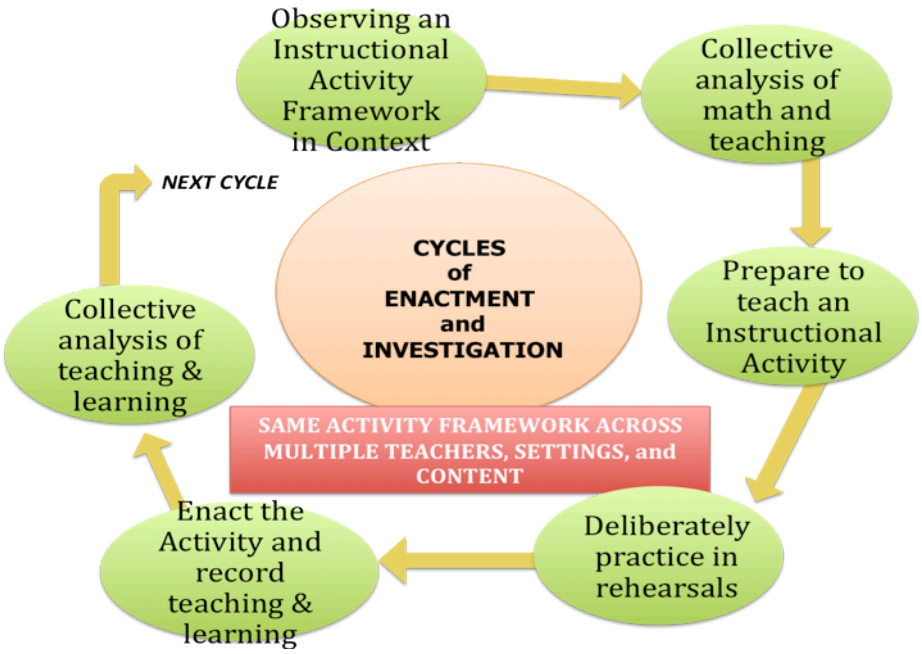
The rehearsal described here is an instance of a teacher education interaction structure designed to enable teaching novice teachers in, from, and for practice. It is a situation in which learning teachers can enact an "approximation" of actual practice as a site for investigating how principles, practices, and knowledge can combine in interaction with students (Grossman, Compton, Igra, Ronfeldt, Shahan, & Williamson, 2009). Grossman and colleagues argue that "Approximations of practice also enable teacher education to address

the gap between the practices we advocate in teacher education and those that novices are likely to see in the typical school setting." (Grossman & McDonald, 2008, p. 7) The teaching in an approximation can be stopped, discussed, and revised, unlike real-time classroom teaching, and the novice teacher who is enacting the approximation can interact, both with the teacher educator and with her peers to understand and to strengthen her commitment to ambitious teaching.

The rehearsal we have described occurs regularly in the model we have developed. At our three sites, teacher educators have worked with novices in settings that support learning teaching in repeated Cycles of Enactment and Investigation (CEI), where novices repeatedly go back and forth between investigating teaching and enacting it (Grossman & McDonald, 2008). Depending on the design of the setting, these cycles can occur daily, weekly, or monthly over an extended period of time. Through such repeated cycles, the teacher educator can move deliberately with novices through a curriculum of practices, principles, and mathematics, increasing the complexity of the work over time. The design of the elements of the cycle assume that in doing ambitious teaching and analyzing it, novices learn through building an iterative and interactive relationship between knowledge and principles, on the one hand, and practical tools, on the other (Grossman, Hammerness, & McDonald, 2009).

What we intend for novice teachers to learn across our three sites (the "intended curriculum") consists of a set of principled practices of high quality instruction used in the service of supporting the development of children's understanding of content typical of early elementary grades (e.g. place value with whole numbers and procedures and meanings for whole number and decimal computation). The set of instructional practices draws on what is known from research in the areas of student thinking and teacher expertise about teacher practices that support students' development of mathematical ideas (See for example, Donovan & Bransford, 2005). These practices include preparing for instruction, assessing students' understanding, eliciting and responding to student reasoning, representing math concepts and students' strategies/reasoning. The principles that guide the implementation of these practices are conceived with the aim of maximizing students' access to learning important mathematics with meaning. These principles include teachers' commitment to treating students as sensemakers, designing instruction for all children to do rigorous academic work in school, and attending to students as individuals and learners.

A Cycle of Enactment and Investigation (CEI) in which novices learn principled practice (see figure below) begins with a class of prospective teachers *observing* an enactment of an "Instructional Activity" (Lampert & Graziani, 2009) in a classroom context, either live or on video. Guided by the teacher educator, the class then *collectively analyzes* the principles, practices, and mathematics intentionally embedded in the teaching they have observed and how they are used to address the particular teaching problems that arise. The next stage in the Cycle involves beginners in *preparing to teach* the same Instructional Activity to particular children in particular classrooms using the principles, practices, and mathematics they have studied in the context of the demonstration. After preparing, selected prospective teachers *publicly rehearse* their plans for enacting the activity in front of their peers and receive targeted feedback from the teacher educator. (This is the phase in the cycle we described above.) Next, beginners *interact with students, doing the activity* they have rehearsed and video-recording their work. Another investigation by the group follows the individual enactments. The teacher educator again guides a collective analysis, but this time, *using records of prospective teachers' practice to examine how the principles, practices, and mathematical content designed into the activity played out in a particular situation*.



The CEI is designed to incorporate closer and closer approximations of actual teaching practice through which novices can "replay" interactions and learn from feedback (Horn, 2005). The repeated engagement of beginners in such cycles of work constitutes the "deliberate practice" critical for the development of adaptive competence (Ericsson, Krampe, & Tesch-Romer, 1993). Over multiple enactments and analyses, the beginners learn which aspects of an Instructional Activity remain relatively constant and what parts of their performance need to be adjusted to what students know, what they are learning, and what they still need to understand and be able to do, moving through levels of developing adaptive expertise (Dreyfus, 2004; Berliner, 1994).

Discussion

Learning *for* practice means that what one learns must be useful and usable when it comes time to be the one who is fully responsible for students' learning in classrooms. We would argue, based on both theories of adult learning and research on learning teaching, that learning for practice occurs in conjunction with learning *in and from* practice. Learning *in* practice means learning in the company of other practitioners with similar goals and similar principles. Learning *from* practice entails planning for interactions with students based on one well-grounded hypothesis or another about how particular children will learn particular content, and then examining what happens when one takes action based on one or another hypotheses. Learning in and from practice together is often referred to as "learning from experience," in which one does not learn from simply doing something, but from investigating the relationships between planned actions and outcomes (Yanow & Tsoukas, 2009; Schön, 1983, 1987). Interpretations of these relationships, and the causal attributions that accompany them, are shaped by interactions with other practitioners (Cook & Yanow, 1996).

We know that the motivation to do things differently is as important to ambitious practice as knowledge and skill, and that motivation depends on the social circumstances in which one learns and develops an identity as a practitioner (Cole, 1995; Rogoff, Baker-Sennet, Lacasa, & Goldsmith, 1995). US schools are permeated with the unambitious belief that not everyone

can do serious mathematics (Delpit, 2012). What novices "learn from experience" in these settings reduces their ambitions to teach all students to perform complex mathematical work. Researchers have found that a shift away from the common assumption that serious mathematics is not for everyone can be affected by membership in a community of practice with others who have similarly ambitious aims, use common tools, and share common interpretations of problems (Stein & Coburn, 2008; Bryk, Sebring, Allensworth, Luppescu, & Easton, 2010). Learning in the company of other teachers who value and investigate student work, treat students like sense-makers, and adapt teaching to learning has resulted in experienced teachers being able to maintain high expectations of all students and enact practices that accomplish high level academic learning goals (Horn & Little, in press; Gutiérrez, 1996; Struchens, Quander, & Gutiérrez, 2011).

In a professional culture with shared expectations of students, novices are able to do approximations of ambitious teaching in scaffolded settings. They can safely try out managing the complexities of interaction with students and content with the support of more knowledgeable others who have the same goals and use the same tools to accomplish them (Rose, 2006). Since not everything can be known about how to teach a particular student or group before engaging with them in instruction, these interactions are an occasion for novices to "test the waters," drawing on routines and knowledge to build a collection of ideas, images, examples and actions they can later draw upon to construct more deliberate actions (Dewey, 1933). In the company of others with similarly high expectations of students, novices can learn to interpret their experiences in ways that support their maintaining ambitious goals.

Responsive teaching in both immediate and longer term scenarios draws on teachers' repertoire of practices and knowledge of students and mathematics, but it also depends on context sensitive judgments about what to do next, in what Cook and Brown (1999) call a "generative dance" between knowledge and knowing, where knowing is action in a context. In writing about how to foster teachers' opportunities to learn the new ideas and practices required to carry out ambitious reforms, Stein and Coburn similarly call attention to the importance of opportunities for "meaning making on the shop floor" (2008). Such improvised work is not simply created in the moment. It involves extended preparation in what Yanow (2001) calls "the rules of engagement" which are learned in interaction with others, observing others, and creating a "mutual, collective, interknowing" (Lampert & Graziani, 2009).

One's sense of what one can and should do as a teacher is not a wholly private construction. Becoming an *ambitious teacher* means working publicly in an environment with other ambitious teachers. Professional as well as personal identity is formed from an amalgamation of how we see ourselves and how others see us, and those perceptions are formed and expressed in social interaction (Waller, 1932, Mead, 1934). How a teacher acts in front of others expresses her sense of identity; how others then react to her influences the development of her identity (Chan, 2010). If the relationships that occur among teachers and teacher educators in schools occur with the same set of people, in a public setting, daily, and over a long period of time, they can offer multiple occasions for self-expression and have a strong potential to influence self-perception and the will to act ambitiously. What teachers are willing to do with one another and with their students in the public space of a school constrains their capacities to improve and change. If a teacher does not see himself or herself as "ambitious" in the way we have been using the term here, it seems unlikely that she will use ambitious teaching practices. Even if a teacher were to acquire the skills and knowledge to be ambitious, unless she also identified herself as ambitious, the chances that such learning might ever be used in public would probably be slim.

References

Berliner, D. C. (1994). Expertise: The wonder of exemplary performances. In J. N. Mangieri & C. C. Block (Eds.), *Creating powerful thinking in teachers and students* (pp. 161-186). Fort Worth, TX: Holt, Rinehart & Winston.

Boerst, T., Sleep L., Cole, Y., & Ball, D. (April 8, 2008). *Learning Practice through Practice: Design considerations of a practice-based course*. Presentation made at the NCTM Research Presession, Salt Lake City, UT.

Bryk, A. S., Sebring, P. B., Allensworth, E., Luppescu, S., & Easton, J. Q. (2010). *Organizing schools for improvement: Lessons from Chicago.* Chicago: University of Chicago Press.

Cengiz, N., Kline, K., & Grant, T. (2011). Extending Students' Mathematical Thinking During Whole Group Discussions, *Journal of Mathematics Teacher Education*, published on line 08 March 2011.

Chan, A. (2010). Identity and Practice: Preservice Teacher Learning within a Practice-Based Mathematics Methods Course (Doctoral dissertation, University of California at Los Angeles).

Chapin, S., O'Connor, C., & Anderson, N. C. (2003). *Classroom Discussions: Using Math Talk to Help Students Learn, Grades K-6*. Sausalito, CA: Math Solutions.

Cohen, D. K., Gates, K., Glazer, J., Goldin, S., & Peurach, D. (in press). *Improvement by Design*. Chicago: University of Chicago Press.

Cohen, D. K., Raudenbush, S. W., & Ball, D. B. (2003). Resources, instruction, and research. *Educational Evaluation and Policy Analysis, 25,* 119-142.

Cole, M. (1995). The Supra-Individual Envelope of Development: Activity and Practice, Situation and Context. *New Directions For Child Development*, *67,* 105-118.

Cook, S. D., & Yanow, D. (1996). Culture and organizational learning. In M. D. Cohen, and L. S. Sproull (Eds.), *Organizational* Learning (pp. 430-59). Thousand Oaks, CA: Sage.

Cook, J., & Brown, J. S. (1999). Bridging epistemologies: The generative dance between organizational knowledge and organizational knowing. *Organization Science, 10*(4), 381-400.

Delpit, L. (2012). Multiplication is for White People: Raising Expectations for Other People's Children. The New Press.

Dewey, J. (1933). *How We Think*. Chicago: University of Chicago Press.

Donovan, M. S., & Bransford, J. D. (Eds.) (2005). *How Students Learn: Mathematics in the Classroom*. Washington, DC: National Research Council.

Dreyfus, S. E. (2004). The Five-Stage Model of Adult Skill Acquisition. *Bulletin of Science, Technology & Society*, *24*(3), 177-181.

Ericsson, K. A., Krampe, R. T., & Tesch-Romer, C. (1993). The role of deliberate practice in the acquisition of expert performance. *Psychological Review, 100*(3), 363-406.

Foster, D., & Poppers, A. (1999). Using formative assessment to drive learning. The Silicon Valley Mathematics Inititiative: A Twelve Year Research and Development Project. Palo Alto, CA: The Noyce Foundation.

Fraivillig, J. L., Murphy, L. A., & Fuson, K. C. (1999). Advancing Children's Mathematical Thinking in Everyday Mathematics Classrooms, *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 148-170.

Franke, M. L., & Chan, A. (2006). *High leverage practices*. Retrieved April 16, 2009, from http://gallery.carnegiefoundation.org/insideteaching/quest/megan_loef_franke_and_angela_grace_chan_high.html

Franke, M. L., & Kazemi, E. (2001). Teaching as learning within a community of practice: Characterizing generative growth. In T. Wood, B. Nelson, & J. Warfield (Eds.), *Beyond classical pedagogy in elementary mathematics: The nature of facilitative teaching* (pp. 47-74). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Fraivillig, J. L., Murphy, L. A., & Fuson, K. C. (1999). Advancing children's mathematical thinking in everyday mathematics classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 148-170.

Grossman, P., & McDonald M. (2008). Back to the future: Directions for research in teaching and teacher education. *American Educational Research Journal, 45*,184-205.

Grossman, P., Hammerness, K., & McDonald, M. (2009). Redefining teaching, re-imagining teacher education. *Teachers and Teaching, Theory and Practice, 15*(2), 273-289.

Grossman, P., Compton, C., Igra, D., Ronfeldt, M., Shahan, E., & Williamson, P. (2009). Teaching practice. A cross-professional perspective. *Teachers College Record.*

Gutiérrez, R. (1996). Practices, beliefs, and cultures of high school mathematics departments: Understanding their influences on student advancement. *Journal of Curriculum Studies, 28*, 495–530.

Gutiérrez, R. (1996). Practices, beliefs, and cultures of high school mathematics departments: Understanding their influences on student advancement. *Journal of Curriculum Studies, 28*, 495–530.

Hatch, T., & Grossman, P. (2009). Learning to look beyond the boundaries of representation: Using technology to examine teaching (Overview for a digital exhibition: Learning from the practice of teaching). *Journal of Teacher Education, 60*(1), 70-85.

Hiebert, J., & Morris, A. (in press) Teaching, rather than teachers, as a path toward improving classroom instruction. *Journal of Teacher Education, 63*(2).

Horn, I. S. (2005). Learning on the job: A situated account of teacher learning in high school mathematics departments. *Cognition and Instruction, 23*(5), 165-205.

Horn, I. S. & Little, J.W. (in press). Attending to problems of practice: Routines and resources for professional learning in teachers' workplace interactions. *American Educational Research Journal.*

Jacobs, V. R., Lamb, L. C., Philipp, R. A. & Schappelle, B. P. (2011). Deciding How to Respond on the Basis of Children's Understandings. In M. G. Sherin, V. R. Jacobs, A. Randolph, & P. Routledge (Eds.), *Mathematics Teacher Noticing*.

Lampert, M (in press). Journal of Teacher Education.

Lampert, M., Boerst, T., & Graziani, F. (2011). Organizational assets in the service of school-wide ambitious teaching practice. *Teachers College Record, 113*(7), 1361-1400.

Lampert, M. (2010). Learning teaching in, from, and for practice: What do we mean? *Journal of Teacher Education, 61*(1-2), 21-34.

Lampert, M., Beasley, H., Ghousseini, H., Kazemi, E., & Franke, M. (2010) Using designed instructional activities to enable novices to manage ambitious mathematics teaching. In M.K. Stein & L. Kucan (Eds.), *Instructional Explanations in the Disciplines* (pp. 129-141). NY: Springer.

Lampert, M., & Graziani, F. (2009). Instructional activities as a tool for teachers' and teacher educators' learning in and for ambitious practice. *Elementary School Journal, 109* (5), 49-509.

Lampert, M. (2001) *Teaching Problems and the Problems in Teaching*. New Haven, CT: Yale University Press.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal, 27*(1), 29-64.

Lampert, M. (1989). Choosing and using mathematical tools in classroom discourse. In J. Brophy, (Ed.), *Advances in Research on Teaching,* Vol. 1 (pp. 223-264). Greenwich, CT: JAI Press.

Lampert, M. (1986). Knowing, doing, and teaching multiplication. *Cognition and instruction, 3*, 305-342.

Lave, J. (1993). Situating learning in communities of practice. In L. B. Resnick, J. M. Levine, & S. D. Teasley (Eds.), *Perspectives on socially shared cognition* (pp. 63-84). Washington, DC: American Psychological Association.

Mead, G. H. (1934). *Mind, Self, and Society*, ed. Charles W. Morris. Chicago: University of Chicago Press.

Michaels, S., O'Connor, C., & Resnick, L. (2008) Deliberative Discourse Idealized and Realized: Accountable Talk in the Classroom and in Civic Life. *Studies in the Philosophy of Education, 27*, 283-297.

Raudenbush, S.W. (2008). Advancing educational policy by advancing research on instruction. *American Educational Research Journal, 45*(1), 206-230.

Rogoff, B., Baker-Sennet, J., Lacasa, P. & Goldsmith, D. (1995). Development Through Participation in Sociocultural Activity. *New Directions For Child Development, 67,* 45-65.

Rose, M. (2006). "Our hands will know": The Development of Tactile Diagnostic Skill - Teaching, Learning, and Situated Cognition in a Physical Therapy Program. In *An Open Language: Selected Writing on Literacy, Learning, and Opportunity* (pp. 335-361). Boston: Bedford/St. Martins.

Rowan, B., Correnti, R., Miller, R. J., & Camburn, E. M. (2009). *School improvement by design: Lessons from a study of comprehensive school reform programs*. Washington, DC: Consortium for Policy Research in Education.

Schön, D. A. (1983). The Reflective Practitioner: How Professionals Think in Action. New York: Basic Books.

Schön, D. A. (1987). *Educating the Reflective Practitioner*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Sherin, M. G. & Star, J. (2010). Reflections on the Study of Teacher Noticing. In Miriam Gamoran Sherin, Victoria R. Jacobs, Randolph & A. Philipp, (Eds.), *Mathematics Teacher Noticing: Seeing Through Teachers' Eyes* (pp. 66-78). NY: Taylor & Francis.

Sleep, L., Boerst, T., & Ball, D. L. (2007, March). *Learning to do the work of teaching in a practice-based methods course*. Presentation made at the research presession of the annual meeting of the National Council of Teachers of Mathematics, Atlanta, GA.

Smylie, M. & Wenzel, S. A. (2006*). Promoting Instructional Improvement: A Strategic Human Resource Management Perspective*. Chicago, IL: Consortium on Chicago School Research at the University of Chicago.

Stein, M. K. & Coburn, C. (2008). Architectures for Learning: A Comparative Analysis of Two Urban School Districts, *American Journal of Education, 114*, 583-626.

Strutchens, M. E., Quander, J. R., & Gutiérrez, R. (2011). Mathematics learning communities that foster reasoning and sense making for all high school students. In Strutchens, M. E. (Ed.), *Focus in high school mathematics: Fostering reasoning and sense making for all students* (pp. 101-114). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Van Es, E. A., & Sherin, M. G. (2002). Learning to Notice: Scaffolding New Teachers' Interpretations of Classroom Interactions**,** *Journal of Technology and Teacher Education, 10* (4), 571-596.

Waller, W. (1932). *The Sociology of Teaching.* Chicago: University of Chicago Press.

Wenger, E. (2003). Communities of practice and social learning systems. In D. Nicolini, S. Gherardi, & D. Yanow (Eds.), *Learning in organizations* (pp. 76-99). Armonk, NY: M. E. Sharpe.

Yanow, D., & Tsoukas, H. (2009). What is Reflection-In-Action? A Phenomenological Account. *Journal of Management Studies, 46*(8), 1339-1364.

Yanow, D. (2001). Learning in and from improvising: Lessons from theater for organizational learning. *Reflections, 2*(4), 58-62.

Stein, M. K., & Coburn, C.E. (2008) Architectures for Learning: A Comparative Analysis of Two Urban School Districts. *American Journal of Education, 114*, 583-626.

PRÁTICAS DE ENSINO QUE PROMOVEM O PENSAMENTO ALGÉBRICO: UM ESTUDO COM DUAS PROFESSORAS NO 7.º ANO DE ESCOLARIDADE

José António Duarte
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal
jose.duarte@ese.ips.pt

Resumo: A investigação em que se baseia esta conferência tem como objeto de estudo as práticas de ensino de duas professoras quando desenvolvem um ensino com o propósito de promover o pensamento algébrico dos alunos, com recurso à tecnologia. Ana e Beatriz são as professoras que trabalharam colaborativamente com o investigador, ambas a lecionar o 7.º ano do antigo programa de Matemática e que se envolveram na conceção de tarefas, sua experimentação em sala de aula, e posterior reflexão sobre as práticas de ensino realizadas. Nesta conferência vou focar os aspetos das práticas das professoras quando planeiam e elaboram tarefas para desenvolver o pensamento algébrico, apoiadas na tecnologia e quando conduzem o ensino na sala de aula.

Dado que procuro compreender opções e razões das práticas de ensino das professoras, opto por uma metodologia que segue um paradigma de natureza interpretativa, de tipo qualitativo, na modalidade de estudo de caso.

As professoras lidaram com o desafio de integrar nas suas práticas de ensino uma nova e recente ideia programática o pensamento algébrico, sobre o qual foi preciso negociar um entendimento comum. Além disso, aceitaram fazê-lo apoiadas por duas ferramentas tecnológicas distintas, *applets* e folha de cálculo, o que constituiu mais um desafio pela diferente abordagem adotada neste domínio de conteúdos matemáticos, apesar do à vontade de ambas com a tecnologia.

Ao longo de um ano letivo, no trabalho de preparação letiva, as professoras passaram a dar uma significativa importância ao estabelecimento de relações e à algebrização das tarefas matemáticas a levar para a sala de aula, identificada como a transformação das tarefas de modo a torná-las mais abertas e passíveis de conduzir os alunos a generalizações. Já na condução do ensino, as professoras deram particular relevo à exploração de múltiplas representações matemáticas de uma mesma situação e à exploração do pensamento relacional dos alunos e a tecnologia potenciou as oportunidades para desenvolver o pensamento algébrico e comunicar as aprendizagens.

Palavras-chave: práticas de ensino; pensamento algébrico; tecnologias de informação e comunicação.

Introdução

Este trabalho integra-se numa investigação que foi desenvolvida ao longo de um ano letivo (Duarte, 2011) e revela evidência sobre os aspetos que emergem a partir de situações das práticas de duas professoras, quando estas trabalham para desenvolver o pensamento algébrico dos alunos, com suporte na tecnologia.

O presente artigo foca-se no processo e atividade de ensino que integra o planeamento, as tarefas e a condução do ensino na sala de aula e tem como objetivo caraterizar e identificar

aspetos em que evolui a prática de ensino das professoras, isto é a forma como elaboram as tarefas e pensam a sua exploração, para desenvolver o pensamento algébrico, e como conduzem o ensino na sala de aula, nomeadamente, quando usam a tecnologia. Pretende também perceber a contribuição do contexto de trabalho colaborativo para estudar o *conhecimento da prática* (Sowder, 2007).

Nos últimos anos, os estudos sobre o professor e as suas práticas têm vindo a ganhar importância, decorrente do reconhecimento do seu papel determinante, quer no desenvolvimento e na gestão do currículo, quer no seu próprio desenvolvimento profissional (Brocardo, 2001; Canavarro & Ponte, 2005; Gimeno, 1989). Para que o professor desempenhe bem o seu papel deve envolver-se em processos de trabalho em que a sua prática possa ser simultaneamente um ponto de partida, de análise e reflexão, mas também um contexto de aplicação do que aprendeu (Llinares & Krainer, 2006; Mewborn, 2003).

Os contextos que juntam professores e investigador num trabalho colaborativo e que integram tarefas, ferramentas, atividades e processos de comunicação e de reflexão sobre grandes ideias matemáticas e práticas, podem constituir oportunidades para os professores aprenderem (Ruthven & Goodchild, 2008). A reflexão (Llinares & Krainer, 2006) e a colaboração (Hiebert, Gallimore, & Stigler, 2002) podem ajudar a trazer ao de cima aspetos do conhecimento da prática, quando se trabalha em torno de uma tarefa comum como a exploração de novos materiais curriculares (Mewborn, 2003) ou o uso da tecnologia no ensino (Ruthven & Goodchild, 2008).

O objetivo comum pode ser o desenvolvimento do pensamento algébrico, que constitui uma preocupação crescente da investigação e das orientações curriculares internacionais recentes (Carraher, Schliemann, & Schwartz, 2008; NCTM, 2007), que encontra expressão no programa de Matemática do ensino básico (ME, 2007). Ele pode ser entendido como um processo de generalização de ideias particulares, através de um discurso de argumentação que se vai tornando progressivamente mais formal (Blanton & Kaput, 2005). A ênfase no pensamento algébrico permite expressar a generalização, um conceito fundamental, através de diferentes formas de representação para além da linguagem simbólica algébrica que marcava a Álgebra do anterior programa (ME, 1991), propondo-se igualmente o uso da linguagem natural, da representação numérica em tabelas e da representação gráfica, valorizando a capacidade de traduzir umas formas de representação nas outras (ME, 2007; NCTM, 2007; Schliemann, Carraher, & Brizuela, 2007).

A natureza interativa e dinâmica da tecnologia, a par das múltiplas representações que oferece, têm vindo a mudar as perspetivas sobre a aprendizagem de alguns conceitos algébricos (Ferrara, Pratt, & Robutti, 2006). Os *applets*, pequenas aplicações digitais, normalmente dirigidos a tópicos específicos do currículo, incorporam essas duas dimensões e podem constituir ferramentas importantes para a aprendizagem (Heck, Boon, Bokhove, & Koolstra, 2007). Em particular, a folha de cálculo valoriza a articulação entre as várias representações, permite a realização de experiências com números, pondo em evidência relações e facilita o processo de modelação (ME, 2007; Yerushalmy & Chazan, 2003).

Enquadramento teórico

Nesta secção discuto os aspetos teóricos envolvidos na prática de ensino, em particular, o planeamento e as tarefas que o professor elabora para conduzir a atividade de ensino na sala de aula, com destaque para as questões envolvidas no ensino e aprendizagem da Álgebra, quando se pretende desenvolver o pensamento algébrico e se usa, como recurso, a tecnologia.

Prática de ensino

O planeamento do professor e as tarefas para a sala e aula

Clark e Peterson (1986) afirmam que "o pensamento, planeamento e tomada de decisão dos professores constituem grande parte do contexto psicológico do ensino" (p. 255), num processo interativo onde o currículo é reinterpretado, e desenvolvem um modelo sobre os processos de pensamento dos professores e as suas ações e efeitos. Nos processos de pensamento, incluem o planeamento que o professor faz, os seus pensamentos e decisões interativas e as suas teorias e crenças e, nas ações observáveis, os comportamentos de professores e alunos e o desempenho dos alunos.

As razões para planificar podem ser de natureza diferente como reduzir a ansiedade, aprender a gerir o tempo ou fornecer um quadro orientador do ensino na sala de aula, a que não é alheia a experiência profissional dos professores. No planeamento que os professores experientes fazem, segundo Ruthven e Goodchild (2008), identifica-se um repertório completo de roteiros, uma estrutura de organização que articula o assunto, a pedagogia, o raciocínio sobre as ações e os objetivos, que são revistos e atualizados pelas suas histórias pessoais de ensino.

Uma das atividades essenciais na planificação é a seleção/elaboração/adaptação de tarefas a propor aos alunos. De acordo com Stein e Smith (1998, p. 269), "uma tarefa é definida como um segmento da atividade da sala de aula dedicada ao desenvolvimento de uma ideia matemática particular" e constitui uma forma de traduzir e adequar o currículo na sala de aula, de modo a proporcionar aos alunos boas aprendizagens. Frank, Kazemi e Battey (2007) salientam a importância das tarefas que levam os alunos a pensar e raciocinar sobre importantes ideias matemáticas, que podem ser resolvidas de diferentes formas e envolvem múltiplas representações, requerendo dos alunos justificações, conjecturas e interpretações que os envolvam em pensamento de alto nível cognitivo, e constituam oportunidades para o professor desenvolver um discurso matemático rico na sala de aula. Tarefas poderosas, segundo Zaslawski, Chapman e Leikin (2003), são tarefas abertas, "problemas não rotineiros, em sentido lato, que se prestam bastante ao trabalho colaborativo e às interações sociais, mobilizando considerações matemáticas e pedagógicas profundas, e desafiando as conceções e crenças pessoais acerca da Matemática e sobre como se compreende a Matemática" (p. 899).

Para conceptualizar o trabalho dos professores quando planeiam, Stein, Engle, Smith e Hughes (2008) propõem um modelo com o objetivo de moderar a improvisação e refere que uma das boas práticas passa por antecipar prováveis respostas dos alunos a tarefas matemáticas, uma competência que se desenvolve com uma cultura de sala de aula onde se preste atenção ao que os alunos dizem e fazem. A observação e recolha de informação sobre as formas de raciocínio dos seus alunos, pode ajudar os professores a tomarem decisões informadas sobre o ensino (Carpenter & Fennema, 1989; Llinares & Krainer, 2006) e traz-lhes compreensão sobre os alunos, a Matemática que estão a aprender e as tarefas mais apropriadas para o efeito. (Sowder, 2007, p. 164) reforça esta ideia quando afirma que: "Quando os professores examinam o trabalho dos seus próprios alunos, ganham discernimento sobre o raciocínio e a compreensão dos mesmos".

A condução do ensino na sala de aula

Uma boa prática de ensino vai muito para além de um bom conjunto de tarefas e de um bom planeamento. A prática letiva é um ambiente complexo, com inúmeras variáveis, onde os alunos e as estratégias de ensino para os envolver na aprendizagem, constituem, de acordo com Clark e Peterson (1986), as principais preocupações do professor, tendo os alunos uma profunda influência nas decisões interativas que ele toma durante o ensino. Segundo Ruthven e Goodchild (2008), o ensino decorre de um processo de constante diagnóstico, à medida que

o professor se move através de um roteiro, realizando pequenos ajustamentos no momento, decorrentes das respostas dos alunos às dificuldades previstas, tendo em conta sucessos passados e necessidades atuais dos alunos.

E quando a tecnologia é integrada na sala de aula, isso aumenta a complexidade das tarefas e requer a sua adequação, se o professor quer realmente usar as potencialidades que ela oferece (Laborde, 2008). Para além de que é natural ocorrerem dificuldades inesperadas (Zaslawski *et al*., 2003), que podem impulsionar o reestruturar das matemáticas dos professores.

Testar as tarefas e aquilo que discutiram, planearam e aprenderam, nas suas próprias salas de aula e com os seus próprios alunos, ouvindo os seus raciocínios matemáticos, pode ser importante para o desenvolvimento dos professores (Mewborn, 2003). E é a reflexão posterior, em equipa, apoiada em registos vídeo, que permitem capturar as realidades complexas da sala de aula, desde as estratégias dos professores ao trabalho dos alunos, que ajuda a reconstruir o conhecimento profissional dos professores *da sua prática* (Sowder, 2007).

Franke *et al*. (2007) reconhecem que é importante ter conhecimento de práticas que apoiem o envolvimento dos alunos e o seu crescimento intelectual quando queremos trazer o raciocínio matemático para o espaço da sala de aula e queremos que eles se envolvam com ele, condições consideradas favoráveis ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

O modelo de Stein *et al*. (2008), já referido, relativo ao trabalho dos professores quando planeiam, coloca a ênfase na discussão matemática na sala de aula em torno de tarefas exigentes do ponto de vista cognitivo. Para que isso aconteça, identifica um conjunto de práticas de condução do ensino que passam por monitorizar respostas dos alunos a tarefas durante a fase de exploração, selecionar respostas particulares dos alunos para as apresentar durante a fase de discussão e sistematização, sequenciar deliberadamente as respostas dos alunos que serão mostradas e ajudar a turma a fazer conexões matemáticas entre as diferentes respostas (Stein *et al*., 2008).

Isto exige, num contexto em que se pretende algebrizar a experiência matemática dos alunos, munir os professores de 'olhos e ouvidos algébricos' para aproveitarem as oportunidades da prática e criar uma cultura de sala de aula favorável ao desenvolvimento deste trabalho (Kaput & Blanton, 2001). Refiro-me ao ambiente criado pelo professor, às normas e interações que estabelece, nomeadamente aos modos de trabalho que proporciona, à forma como solicita, desafia e apoia os alunos, como desenvolve as tarefas, como conduz a discussão na sala de aula e àquilo que legitima (Boavida, Paiva, Cebola, Vale, & Pimentel, 2008). E os aspetos que o professor valoriza no trabalho algébrico têm profunda influência na forma como os alunos se relacionam com os significados e usam o senso comum na abordagem desses problemas (Arcavi, 2006).

Stein e Smith (1998) referem que a abordagem às tarefas se pode fazer através de diferentes níveis de exigência cognitiva, desde o simples apelo à memorização ou recurso a procedimentos, até explorar relações entre várias formas de pensar. Uma tarefa sofre sucessivas transformações, desde que surge nos mediadores curriculares, à forma como é apresentada pelo professor, até ao modo como os alunos a exploram. Pouco habituados a tarefas abertas mais exigentes, os alunos exercem normalmente pressões sobre os professores, através de pedidos de ajuda, o que exige deles conhecerem bem o raciocínio e a forma como os seus alunos aprendem e terem um bom repertório de rotinas de ensino para poderem criar oportunidades de aprendizagem, mantendo o nível da tarefa, mas apoiando e estimulando os alunos a envolverem-se na sua resolução (Silver, 2005).

O ensino e aprendizagem da Álgebra

O desenvolvimento do pensamento algébrico

A investigação sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico mostra a importância das investigações numéricas centradas na procura de relações, na exploração de regularidades e de padrões, na procura da generalização e no recurso a múltiplas representações (Carraher, Schliemann, & Schwartz, 2008; Schliemann, Carraher, & Brizuela, 2007). Mestre e Oliveira (2011) numa investigação com alunos de 4.º ano de escolaridade, a partir de tarefas com um contexto significativo para desenvolver o pensamento relacional, concluem que os alunos usam um conjunto diverso de representações, nas suas resoluções, que vão desde a linguagem natural, às tabelas e aos diagramas sagitais, para além de terem conseguido apresentar os valores das duas variáveis envolvidas na forma simbólica algébrica. Também Molina (2011) considera que a proposta da *Early Algebra* para desenvolver o pensamento algébrico implica promover, ao longo da escolaridade básica, "pensar sobre o geral a partir do particular, pensar em padrões como regras, pensar relacionalmente sobre quantidades, números e operações, pensar representacionalmente sobre relações em situações problema, e pensar conceptualmente sobre o procedimental" (p. 33).

Ponte (2006) sugere valorizar o pensamento algébrico, considerando-o uma orientação transversal do currículo e o novo programa de Matemática do Ensino Básico contempla-o como um eixo fundamental do processo de ensino-aprendizagem (ME, 2007). No pensamento algébrico, estão presentes a dimensão da aritmética generalizada, o pensamento funcional e a modelação (Blanton & Kaput, 2005), podendo esta última ser entendida sob diferentes formas. Aspetos tão simples como eliminar as restrições de um problema aritmético, fazendo variar valores e parâmetros de modo a explorá-lo de uma forma aberta e genérica, tornando-o mais algébrico, pode ser entendido como um tipo de modelação (Kaput, 2008). Também Brocardo, Delgado, Mendes, Rocha e Serrazina (2006) reconhecem que se podem gerar "atividades algébricas partindo de atividades numéricas, transformando problemas com uma resposta numérica simples em outros onde há espaço para construir padrões, conjeturar, generalizar e justificar factos e relações matemáticas" (p. 77).

Segundo Kieran (2011), a algebrização diz respeito à natureza do raciocínio que está na base da Álgebra e que permite que ideias e conceitos algébricos da escola secundária, possam ser explorados pedagogicamente no 'terreno' da matemática elementar, assim como à forma como os professores podem criar as condições para que os alunos desenvolvam o pensamento algébrico. A generalização constitui a componente chave do pensamento algébrico que está presente, de forma transversal, na Aritmética, como um domínio para expressar e formalizar generalizações (Canavarro, 2009). Ela envolve prolongar o raciocínio para além dos casos apresentados, identificando o que é comum e o que varia, passando para um nível onde a atenção já não se centra sobre os casos específicos em si, mas sobre as relações e padrões encontrados, que se tornam novos objetos algébricos (Kaput, 1999).

Blanton e Kaput (2005) destacam a importância do desenvolvimento profissional dos professores em dotarem-nos de maior capacidade de "transformar materiais de ensino, de modo a deslocarem o foco da sua prática da Aritmética para oportunidades de construírem padrões, conjeturarem, generalizarem e justificarem factos e relações" (p. 415).

A tecnologia dinâmica e interativa para apoiar o ensino da Álgebra

A dinamicidade é uma das características da tecnologia digital com potencialidades para o ensino e aprendizagem da Matemática, pois sendo a abstração um dos aspetos fundamentais do pensamento matemático, torna-se possível identificar a invariância, usando a variação proporcionada pelo *software* para ver o que muda e o que permanece constante (Ferrara, Pratt, & Robutti, 2006). Também Carreira (2009) considera importante que os alunos contactem com aplicações virtuais que incorporem as características de experimentar,

manipular, visualizar e investigar, um padrão que associa aos ´nativos digitais´, pois reconhece-as como sendo elementos centrais do pensamento matemático. Outra caraterística, a interatividade proporcionada pelas TIC, de acordo com Ferrara *et al*. (2006), permite dar um retorno às ações do utilizador, fazê-lo pensar e refletir sobre as consequências dessas ações, desafiando-o a procurar caminhos para a resolução da tarefa, torneando eventuais dificuldades.

Alguns *applets* contam-se entre as aplicações que reúnem estas características e que, por isso, trouxeram uma mais-valia à aprendizagem de tópicos específicos, tanto pelas suas características visuais, dinâmicas e interativas, que podem facilitar a visualização e compreensão de conceitos de Matemática, como pelo retorno que facultam, muito mais poderoso do que o proporcionado pelo trabalho com papel e lápis (Heck, Boon, Bokhove, & Koolstra, 2007). Para o desenvolvimento do pensamento algébrico têm particular importância os *applets* de modelação de conceitos, através das representações visuais que disponibilizam, pois "dentro dessas representações, os alunos podem trabalhar com base nas suas próprias ideias e experimentá-las livremente" (Heck *et al*., 2007, p. 2), desenvolvendo uma compreensão mais profunda da Matemática. Também Suh (2010) refere que para apoiar o desenvolvimento de modelos visuais e criar oportunidades para construir compreensão conceptual dos processos matemáticos no ensino da Álgebra, *os applets* algébricos e a folha de cálculo constituem exemplos de tecnologia apropriada. No entanto, as diferenças entre as novas representações oferecidas pela tecnologia e aquelas que se encontram, em geral, disponíveis nos contextos em que essas tecnologias se integram, traduzem-se por uma 'distância' qualitativa de natureza epistemológica, curricular, pedagógica ou didática, que pode afetar o impacto na forma como a tecnologia é usada (Morgan *et al*., 2009) e exige do professor uma preocupação para estabelecer 'pontes' que possam facilitar a apropriação dos conceitos pelos alunos.

E não basta olhar para os resultados da aprendizagem, mas importa observar os processos de raciocínio dos alunos quando estes trabalham, com alguma autonomia, com a tecnologia. Num ambiente em que os alunos têm acesso e interagem com este tipo de tecnologia interativa "espontaneamente articulam justificações das suas ações com explicações porque as suas ações produzem o esperado *feedback* (ou não)" (Hoyles & Noss, 2003, p. 335). E as tarefas sobre pensamento algébrico, apoiadas na utilização da tecnologia, com as questões que colocam aos alunos, podem constituir uma janela sobre o seu pensamento, na linha do que refere a investigação (Hoyles & Noss, 2003; NCTM, 2007), permitindo por vezes revelar aspetos novos da aprendizagem.

A folha de cálculo: entre as relações numéricas e o significado algébrico

O trabalho de Carraher *et al*. (2008) em torno do problema das carteiras[1] veio realçar dois aspetos: a importância de manter o significado no trabalho de construção e exploração dos modelos algébricos e o uso de múltiplas representações, nomeadamente em tabela numérica, gráfica e em expressão simbólica algébrica, para facilitar a generalização e trazer uma maior compreensão à situação em estudo. Kieran (2007) sugere que o uso de múltiplas representações, coordenando objetos e ações, articulando diferentes representações, como a gráfica e a simbólica formal e o contexto do problema, que permite fundir os símbolos com as situações, constituem formas de dar significado aos objetos algébricos.

Num contexto de utilização da folha de cálculo, o papel do professor, assim como a intencionalidade no trabalho dos alunos, constituem aspetos cruciais "como material para a construção do significado de variável e para a notação e expressão algébrica" (Bills *et al*., 2006,

[1] Miguel tem 8 € na sua mão e o resto do seu dinheiro na carteira. Rodrigo tem exatamente três vezes mais dinheiro do que Miguel tem na sua carteira. O que se pode dizer da quantidade de dinheiro que Miguel e Rodrigo têm?

p. 46) e quando o retorno da ferramenta é uma tabela de valores, isso pode ser significativo para os alunos. Porque a representação dos dados numéricos em tabela constitui um bom ponto de partida para clarificar o conceito de variável, um conceito nuclear da Álgebra, permitindo que os alunos tenham "uma experiência com variáveis como números que vão mudando e com os valores das expressões mudando como resultado" (Brown e Mehilos, 2010, p. 536).

Cada uma das representações acentua e valoriza diferentes aspetos, pelo que é importante criar situações de trabalho que permitam tirar partido de cada uma delas e melhorar a compreensão quando se consegue relacioná-las entre si (Friedlander & Tabach, 2001; Morgan *et al*., 2009). Esta fluência representacional, associada à tecnologia interativa e dinâmica, é a "capacidade para se movimentar entre e dentro das representações, transportando o significado de uma entidade, de uma representação para outra e acumulando informações adicionais sobre a entidade da segunda representação" (Zbiek, Heid, Blume, & Dick, 2007, p. 1192). Esta interligação entre representações, facilitada pelas tecnologias, pode favorecer a ocorrência de conexões mentais como, por exemplo, trabalhar com funções ao resolver equações (Ferrara *et al*., 2006).

A folha de cálculo oferece ainda boas potencialidades para modelar situações, quando o professor pretende colocar em evidência relações entre quantidades. Yerushalmy e Chazan (2003) reconhecem a ferramenta como apropriada para modelar fenómenos ou explorar situações cujos limites vão para além da Matemática, permitindo observar relações entre quantidades e reduzir a carga cognitiva de interação com a simbologia algébrica. No entanto, a modelação na folha de cálculo segue, frequentemente, um processo analítico, ao contrário da construção de modelos usando a notação simbólica algébrica, com lápis e papel, pois ajuda os alunos "a encontrar valores desconhecidos, mais do que a encontrarem soluções operando em ambos os membros [de uma equação]" (Yerushalmy & Chazan, 2003, p. 736). Esta caraterística, associada ao facto de permitir criar listas de valores de forma recursiva, requer colocar questões que desafiem os alunos, de modo a que estes sintam a necessidade de criar uma expressão explícita da função, desenvolvendo o pensamento funcional, o que requer uma intervenção apropriada do professor e tempo (Kieran, 2007).

Embora exista uma expressão algébrica que permite o cálculo através da substituição de valores, ela funciona como uma caixa negra que não deixa ver o processo, ao contrário desta forma de modelação com a ferramenta que pode tornar transparentes os cálculos. O foco desloca-se assim para a observação da evolução das quantidades, passo a passo, em que os alunos se movimentam entre representações numéricas, permitindo num estádio seguinte estabelecer relações algébricas (Pournara, 2009).

Opções metodológicas

Uma vez que procuro perceber os significados das opções das professoras nas tarefas que elaboram e das ações que desenvolvem nas práticas, opto por um paradigma de natureza interpretativa (Erickson, 1986). A interpretação e os significados atribuídos às ações das professoras na sala de aula, são mediadas pelas discussões na equipa e resultam da intersubjetividade presente na relação entre o investigador e os sujeitos (Stake, 2007).

A preocupação, mais do que com os resultados que se apresentarão sob a forma de narrativas descritivas ilustradas com citações dos informantes, centra-se no processo, nos significados que as pessoas atribuem às suas experiências e à forma como as interpretam, através de uma análise de dados indutiva, em que as abstrações, conceitos ou teorias surgem 'de baixo para cima', no processo de análise de dados, o que sugere a opção por uma abordagem qualitativa

(Bogdan & Biklen, 1994; Merriam, 1988). De entre as investigações qualitativas, a opção pela modalidade de estudo de caso foi determinada por se reconhecerem no estudo, em maior ou menor grau, as quatro características identificadas por Merriam (1988) para um estudo de caso qualitativo: ser particularístico, descritivo, heurístico e indutivo.

Para o efeito, criou-se um contexto de trabalho de natureza colaborativa (Olson, 1997; Jaworski, 2004; Krainer, 2011), que envolveu, ao longo de um ano letivo, duas professoras e o investigador em sessões presenciais mensais. Este trabalho teve como suporte, a distância, uma plataforma de gestão de aprendizagem *Moodle*, onde se disponibilizavam documentos curriculares e de investigação e se organizavam espaços de interação síncrona e assíncrona. Era nestes últimos que se dava continuidade às tarefas que eram iniciadas nas sessões presenciais e se sugeriam ideias para as sessões seguintes.

Foram escolhidas duas professoras para casos deste estudo: Ana e Beatriz. Os critérios que segui para a sua seleção foram: lecionarem o 7.º ano; terem já alguma experiência profissional e familiaridade com as tecnologias; e estarem recetivas a experimentar as indicações metodológicas do novo Programa de Matemática (ME, 2007), no que respeita ao desenvolvimento do pensamento algébrico, prevendo o uso das tecnologias. É no 7º ano que se encontram, quer no programa de Matemática de 1991, ainda em vigor no início deste trabalho, quer no então novo programa de Matemática (ME, 2007), bastantes referências a temas que envolvem a exploração de relações numéricas e algébricas. E porque pretendo aprender muito dos casos, no que respeita ao trabalho com o pensamento algébrico – um assunto ainda recente, com recurso à tecnologia, isso justifica os outros dois critérios: a disponibilidade para o desafio e a facilidade de uso da tecnologia. Ana, com 54 anos de idade e 31 anos de serviço, é licenciada em Matemática, tem um mestrado em Informática Educativa e está na sua atual escola EB 2,3, há 24 anos. Beatriz tem 31 anos de idade e 9 de serviço, é licenciada em Matemática, já lecionou em oito escolas e está há dois anos na sua escola EB 2,3 atual.

Os métodos de recolha de dados usados no estudo mais amplo são a entrevista, a observação e a análise documental (Merriam, 1988). Segundo Yin (2010), "o uso de múltiplas fontes de evidência nos estudos de caso permite que o investigador aborde uma variação maior de aspetos históricos e comportamentais" (p. 143), o que permite triangular os dados, desenvolver linhas de investigação convergentes e validar as conclusões do estudo (Stake, 2007).

Neste artigo, constituem fontes de dados as entrevistas inicial e final, as sessões de trabalho presenciais mensais da equipa, as sessões de trabalho síncronas, desenvolvidas a distância, as atividades assíncronas (fóruns) desenvolvidas na plataforma de gestão de aprendizagem, a observação de aulas, mediada pelas reflexões realizadas nas sessões presenciais com base em episódios e os documentos produzidos pelos participantes, como as tarefas e os relatos elaborados sobre as aulas, também mediados pela análise e discussão na equipa. O dispositivo de trabalho colaborativo montado permitiu a recolha de dados através de um trabalho de discussão e conceção de tarefas para desenvolver o pensamento algébrico, apoiado na tecnologia, e da reflexão sobre as aulas de cada professora a partir dos registos vídeo elaborados e de pequenos guiões com episódios de sala de aula, distribuídos previamente na plataforma de gestão de aprendizagem.

Num estudo de caso, a análise de dados caminha normalmente a par da recolha, influenciando-se mutuamente (Bogdan & Biklen, 1994) numa relação recursiva e dinâmica. A análise dos dados corresponde a um processo de procura de correspondências e de padrões, com vista à busca de significados (Stake, 2007) que se podem organizar em dimensões ou categorias.

Uma vez que as dimensões de análise consideradas, o planeamento e conceção das tarefas e a condução do ensino na sala de aula, não são claramente disjuntas e interferem de forma dialética uma sobre a outra, adoto uma análise vertical dos dados relativos a cada uma das professoras, procurando tendências e intenções implícitas e explícitas nas opções que fazem e nas ações que levam à prática. Interpreto as 'marcas' que dão sentido ao seu discurso nos diferentes contextos onde se produz (perante uma entrevista individual, nas sessões coletivas da equipa ou na sala de aula, com os alunos) e, por isso, opto por um processo de análise de discurso (Fiorentini & Lorenzato, 2006).

Análise de dados

Nesta secção, analiso os dados das duas professoras relativos à planificação da atividade de ensino, que inclui a construção das tarefas para desenvolver o pensamento algébrico, e à condução da sua implementação na sala de aula, nomeadamente quando usam a tecnologia. A origem dos dados são fundamentalmente as sessões presenciais da equipa, através da análise das tarefas e da reflexão sobre a prática na sala de aula, mas também recorro às entrevistas, aos *chats* e aos relatos das professoras.

Aspetos da planificação da atividade de ensino

Integrar o pensamento dos alunos no planeamento.

A leitura de episódios em textos de investigação e o trabalho de discussão e adaptação de tarefas na equipa de trabalho colaborativo, colocando em evidência o pensamento relacional e a procura da generalização, foram determinantes para as professoras se apropriarem das ideias sobre o pensamento algébrico. A planificação das aulas de Ana e Beatriz passa pelas sessões presenciais de trabalho da equipa, onde se discutem as grandes ideias que enformam as tarefas, que se concretizam a distância, através da plataforma de gestão de aprendizagem.

Ana, uma professora experiente, dispõe de um conjunto de rotinas de ensino que se adaptam bem a este trabalho que decorre entre as sessões da equipa e um tempo de apropriação que é seu:

> Eu ali [na sessão da equipa], vou falando e vou logo começando a pensar nas coisas e a contextualizá-las e a colocá-las no que eu costumo fazer, não é?! (…) E depois, eu acho que lhe dou um tempo de maturação. Deixo aquilo andar cá na minha cabeça, logo, logo a seguir não lhe mexo... deixo aquilo andar por cá. Depois há uma altura em que eu acho que é importante pensar nelas outra vez... e é aí... (Ana_E2[2])

Já Beatriz, para quem muitas das discussões que realizamos são novas, enquanto ouve e discute, usa a equipa como mediadora na validação das ideias.

> Vocês estão a falar e eu já estou a pensar aqui na sequência, mas estou-vos a ouvir (…) Ele é tanta coisa, ele é tanta ideia (…) Estava a pensar. Definia aqui equação, resolvíamos intuitivamente utilizando as noções do 'andar para trás', das operações inversas, formalizava tudo o que é termo, o termo independente e dependente, resolução. (Beatriz_S4)

E algumas vezes sente necessidade que a equipa vá mais longe no aprofundamento das tarefas e da sua intencionalidade, nas sessões presenciais:

[2] A seguir às citações das professoras, a letra seguida de um número, significa o tipo de evento (E: entrevista; S: sessão presencial; Ch: chat; R: relato) e a sua ordem cronológica.

> Muitas das vezes, saía de lá com muitas ideias e depois ficava um bocadinho apreensiva porque chegando a casa não tinha o tempo todo para estar de volta, como eu gostaria, das tarefas, das atividades e das construir e ficava um bocadinho desiludida, digamos assim. Portanto, se calhar, se tivéssemos um bocado que aprofundar mais as tarefas (…) Mais coisas, não sermos nós sozinhos a pensar (…) (Beatriz_E2)

Ana tem uma representação do que vai fazer e comenta algumas notas que por vezes transcreve para o papel quando pensa nas aulas e que podem ser as questões que poderá colocar aos alunos, assim como as respostas que poderão ocorrer, num processo em que se sente transportada para a sala de aula:

> É quase como se eu me colocasse dentro da aula e à medida que eu estivesse a projetar-me... se eu na aula estivesse a fazer isto, que jeito dá para perguntar ou o que é que se calhar ali na aula... é quase como se me transportasse para dentro da aula. E ao mesmo tempo que estou a organizar (…) como é que aquela aula era interessante decorrer, também parece que as perguntas para fazer aos miúdos me vão saindo. E depois é ao contrário, parece que vou ver as perguntas e começo a achar *Então daqui o que é que eles me irão responder? Se calhar vão responder isto ou aquilo...* e depois, é ao contrário. E acho que eu ando assim, de um lado para o outro. (Ana_E2)

Nesta planificação interativa que vão fazendo, as professoras começam por se apropriar do processo de antecipar o pensamento dos alunos, através da leitura e análise de episódios da investigação (Branco, 2008) sobre o pensamento algébrico, em particular o pensamento funcional quando trabalham com regularidades numéricas, uma tarefa que Beatriz considera bastante difícil: "Eles tinham mesmo de perceber a ordem, a regularidade e a relação entre a ordem e as imagens, senão não conseguiriam chegar aqui" (Beatriz_S0). Prever os caminhos que os alunos podem seguir na resolução das tarefas é um trabalho exigente porque depende das características e estilos de pensamento de cada um: "Às vezes é tão complicado fazer a simulação do que é que eles podem fazer… (…) Somos pessoas (…) Por isso é que eu acho que é complicado… Mesmo levando às vezes… [tudo pensado]" (Beatriz_S2).

Antecipar através das discussões na equipa o que os alunos poderão perceber e desenvolver de uma tarefa, é uma fase decisiva do processo de ensino que pode trazer vantagens para a aprendizagem, de que Ana se dá conta na sala de aula, espaço de onde emerge e para onde converge o seu saber profissional: "Quando estava em aula é que eu sentia que afinal aquelas discussões tinham surtido efeito. Era aí que eu sentia mais porque eu era capaz de ver as observações dos miúdos com outra clareza" (Ana_E2). De modo idêntico, na fase final do estudo, Beatriz reconhece que, por já ter antecipado em parte uma situação, isso permitiu-lhe gerir melhor a discussão: "Eu por acaso tinha pensado nesta hipótese e tinha pensado por estar a discutir contigo" (Beatriz_S8).

Algebrizar tarefas, como uma nova forma de pensar.

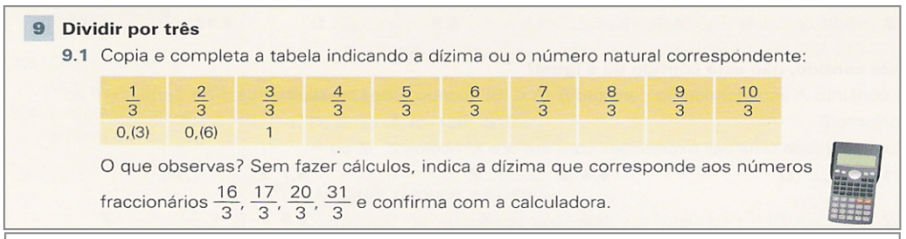
Logo nas primeiras sessões, após termos discutido um texto sobre cadeias numéricas e estratégias de cálculo mental, Beatriz tomou a iniciativa de adaptar um problema numérico do manual, procurando colocar em evidência diferentes representações dos números (decimal, em fração e em percentagem):

> *O avô do Afonso tem um campo de castanheiros. A produção de castanha em 3 anos consecutivos foi a seguinte: 1.º ano, 1600 kg; 2.º ano, 75% da produção do 1.º ano; e 3.º ano, 6/5 da produção do 1.º ano. Quantos quilos de castanha se produziram nestes 3 anos consecutivos?*
>
> Como estamos nos números... [capítulo *Os Números Racionais*] portanto, para resolver problemas… foi mais um problema para eles resolverem (…) Eu achei muito pertinente isto (…) Eles dividiram e explicaram e depois também ajudei e … perceberam… com o

> desenho, com o desenho também ajudou muito… (…) A noção de percentagem, a noção de parte, de fração… (Beatriz_S3)

Embora seja um problema essencialmente numérico, Beatriz procura desafiar os alunos a usarem diferentes representações dos números e encontrarem relações entre elas, que ilustra no relato que escreve da aula sobre o cálculo da produção de castanhas do 2.º ano: "A primeira aluna fê-lo utilizando a regra de três simples (…) Outro propôs uma expressão numérica 0,75x1600 (…) [Outro ainda] explica que o 100% pode ser decomposto em 4 partes" (Beatriz_R1) e usa a seguir três partes ou retira uma parte ao total, episódios que a professora reconhece no texto que discutiu anteriormente na equipa.

Ana, entusiasmada com as ideias discutidas nas sessões da equipa de trabalho colaborativo, onde abordámos exemplos de tarefas fechadas e várias possibilidades de as transformar em desafios com oportunidades para generalizar, encontrou no seu manual o seguinte exemplo:



9 Dividir por três

9.1 Copia e completa a tabela indicando a dízima ou o número natural correspondente:

$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{10}{3}$
0,(3)	0,(6)	1							

O que observas? Sem fazer cálculos, indica a dízima que corresponde aos números fraccionários $\frac{16}{3}$, $\frac{17}{3}$, $\frac{20}{3}$, $\frac{31}{3}$ e confirma com a calculadora.

Figura 1: Manual *Matemática sem limites* (pág. 112)

A reflexão que fez sobre a situação, permitiu-lhe introduzir algumas alterações na tarefa que propôs aos alunos, como a procura de regularidades nas dízimas e a sua generalização até à representação simbólica algébrica, apoiada em explicações, justificações e representações intermédias dos alunos.

> A seguir, destaco algumas questões que Ana colocou aos alunos na tarefa *Dividir por 3*:
>
> *Preenche a tabela indicando a dízima correspondente*

1/3	*2/3*	*3/3*	*4/3*	*5/3*	*6/3*	*7/3*	*8/3*	*9/3*	*10/3*
0,(3)	*0,(6)*	*1*							

> *Sem efetuares cálculos, indica a dízima correspondente a 19/3 e explica o processo que usaste para a descobrir.*
>
> *Utiliza o processo que descreveste na alínea anterior para descobrir a dízima correspondente ao número 181/3.*
>
> *Sem recorreres à calculadora, descobre o número que representado na forma de uma fração com denominador 3 tem como dízima 7,(6)? Explica o teu raciocínio.*
>
> *Encontra uma fórmula com uma variável que te permita calcular a dízima de um número, representado na forma de uma fração com denominador 3, quando é: um número inteiro; uma dízima, de período 3; uma dízima, de período 6.*

Neste exemplo, é visível a preocupação da professora em prolongar o raciocínio dos alunos para além dos casos apresentados, procurando que eles centrem a atenção no que varia e no que permanece constante, até formalizar a generalização em linguagem simbólica algébrica. Para Ana, este tipo de trabalho é mais exigente, vai muito para além dos cálculos, obriga a raciocinar e confirma esta sua conjetura, com os próprios alunos:

> No final da atividade perguntei-lhes qual tinha sido a diferença entre o trabalho que eles tinham feito em casa [resolução de um TPC de cálculo] e o trabalho que a gente tinha feito ali, com a mesma atividade [exploração da tarefa do Dividir por 3] na correção... se era a mesma coisa? Eles disseram logo que não. Que ali era só fazer as contas e que aqui andámos a tentar muito mais (…) *Não, não, não!... Agora aí a gente andou a pensar mais!* (Ana_S6)

O trabalho de discussão de episódios e de adaptação de tarefas na equipa, colocando em evidência o pensamento relacional e a procura da generalização, foram determinantes na apropriação por Ana de uma nova visão do pensamento algébrico:

> Foi muito importante esse trabalho que a gente fez de pegar naqueles exercícios, entre aspas, não é?! que a gente podia encontrar e que eram 'mortos à nascença', quando tinham possibilidades [de algebrização] e depois procurar, treinar essa capacidade de procurar essas possibilidades (…) [Antes] não havia ainda essa valência de pensar sobre esta perspetiva. (Ana_E2)

Evidenciar relações em processos de modelação.

Na mesma linha da tarefa anterior, Ana adaptou outro problema, retirado de um manual escolar (Figura 2), com o objetivo de possibilitar aos alunos estabelecer e discutir relações, após modelarem a situação, construindo as respetivas tabelas de dados na folha de cálculo.

A seguir, refiro algumas das questões que Ana colocou aos alunos, onde se destacam as preocupações com o estabelecimento de relações e a procura de invariantes, a partir da observação da representação em tabelas numéricas.

> *Usa as potencialidades da folha de cálculo do Excel para investigares as relações abaixo propostas:*

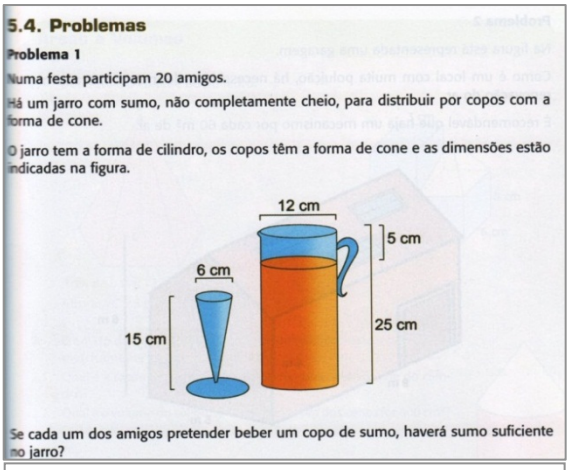


Figura 2: Problema dos sumos (*Espaço 7*, p. 239)

> *Para quantos convidados dará o sumo disponível no jarro se cada um deles só beber um copo desse sumo? E se o jarro estivesse cheio, para quantos convidados dava?*
>
> *Considera, agora que o copo disponível na festa era cilíndrico, com o mesmo diâmetro na base. Que alturas é que podia ter, de modo a que todos pudessem beber um copo?*
>
> *Organizem, por escrito, as etapas do vosso trabalho e as vossas conclusões.*

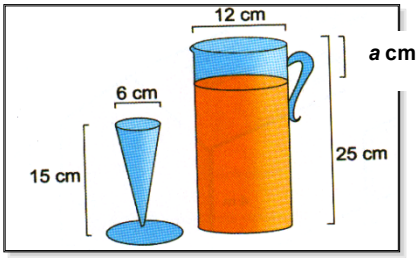
No relato do que aconteceu na aula, que escreveu por sua iniciativa, Ana clarifica as suas intenções com a tarefa:

> Pretendia-se que observassem os dados disponíveis no problema e discutissem quais se mantinham, ou não, invariantes (…) Quando da introdução das fórmulas, verificou-se que o facto de as tabelas pedirem situações diferentes levou os alunos a analisarem o que era pedido e a transferir a aprendizagem para situações que eram similares, mas não idênticas. Esta situação foi identificada quando aprenderam a fixar uma célula para calcular o volume do jarro para diferentes alturas mas sempre com a mesma base e depois tiveram de a usar para o volume do copo cónico. A diferença existente era que na tabela seguinte, o que variava era agora o número de copos, mantendo-se a área da base e a altura do copo. (Ana_R2)

Beatriz privilegia as relações da Matemática com a realidade e usa este mesmo exemplo construindo as expressões na folha de cálculo, tornando visíveis diferentes relações que explora com os alunos. Pressionada pelo tempo para cumprir o programa e num contexto agitado de sala de aula, em final do ano letivo, elabora a *Tarefa dos sumos* (Anexo 1), numa adaptação do que Ana tinha feito, mas utiliza um ficheiro cuja base constrói na folha de cálculo para explorar relações entre o número de pessoas e o número de copos, usando copos cónicos e cilíndricos e fazendo variar a altura do sumo no jarro (Anexo 2).

Em baixo, identifico algumas das questões que Beatriz colocou, partindo de uma outra imagem para apresentar o problema (Figura 3), onde a altura do jarro não preenchida com sumo é assumida como variável:

> *Usa as potencialidades da folha de cálculo para investigares as relações abaixo propostas utilizando o ficheiro disponível (Anexo 2)*
>
> *(…)*
>
> *2. E se o jarro não estiver cheio…*
>
> *a) Se tiver menos 5 cm na altura do sumo no jarro, para quantos convidados dá? E se tiver menos 10 cm de sumo?*
>
> *b) Qual é o valor que **a** tem que tomar para que o sumo dê para, pelo menos, 8 convidados?*



> *3. Considera que o jarro não está completamente cheio, tendo sumo até 15 cm., e que todos os convidados conseguiam beber um copo cónico de sumo.*
>
> *a) Se os copos disponíveis na festa fossem cilíndricos, com o mesmo diâmetro e altura dos copos cónicos, para quantos convidados daria o sumo? Consulta e compara as tabelas da folha de cálculo para te auxiliar na resposta.*
>
> *b) Que relação existe entre o número de copos quando as alturas e os diâmetros das bases de ambos (cilíndrico e cónico) são iguais? E entre os volumes?*

As questões que Beatriz coloca focam a atenção do aluno no processo analítico de modelação da folha de cálculo (Anexo 2), que permite observar a variação das várias variáveis envolvidas através de tabelas de valores e daí extrair relações através da identificação de regularidades e da comparação de tabelas. No entanto, considera que não geriu bem o tempo, o que pode ter limitado o alcance do trabalho exploratório em torno das relações:

> Dei demasiado tempo para preencher as tabelas, portanto a gestão, houve pouco tempo para a discussão (…) Portanto, em termos de folha de cálculo, em termos de tecnologia, isto de facto é uma mais-valia porque olha o tempo que nós não iríamos perder para fazer todos os cálculos e para estabelecer relações. (Beatriz_S9)

Relativamente aos seus objetivos com a tarefa, Beatriz destaca a utilização das relações entre volumes de sólidos em problemas do quotidiano:

> Esta aula era mais uma confirmação … acho que já tinha dito isso, uma confirmação da relação entre o volume do cone e do cilindro, que já tinham visto numa aula anterior. Mostrei até com a Escola Virtual [CD-ROM]. Estava lá a encher o cone e o cilindro … (…) Depois de eles estabelecerem as relações entre os volumes do cilindro e do cone e que no seu quotidiano rapidamente aplicassem essa relação … (Beatriz_S9)

A condução do ensino na sala de aula

Relativamente à forma como as professoras conduzem o ensino na sala de aula, discuto as metodologias de trabalho que as professoras privilegiam e a forma como monitorizam o trabalho dos alunos, o papel das múltiplas representações associadas ao contexto dos problemas na construção do significado algébrico e as representações da tecnologia interativa na construção dos conceitos.

Metodologias e monitorização do trabalho dos alunos.

O processo de trabalho mais observado nas práticas de Ana é lançar uma tarefa, colocar os alunos a trabalhar em pequeno grupo e, a seguir, ouvi-los, discutir e organizar ou solicitar os registos: "Eu sinto-me confortável com a turma organizada em grupos... acho que a turma fica mais pequenina, é uma coisa engraçada. E penso que consigo chegar mais aos miúdos e ter melhor perceção do trabalho deles se aquilo estiver em grupo" (Ana_E2). Dá a palavra ao porta-voz de cada grupo e aos outros que complementam ou discordam e, em seguida, organiza as ideias: "Eu vou registando no quadro as conclusões, (…) as coisas diferentes eventualmente que os grupos vão dizendo" (Ana_S1). Ana ilustra como conduz o ensino numa aula sobre regularidades numéricas, através da descoberta guiada por questões, nos pequenos grupos, acompanhando, escutando e observando, seguida de uma síntese com todo o grupo:

> Eu tento que eles cheguem lá por eles (…) Eles geralmente funcionam em grupos de 4 (…) Vou acompanhando o trabalho deles e vou ouvindo e vou colocando questões e tento sempre não dirigir a procura. E depois, nos momentos do trabalho geral, tento apanhar e fazer sair, de maneira a que o grupo todo se eleve nessa procura. Esse registo do coeficiente do n, comparado com os que estão ali de 2 em 2, eu não fiz absolutamente nada, eles é que foram fazendo, encontrando... (Ana_S4)

No trabalho de monitorização que realiza, Ana seleciona as contribuições a apresentar, procurando que umas complementem as outras, enquanto circula pelos grupos e observa o seu trabalho:

> Eu ando pelos grupos e estou a ouvir... de uma maneira geral começo por quem é que... para que aqueles que se sentem mais seguros lancem o pontapé de saída à discussão, mas depois geralmente aposto neste ou naquele grupo se eu sei que ou é uma maneira diferente de dizer o mesmo ou é uma coisa que vai acrescentar àquele e tento fazer isso. (Ana_S5)

Este tempo para os alunos discutirem e trabalharem em pequeno grupo, cria as condições de à vontade e confiança para argumentarem com a professora:

> Repara que ela está ali a argumentar comigo até à última instância. Ou seja, o processo de trabalho na procura das ideias deles, do que é que eles acham e desta condução, faz com que eles tenham esse à-vontade de estar na aula, pensaram e argumentaram completamente. (Ana_S5)

Beatriz usa com maior frequência estratégias mais orientadas, apoiando-se no quadro negro e no quadro interativo, no apoio à sua explicação, principalmente perante tarefas que avalia como sendo mais exigentes, quando está pressionada pelo tempo e quando estão em jogo

assuntos que ainda são novos, para si e para os alunos, sobre o pensamento algébrico ou que envolvam a folha de cálculo:

> Eu inicialmente [na tarefa das carteiras] não tinha feito a ficha assim, pus só folha de cálculo e o quadriculado e os eixos. Mas depois pensei: se calhar isto vai demorar mais tempo, eu vou ter de orientá-los para uma tabela… (…) faço já a tabela na folha Excel, reproduz-se no computador e depois eles passam para aqui. (Beatriz_S5)

A professora encontra vantagens no uso do quadro interativo, por possibilitar que os alunos estejam concentrados sobre o mesmo exemplo e para sistematizar ideias já discutidas, mas reconhece que também podem existir condicionantes à comunicação:

> Só recorrendo ao quadro interativo facilita que toda a turma, todo o grupo esteja a ver a mesma coisa, o mesmo gráfico, estão todos centrados na mesma coisa, portanto facilita a sistematização lá está e ao consolidar daquilo que eles já tinham pensado antes, apesar de nem todos os alunos se envolverem nestas situações (…) São mais os extrovertidos e os com mais confiança que manifestam as suas respostas, a não ser que sejam solicitados por nós (…) O quadro interativo foi uma sistematização e um completar daquilo que eles já tinham pensado também… (Beatriz_S6)

Inicialmente, Beatriz, porque está a lecionar o tema *Os Números Racionais*, remete o trabalho com regularidades, mais exigente no raciocínio, privilegiadamente para a área de Estudo Acompanhado (EA), aproveitando o tempo da aula para desenvolver os conteúdos específicos do tema:

> Esse tipo de problemas são problemas que podemos levar para o Estudo Acompanhado e que podemos desenvolver ainda mais e para não estar a perder aquele tempo da aula… de conteúdo… (…) porque isto é o desenvolvimento do raciocínio e do pensamento (…) e dá para eles fazerem em grupo, em pares, acho que é engraçado… e adapta-se ao Estudo Acompanhado. (Beatriz_S0)

Esta área constitui para Beatriz um laboratório experimental que ajuda a prevenir dificuldades iniciais que antevê nos alunos com a sintaxe da folha de cálculo e permite introduzir novas funcionalidades que ela reconhece serem necessárias às tarefas, no trabalho de sala de aula:

> Vou fazer tudo na aula de Estudo Acompanhado… e depois, isto é para o Excel. Até aqui é sem o Excel e depois é que vamos experimentar (…) depois vão confirmar (…) Primeiro fizeram sozinhos nessa mesma aula, eu não consegui apresentar tudo (…) Depois dei uma aula só sobre Excel [em EA] não peguei outra vez na ficha… onde eu estive a apresentar as potencialidades e eles foram ao quadro fazer o copiar, o escrever a sequência dos números naturais, os números pares, estive-lhes a mostrar como se escrevia a potência, as operações, a divisão, a multiplicação, essas coisas básicas, estivemos a brincar um bocadinho com as células (…) Ensinei-lhes a fazer os gráficos também. (Beatriz_S2)

Na exploração das tarefas, quando Beatriz tem dúvidas em optar pelo trabalho de grupo ou pelo trabalho com toda a turma, usa a equipa como mediadora: "E depois faz sentido… estou a pensar… depois faz sentido? (…) Estamos a explicar… aquilo não é nenhuma descoberta… Quer dizer, há descoberta no conjunto turma, não é?!…" (Beatriz_S2). A professora considera que quando usa o método expositivo, mais centrado em si, detém o controlo da situação, ao contrário de quando trabalha em pequeno grupo na turma, pela dispersão e agitação que introduz: "Claro que assim, só a ouvir o professor (…) quando eu fazia aulas expositivas, eles estavam bem. Eu conseguia tê-los ali, mas em termos de trabalho de grupo dispersavam…" (Beatriz_S9).

Após um trabalho exploratório e de discussão, conduzido com toda a turma ou nos pequenos grupos, Beatriz toma frequentemente a iniciativa de sistematizar as conclusões, ditando o que os alunos devem escrever, a pensar naqueles que têm mais dificuldades de interpretação e de expressão escrita:

> Mediante as respostas deles e tendo em consideração aquilo que eles pensaram, a participação deles, eu sistematizo porquê? Porque sei que há alunos com dificuldades e que se calhar sozinhos… ou não têm a resposta completa e então é no sentido de eles terem o registo no caderno correto (…) [porque] por eles só, não conseguem sistematizar e escrever. (Beatriz_S6)

A sistematização parece ser ainda mais necessária após a exploração de tarefas abertas, que fazem surgir diferentes assuntos relacionados entre si, mas que exigem um esforço acrescido da professora para lhes dar estrutura e sequência, semelhante àquela que conhecem dos manuais: "Da maneira como estamos a fazer as coisas, portanto… a linha condutora, se calhar no livro, acaba por estar mais completo. [Com] as coisas mais dispersas, ele acaba por não perceber e depois no seu estudo, se estudar, nunca fica orientado" (Beatriz_S6).

A reflexão sobre as aulas e a discussão na equipa mostram-lhe as dificuldades de gestão do tempo para explorar as tarefas, entre o pequeno grupo e toda a turma. Esta é uma aprendizagem que Beatriz vai fazendo e que ensaia na prática:

> Habituei-me agora a dar tempos… para eles… (…) Acho que… por acaso, foi este ano que comecei a fazer isto. Dar-lhes tempo para eles fazerem as tarefas, mesmo que eu depois dê ali uma tolerância de 5 minutos não faz mal… dentro daquele tempo, senão eles começam na brincadeira… (Beatriz_S8)

Os contextos e as múltiplas representações na construção de significado.

Ana trabalha com tarefas sobre regularidades numéricas, apoiando-se em representações que vão sendo progressivamente mais formais até à simbólica algébrica:

> E a partir daqui foi surgindo, portanto, eu fui fazendo a sequência e no fim escrevi mesmo "Posição (entre parêntesis)" e lá em cima, "2 vezes posição, mais um..." e aos poucos foi surgindo. Quando daqui surgiu o n, transitámos da posição para o n e depois foi só escrever (…) E depois foi engraçado quando aqui diziam… acabou uma miúda por me dizer *Então! Se este é 2 n mais um é ímpar, se dissermos 2 n é par*… (…) Agora tenho de pegar naquilo para trabalhar, não é?! Mas foi muito... Senti que a turma percebeu muito bem que aquele n variava, porque eles têm a noção da posição que varia. E nunca tinha sentido que ficasse tão bem interiorizado que aquilo variaria, assim desta maneira. (Ana_S1)

A professora procura desenvolver o conceito de variável e o pensamento funcional nos seus alunos, apoiada em diferentes representações na procura da generalização e regista com agrado a forma como sente a evolução dos alunos, embora reconheça a necessidade de alguma prática algébrica.

Ana e Beatriz, a partir da análise de um texto de investigação (Carraher *et al*., 2008) construíram na equipa de trabalho colaborativo, a denominada *Tarefa das carteiras* (Anexo 2 – Beatriz; Anexo 3 - Ana), que levaram para a sala de aula, em momentos diferentes, de acordo com a sua planificação. Numa aula de Ana, à pergunta *Quem gostarias de ser? O Miguel ou o Rodrigo?,* a resposta, adiantada por um aluno, *Acho que é o Rodrigo porque tem 45 €!* [o maior valor visualizado na tabela], parece querer dizer que ele decide por onde vê maior quantidade de dinheiro na tabela. A par disso, observam no gráfico e confirmam na tabela que os valores do Rodrigo crescem e afastam-se dos correspondentes valores do Miguel, o que conduz a uma maior probabilidade de casos favoráveis para o primeiro: "Por isso é que eles, se calhar, vão para aquela parte final. Tem mais casos … possibilidades (…) É mais marcante porque tem mais casos ... Até fazem... as probabilidades estás a ver?! (risos)" (Ana_S9). Mas quando na tarefa se acrescentam 4 € na mão do Miguel, que passa a ficar com 12 €, há alunos que hesitam e pensam existirem agora mais possibilidades para o Miguel, uma vez que aumenta o número de situações em que este está em vantagem. São estes diálogos, aparentemente contraditórios, que levam Ana a chamar a atenção para a importância do tempo para observar e ouvir as justificações dos alunos, vendo nesse processo um importante contexto para desenvolver a

comunicação matemática e o raciocínio: "Porque ele fez essa opção, porque ele olhou para umas coisas que não as outras, pois (…) Há imensas coisas que podem condicionar e que podem dar discussões matemáticas interessantes" (Ana_S9).

É a visualização e reflexão sobre os episódios da sala de aula nos vídeos que lhes permite tomar consciência de diferentes aspetos da condução do ensino, reconhecido pelas professoras:

> Quando uma pessoa está a ver isto é que se apercebe de tantas coisas que acontecem nestas aulas, tantas coisas, não é? (…) E a ter de tomar atenção a tantas coisas, que só assim é que se tem esta consciência. São aulas riquíssimas, que a gente às vezes sai de lá e tem essa noção (Ana_S5). Sim, temos essa noção. Mas às vezes não temos é uma noção tão clara. E mesmo das estratégias utilizadas (Beatriz_S5).

Para Ana, estudar as implicações de mudanças em valores de uma tabela numérica na folha de cálculo e traduzir a situação em linguagem natural, na *Tarefa das Carteiras* (Anexo 3), constitui um desafio ao raciocínio. É o que sucede quando os alunos são convidados a discutir as implicações em passar de 8 € para 12 €, na mão do Miguel: "Tentar ensaiar e testar a conjetura (…) Porque nesta fase já teriam mais experiência e poderiam com ela elaborar conjeturas neste sentido" (Ana_Ch2). Inicialmente, quando usa a representação gráfica e numérica da folha de cálculo, em simultâneo, e traduz uma na outra, Ana considera ser um desafio que sente que vai para além do que o programa pede e refere que até se podia falar na inclinação: "E esse facto faz com que as duas retas se possam encontrar (…) E procurar na tabela a razão desse facto (…) Mas como é uma atividade de desenvolvimento, não é necessário que todos cheguem lá" (Ana_Ch2).

O modo como os alunos discutiram a situação, identificando as diferenças na forma como variava o dinheiro total dos dois amigos, com base na análise da tabela e do gráfico, nas palavras de Ana, excedeu as suas próprias expectativas:

> Conexões com as outras aprendizagens, foi muito visível aqui... os gráficos, as expressões, aquilo que trabalhámos com o *applet* [das sequências lineares] lá tão atrás... (…) Houve imensas coisas que se estabeleceram, conexões com o que já se tinha feito anteriormente... e eu acho que isso para mim ainda foi... acabou por ser mais dominante para mim em termos daquilo que, quando saí da aula fiquei... gostei... (Ana_S9)

A experiência anterior dos alunos com as sequências e as representações proporcionadas pela tecnologia, têm implicações na escolha, praticamente unânime, do gráfico B[3] que melhor traduz a evolução do dinheiro dos dois amigos (Anexo 3): "Eles olham agora já para os gráficos e já sabem o que quer dizer" (Ana_S9). O uso de representações múltiplas, progressivamente mais formais, desde a tabela numérica e a representação gráfica, a par da sua tradução em linguagem natural, vem atribuir sentido às expressões simbólicas algébricas, processo que Ana resume, para os seus alunos, na frase *elas já falam convosco*.

Também Beatriz, inicialmente reticente ao uso em simultâneo da representação gráfica e em tabela numérica, reconhece que o uso frequente deste tipo de representações leva a que os alunos já sejam capazes de perceber as implicações no gráfico que resultam de alterações nas condições, em linguagem natural:

> Em relação à minha aula, já podemos fazer aqui uma comparação, quando eu faço a variação da condição do problema em que dou mais 4 € para a mão do Miguel, eles também fizeram logo essa associação… *Que a reta ia subir 4 unidades!* (Beatriz_S6)

A experiência que Beatriz teve com a tarefa das carteiras permitiu-lhe dar sentido e clarificar os conceitos algébricos de variável e de incógnita. Ao discutir as diferenças entre o significado

[3] Na questão 3 da ficha de apoio à tarefa das carteiras (Anexo 3)

a atribuir à letra que representa o dinheiro na carteira do Miguel, quando condiciona as expressões das funções que representam o dinheiro de cada um dos amigos a serem iguais refere: "Esta noção de incógnita vem de valor desconhecido… O dinheiro da carteira, não é incógnita, é variável… Não é?!" (Beatriz_S5). Os conceitos de variável e de incógnita aparecem juntos, o que ajuda Beatriz a distingui-los com os alunos:

> Quando se está a descobrir, vai uma aluna ao quadro e escreve *carteira igual a x* e depois *mão igual a 8* e depois escreve a expressão *x+8* e depois aqui há a questão do x ser variável ou ser incógnita… (…) Eu disse variável porque os valores variavam mas depois falou-se aqui no diálogo… (…) *Ah! É um valor desconhecido… então é incógnita!* (…) *Será que pode ser? Então vamos ver!* (…) Na equação então já seria incógnita, mas neste sentido é variável. (Beatriz_S6)

As questões que Ana e Beatriz colocam aos alunos nesta tarefa, procuram mobilizar a sua atenção para o significado das diferentes representações em relação com o contexto do problema, facilitando a generalização. No entanto, em geral, as representações oferecidas pela tecnologia diferem daquelas que se encontram disponíveis nos contextos em que domina o papel e lápis. Beatriz considera que isto exige do professor muita atenção e o estabelecer das 'pontes' necessárias para que o conceito seja devidamente apropriado pelos alunos e dá o exemplo dos seletores do *applet*. A ação sobre o seletor (uma representação do objeto matemático 'variável' que pode ser comparada com a representação da variável com um letra) e as correspondentes expressões numéricas que vão sendo geradas (por exemplo, 8*4+2, 8*5+2, 8*6+2, …), são aspetos de que Beatriz se apercebe no processo de exploração do *applet*. A professora considera um passo para introduzir e compreender as expressões com variáveis, mas que exige uma ação intencional do professor: "Importantíssimo, relacionar com as expressões com variáveis também" (Beatriz_S1). Também na presença da folha de cálculo, pensa introduzir as expressões com variáveis e discute na equipa algumas ideias que possam ajudar a estabelecer a 'ponte' entre a sintaxe própria da ferramenta e a notação matemática:

> Como é que a partir daqui da folha de cálculo nós poderíamos chegar às expressões com variáveis. Eu pensei dar-lhes aqui o B4+1, B5+1, B6+1, B7+1… o que é constante era manter constante e o que era variável é que eles atribuíam a letra… (Beatriz_S2)

As aplicações dinâmicas e interativas e a construção de conceitos algébricos.

Para trabalhar as sequências lineares, Ana e Beatriz, elaboraram uma tarefa (Anexo 4), apoiando-se num *applet* que analisaram numa sessão de trabalho da equipa e que exploraram depois, em sala de aula, com os seus alunos. O entusiasmo de Ana com a compreensão demonstrada nas explicações progressivamente mais elaboradas que os seus alunos foram dando refletiu-se num relato que, por sua iniciativa escreveu, em que acentua a importância dos registos intermédios, quando os alunos trabalham e fazem descobertas com a tecnologia:

> A professora sentiu que devido à rapidez com que os resultados foram surgindo talvez o trabalho não estivesse a ser feito com a reflexão necessária para a qual a tarefa tinha sido planificada. Deste modo, foi insistindo na necessidade de registarem tudo o que tinham pensado, à medida que fossem avançando na realização da tarefa. Durante esta fase foi possível verificar que ao dar resposta às questões colocadas, de uma forma mais organizada e sistemática, os alunos eram obrigados a separar o movimento dos dois seletores envolvidos, ou seja, o ato de registar passo a passo ajudava os alunos a pensar sobre as suas ações. (Ana_R1)

E Ana continua, descrevendo as descobertas que os alunos foram fazendo no pequeno grupo, com os computadores portáteis e a apresentação e sistematização que realizaram no grande grupo turma, apoiados no quadro interativo: "A discussão das conclusões a que os diversos grupos chegaram foi a fase da aula mais interessante. Os alunos conseguiram oralmente

relatar, muito bem, a forma como pensaram para dar resposta à tarefa proposta" (Ana_R1), uma explicação que surpreende a professora:

> Tão engraçado, o João explicou assim (…) Eu olho aqui ao valor que está entre estes dois [diferença registada entre os dois termos consecutivos] que é 9 e ponho no comando do n, 9n... e assim que ponho aqui [no gráfico] fica logo paralelo... Depois, vou fazer a diferença entre este e este [os dois primeiros termos das 2 sequências] e a diferença entre este número e aquele que está ali dá-me o número de baixo e trás! Ficou logo lá em cima! E eu que nunca tinha pensado nisso... (Ana_S3)

Isto parece ocorrer quando os alunos têm um tempo para trabalharem em pequeno grupo e quando têm acesso à tecnologia como ferramenta mediadora das aprendizagens. Ana reconhece que estas representações próprias da tecnologia facilitam a abordagem informal de temas que ainda não foram tratados explicitamente na sala de aula, como foi o caso na resolução da alínea 1 da 2ª parte da tarefa das sequências lineares (Anexo 4). A comunicação de estratégias dos alunos deixa Ana surpreendida com a forma como estes resolveram informalmente equações, usando o que conheciam e as representações proporcionadas pela tecnologia:

> Então como este aqui no 8 [em 3n+8], foi o último a mexer, é o primeiro que a gente volta para trás... o conceito da inversa... Nós estamos a fazer o processo ao contrário para saber se... Então é menos 8, primeiro tira-se 8 e a seguir divide por 3... Pronto! E eu lá fui escrevendo o que eles me estavam a dizer... (Ana_S3)

A livre exploração dos seletores pelos alunos e a 'leitura' e comparação com as expressões numéricas geradas conduziu à ocorrência de processos, que Ana não tinha antecipado, como o uso informal do método das diferenças finitas para a determinação da expressão geral de uma sequência linear: "Eu é que fiquei atrapalhada, entre aspas, porque como eu já tinha feito com a outra turma, estava à espera que eles fizessem a comparação com o gráfico e começa ele a explicar aquilo de outra maneira... [numérica]" (Ana_S4). É nos processos de comunicação, nas explicações orais, mas também nas escritas, que Ana reconhece que os alunos vão para além do que ela espera:

> As explicações que os miúdos fizeram na tal ficha, quando eu pedia para explicar (…) eles usaram mais isto [correspondência gráfico-expressão, com a explicação, por exemplo, da imagem do 1 em *n* e em *4.n*] (…) Na explicação, eles utilizam e olha que aqui eu nunca falei muito nisto, mas curiosamente é a explicação que aparece com mais frequência que é... vão ao 1 e associam o coeficiente com a imagem e explicam assim... (Ana_S6)

Também Beatriz, se surpreende com as explicações dos alunos de Ana: "Eu nunca pensei nisso assim… (…) dessa maneira…" (Beatriz_S3), o que parece mostrar que estas ferramentas medeiam, de forma nem sempre prevista, a natureza das explicações que os alunos dão. Na sua turma, "ao princípio era, tipo jogo [mas] vão lá (…) Eu deixei-os mexer um bocadinho sozinhos [nos seletores do *applet*] e depois, alguns, enquanto eu andava a resolver os problemas [de funcionamento dos computadores] já estavam: Stôra, já resolvi!…" (Beatriz_S4).

Tal como Ana, Beatriz considera que as representações da tecnologia podem mostrar relações inesperadas, mas o papel da professora é levá-los a pensar sobre o processo de experimentação de modo a apropriarem-se dos conceitos:

> Só estavam a brincar com os seletores, mais nada e chegavam lá. Então eu depois quis puxar mais por eles e como ia aparecendo ali a operação fui-lhes perguntado: *Mas que números é que são estes? Vejam lá?!* Já não sei que números é que eram os múltiplos… depois é que disse *São múltiplos não sei de quê…!* Portanto, começaram logo a associar e relacionaram com aquele valor [refere-se ao coeficiente do n] e olharam para as operações que iam ali aparecendo, ou seja, o 6*1, o 6*2,… Então e olhem lá bem?! E a associação ajudou muito a chegarem lá aos múltiplos… (Beatriz_S4)

Ana admite que este tipo de tarefas mobiliza o raciocínio dos alunos, que se externaliza quando estes trabalham com as representações da tecnologia, das quais recebem um retorno permanente que tem implicações nas ações subsequentes e nas explicações que dão:

> Através deste tipo de trabalho que a gente fez, de desenvolver o pensamento algébrico, eu também fui capaz de ver o pensamento algébrico ali de alguns meninos, de ver quando eles comunicavam, porque as tarefas pediam questões de que, era como se fosse uma janela aberta naquele pensamento e o que é que a pessoa verifica?! Verifica que eles até são capazes de pensar algebricamente (…) (Ana_E2)

Conclusão

A partir da leitura e análise de episódios da investigação e progressivamente, com a elaboração das tarefas e a análise das suas próprias experiências de ensino, à semelhança do que refere Mewborn (2003), as professoras apropriam-se das ideias do pensamento algébrico, adquirindo *conhecimento da prática* (Sowder, 2007). O pensamento algébrico evolui do cálculo algébrico para um pensamento baseado em relações, em múltiplas representações e na procura da generalização (Schliemann *et al*., 2007). Segundo Ana, uma nova forma de pensar, com o significado que lhe atribui Blanton e Kaput (2005) e, nas palavras de Beatriz, um pensamento baseado em relações, exigente no raciocínio dos alunos e nas práticas dos professores, na linha do que refere Stein *et al*. (2008).

As representações dos alunos merecem a atenção das professoras e as expectativas sobre o que eles podem fazer, no âmbito do pensamento algébrico, tornam-se progressivamente mais elevadas, com as descobertas e explicações elaboradas que dão, nomeadamente quando se apoiam em representações da tecnologia.

As tarefas abertas são vistas progressivamente, pelas professoras, como oportunidades para boas discussões, na linha do que refere Zaslawski *et al*. (2003). Mas também, segundo Ana, para estabelecer relações, desenvolver o raciocínio e algebrizar o currículo (Kaput, 2008), ou para articular conceitos e mostrar relações, na visão de Beatriz. Inicialmente, perante tarefas sobre pensamento algébrico, que exigem um elevado nível de raciocínio ou que impliquem o uso da folha de cálculo, Beatriz serve-se da área de Estudo Acompanhado como 'laboratório experimental', antes de as introduzir na sala de aula.

As tecnologias constituem um recurso integrado nas metodologias que cada uma das professoras privilegia e podem ajudar a desenvolver o currículo. Em Ana, com os computadores portáteis, partindo de trabalho exploratório em pequeno grupo e, em Beatriz, com o quadro interativo, apoiando a apresentação e discussão de exemplos, em interação com todo o grupo turma.

Para as duas professoras, a folha de cálculo, através da modelação analítica de situações do quotidiano, apoia o processo de generalização e contribui para clarificar o conceito de variável, o que vem no sentido das potencialidades identificadas por Yerushalmy e Chazan (2003) e da investigação sobre o papel das representações de dados numéricos em tabela de Brown e Mehilos (2010). Também o uso em simultâneo das representações em tabela numérica e gráfica, até à representação simbólica formal, ajuda a manter uma relação com os contextos dos problemas, uma conclusão que confirma os resultados da investigação conduzida por Carraher *et al*. (2008).

As representações da tecnologia, quer da folha de cálculo, quer dos *applets*, pela sua natureza dinâmica e pela interatividade associada ao retorno que dão (Heck *et al*., 2007), trazem para as salas de aula das professoras, assuntos ainda não lecionados ou explicações imprevistas dos

alunos, à semelhança do que reconhece Hoyles e Noss (2003), o que surpreende Ana. Beatriz preocupa-se em estabelecer 'pontes' entre os conceitos que emergem do uso da tecnologia e a forma como os mesmos surgem na Matemática, com papel e lápis, como forma de diminuir a 'distância' qualitativa entre os dois conceitos, referida por Morgan *et al*. (2009).

A equipa de trabalho colaborativo desempenhou um papel mediador relevante para apoiar o processo de planeamento e condução do ensino, aspetos reconhecidos por Ruthven e Goodchild (2008), nomeadamente:

- A reflexão sobre o ensino permitiu clarificar aspetos do pensamento algébrico e antecipar o pensamento dos alunos, o que trouxe mais ideias sobre o processo de monitorização das tarefas (Ana), e focou a atenção sobre as representações dos alunos, a discussão na sala de aula e a gestão dos tempos na exploração das tarefas em grupo (Beatriz). Esta conclusão corrobora a investigação (Llinares e Krainer, 2006; Carpenter & Fennema, 1989) que aponta para que a reflexão que os professores fazem sobre o trabalho e os processos de raciocínio dos seus alunos pode ajudá-los a tomarem decisões apropriadas sobre as tarefas e o ensino.
- Embora as professoras tivessem à vontade no trabalho com a tecnologia, esta forma de trabalhar com a folha de cálculo, revelou uma nova dimensão no trabalho com relações, com a generalização e com as representações, promovendo o estabelecimento de conjeturas.

Em síntese, os resultados obtidos permitem-me afirmar que:

- As professoras aprendem sobre o pensamento algébrico, a partir dos episódios da prática, reconhecem-no progressivamente como um pensamento baseado em relações e focam-se na generalização para transformar os seus materiais de ensino;
- Ana e Beatriz integram as tecnologias em coerência com as metodologias de trabalho com que mais se identificam, aceitando mudanças sustentadas quando têm o tempo necessário para refletir e encontram razões fortes para o fazer;
- As evoluções resultam de uma construção pessoal e social, num equilíbrio dinâmico entre o desafio curricular (uma ideia do pensamento algébrico), o potencial da tecnologia e o seu entendimento sobre os processos de trabalho e a aprendizagem dos alunos, mediado pelas discussões na equipa;
- O contexto de trabalho colaborativo oferece oportunidades para as professoras aprenderem da sua prática e dá-lhes segurança e confiança para arriscar.

Referências

Arcavi, A. (2006). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & A. P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 29-47). Lisboa: SPCE.

Bills, L., Ainley, J., & Wilson, K. (2006). Modes of algebraic communication – moving from spreadsheets to standard notation. *For the Learning of Mathematics, 26*(1), 41-47.

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412-446.

Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A experiência Matemática no Ensino Básico*. Lisboa: ME – DGIDC.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em Educação*. Porto: Porto Editora.

Branco, N. (2008). *O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico* (Tese de Mestrado). Lisboa: DEFCUL.

Brocardo, J. (2001). *Investigações na aula de Matemática: Um projecto curricular no 8.º ano* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.

Brocardo, J., Delgado, C., Mendes, F., Rocha, I., & Serrazina, L. (2006). Números e Álgebra: Desenvolvimento curricular. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & A. P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 65-92). Lisboa: SPCE.

Brown, S. A., & Mehilos, M. (2010). Using tables to bridge Arithmetic and Algebra. *Mathematics teaching in the middle school*, *15*(9), 532-538.

Canavarro, A. P. (2009). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante, 16*(2), 81-118.

Canavarro, A., & Ponte, J. (2005). O papel do professor no currículo de Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 63-89). Lisboa: APM.

Carpenter, T. P., & Fennema, E. (1989). Building on the knowledge of students and teachers. In G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the 18th PME International Conference* (Vol. 1, pp. 34-45). Lisboa, Portugal: PME.

Carraher D., Schliemann, A. e Schwartz, J. (2008). Early Algebra is not the same as Algebra Early. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds). *Algebra in the Early Grades* (p. 235-272). LEA: New York.

Carreira, S. (2009). Matemática e tecnologias – Ao encontro dos "nativos digitais" com os "manipulativos virtuais". *Quadrante, 18*(1 e 2), 53-85.

Clark, C., & Peterson, P. (1986). Teachers' thought processes. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 255-296). New York: Macmillan.

Duarte, J. (2011). *Tecnologias e pensamento algébrico: Um estudo sobre o conhecimento profissional dos professores de Matemática* (Tese de Doutoramento). Lisboa: IEUL.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York: MacMillan.

Ferrara, F., Pratt, D., & Robutti O. (2006). The role and uses of technologies for the teaching of algebra and calculus. In A. Gutiérrez, & P. Boero (Orgs), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, present and future* (pp. 237-273). Rotterdam: Sense.

Fiorentini, D., & Lorenzato, S. (2006). *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos*. Brasil: Autores Associados.

Franke, M., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. In Frank Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 225-256). Charlotte: Information Age Publishing.

Friedlander, A., & Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. In A. A. Cuoco (Ed.), *2001 Yearbook of the National Council of the Teachers of Mathematics: The roles of representation in school mathematics* (pp. 173-185). Reston, Virginia: NCTM.

Gimeno, J. (1989). *El curriculum: Una reflexión sobre la prática*. Madrid: Morata.

Heck, A., Boon, P., Bokhove, C., & Koolstra, G. (2007). *Applets for learning school algebra and calculus: experiences from secondary school practice with an integrated learning environment for mathematics*. Capturado em 2 de Maio de 2010, no Academia.edu *website*, em http://uu.academia.edu/ChristianBokhove/Papers/219885/Applets_for_Learning_School_Algebra_and_Calculus

Hiebert, J., Gallimore, R., & Stigler, J. (2002). A knowledge base for the teaching profession: What would it look like and how can we get one? *Educational Researcher, 31*(5), 3-15.

Hoyles, C., & Noss, R. (2003). What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? In A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F.K.S. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 323-349). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Jaworski, B. (2004). Grappling with complexity: Co-learning in inquiry communities in mathematics teaching development. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. I, pp. 17-36). Bergen, Norway: PME.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra. In E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 133-160). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J., & Blanton, M. (2001). Algebrafying the elementary mathematics experience. Parte I: Transforming task structures. In H. Chick, K. Stacey, & J. Vincent (Eds.). *Proceedings of the 12th ICMI Study Conference on the Future of the Teaching and Learning of Algebra*, (Vol. 1, pp. 344-351). Melbourne, Austrália: The University of Melbourne.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school trough college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. In Frank K. Lester, Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 707-762). Charlotte: Information Age Publishing.

Krainer, K. (2011). Teachers as stakeholders in mathematics education research. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 47-62). Ankara, Turkey: PME.

Laborde, C. (2008). Multiple dimensions involved in the design of tasks taking full advantage of dynamic interactive geometry. In A. Canavarro, D. Moreira, & M. I. Rocha (Orgs), *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 36-50). Lisboa: SPCE.

LLinares, S., & Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. In A. Gutiérrez, & P. Boer (Eds.). *Handbook of Research on the Psychology of*

Mathematics Education: Past, present and future (pp. 429-459). Rotherdam: Sense Publishers.

Merriam, S. B. (1988). *Case study research in education*. S. Francisco, CA: Jossey-Bass Publishers.

Mestre, C., & Oliveira, H. (2011). Compensação e variação: um estudo sobre o pensamento relacional de alunos do 4.º ano de escolaridade. In M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, I. Vale, & J. P. Ponte, (Eds.), *Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 195-218). Póvoa do Varzim, Portugal: EIEM.

Mewborn, D. S. (2003). Teaching, teachers' knowledge, and their professional development. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 45-52). Reston: NCTM.

ME (1991). *Organização Curricular e Programas* (3.º ciclo do ensino básico), Vol. I. Lisboa: Imprensa Nacional, Casa da Moeda.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Recuperado em 15 de Outubro de 2008, de http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf

Molina, M. (2011). Integración del pensamento algebraico en la educación básica. Un experimento de enseñanza com alunos de 8-9 años. In M. H. Martinho, R. A. T. Ferreira, I. Vale, & J. P. Ponte (Eds.), *Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 27-51). Póvoa do Varzim, Portugal: EIEM.

Morgan, C., Mariotti, M. A., & Maffei, L. (2009). Representation in computational environments: Epistemological and social distance. *International Journal for Computers in Mathematics Learning, 14*(3), 241-263.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM. (Trabalho original em inglês publicado em 2000).

Olson, M. (1997). Collaboration: An epistemological shift. In H. Christiansen, L. Goulet, C. Kreniz, & M. Maeers (Eds.). Recreating relationships: Collaboration and educational reform (pp. 13-25). New York: State University of New York Press.

Ponte, J. P. (2006). Números e Álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: SPCE.

Pournara, C. (2009). Spreadsheets as a transparent resource for learning the mathematics of annuities. *For the Learning of Mathematics, 29(*3), 49-52.

Ruthven, K., & Goodchild, S. (2008). Linking researching with teaching. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 561-588). Mahwah, NJ: Laurence Erlbaum.

Schliemann, A. D., Carraher, D. W., & Brizuela, B. M. (2007). *Bringing out the algebraic character of Arithmetic: From children's ideas to classroom practice*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Silver, E. A. (2005). Educating teachers Mathematics: Some promising directions. In L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Orgs.). *Educação Matemática: caminhos e encruzilhadas* (pp. 249-265). Lisboa: APM.

Sowder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (Vol. I, pp. 157-223). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Stake, R. E. (2007). *A arte da investigação com estudos de caso*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian. (Trabalho original em inglês publicado em 1995).

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 268-275.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313-340.

Suh, J. M. (2010). Tech-Knowledgy & diverse learners. *Mathematics Teaching in the Middle School, 15*(8), 440-447. Recuperado em 6 de Setembro de 2010, de http://www.nctm.org/eresources/view_media.asp?article_id=9197

Yerushalmy, M., & Chazan, D. (2003). Flux in school Algebra: Curricular change, graphing technology, and research on student learning and teacher knowledge.

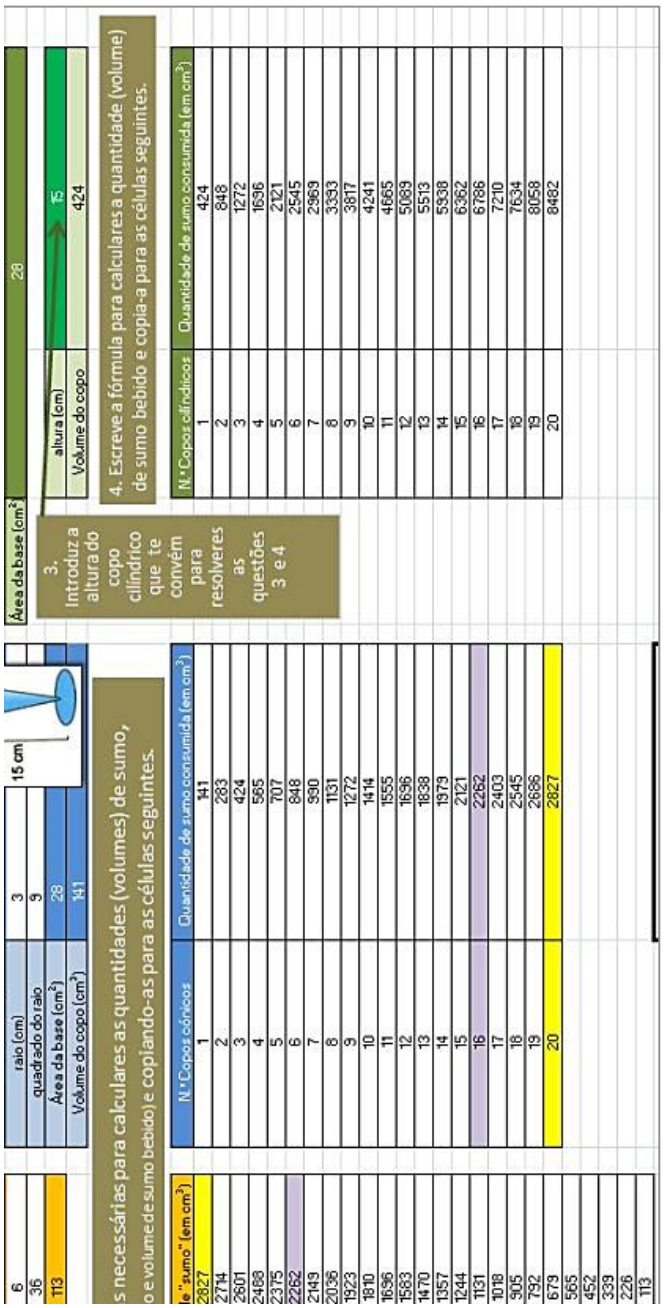
Yin, R. (2010). *Estudo de caso: Planejamento e métodos* (4.ª ed.). Porto Alegre: Bookman.

Zaslawski, O., Chapman, O., & Leikin, R. (2003). Professional development of mathematics educators: Trends and tasks. In A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 877-917). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W., & Dick, T. P. (2007). Research on technology in mathematics education: A perspective of constructs. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (Vol. II, pp. 1169-1207). Charlotte: Information Age Publishing.

Anexo 1

Ficheiro de trabalho da tarefa dos sumos (Beatriz)



6
36
113

raio (cm)	3
quadrado do raio	9
Área da base (cm^2)	28
Volume do copo (cm^3)	141

15 cm

Área da base (cm^2) 28

s necessárias para calcular as quantidades (volumes) de sumo,
o e volume de sumo bebido) e copiando-as para as células seguintes.

le "sumo" (em cm^3)
2827
2714
2601
2488
2375
2262
2149
2036
1923
1810
1696
1583
1470
1357
1244
1131
1018
905
792
679
565
452
339
226
113

N.º Copos cónicos	Quantidade de sumo consumida (em cm^3)
1	141
2	283
3	424
4	565
5	707
6	848
7	990
8	1131
9	1272
10	1414
11	1555
12	1696
13	1838
14	1979
15	2121
16	2262
17	2403
18	2545
19	2686
20	2827

Área da base (cm^2) 28

3. Introduza a altura do copo cilíndrico que te convém para resolveres as questões 3 e 4

altura (cm)	15
Volume do copo	424

4. Escreve a fórmula para calcular a quantidade (volume) de sumo bebido e copia-a para as células seguintes.

N.º Copos cilíndricos	Quantidade de sumo consumida (em cm^3)
1	424
2	848
3	1272
4	1696
5	2121
6	2545
7	2969
8	3393
9	3817
10	4241
11	4665
12	5089
13	5513
14	5938
15	6362
16	6786
17	7210
18	7634
19	8058
20	8482

Anexo 2

Tarefa das carteiras

(Beatriz)

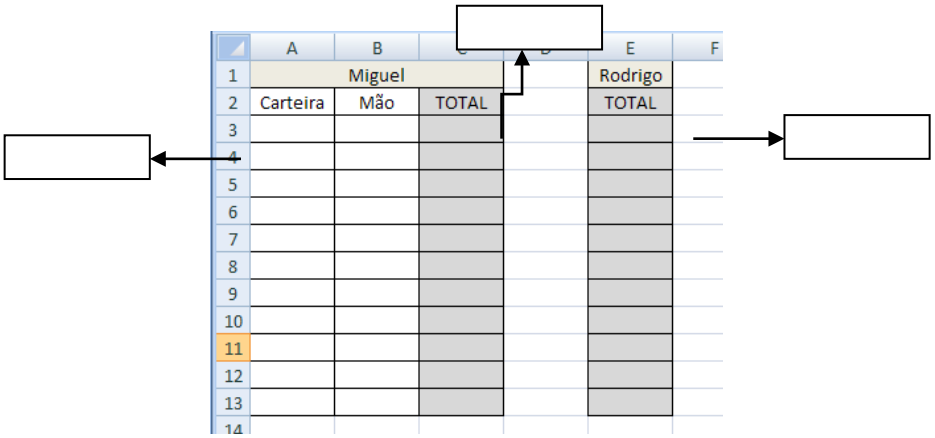


O Miguel tem 8 € na sua mão e o resto do seu dinheiro na carteira.

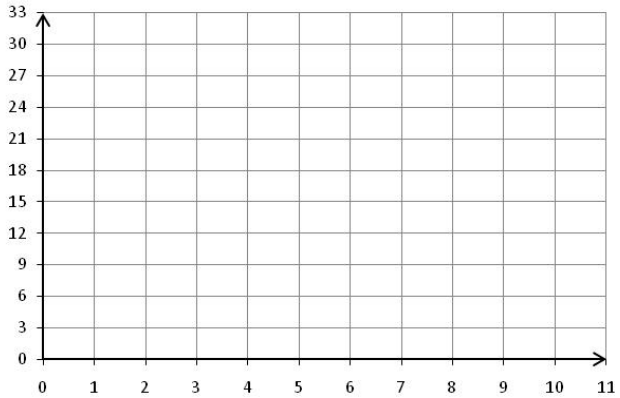
O Rodrigo tem exatamente 3 vezes mais dinheiro do que o Miguel tem na sua carteira.

O que se pode dizer da quantidade de dinheiro que o Miguel e o Rodrigo têm?

1. Na folha de cálculo, organiza uma tabela onde mostres o dinheiro que cada um tem, experimentando para 10 diferentes quantias 'inteiras' na carteira do Miguel.



2. Representa graficamente as quantias totais, em dinheiro, que o Miguel e o Rodrigo podem ter (*com cores diferentes*), em função do dinheiro na carteira do Miguel.



3. Com base na observação do gráfico e da tabela, quem gostarias de ser? O Miguel ou o Rodrigo? Explica a razão da tua opção.

a) Escreve duas expressões com variáveis, cada uma delas representando a quantia de cada amigo.

b) Por observação da tabela e do gráfico, quando é que os dois amigos têm a mesma quantia?

4. O avô do Miguel deu-lhe mais 4€ que ele juntou à quantia que tinha na mão.

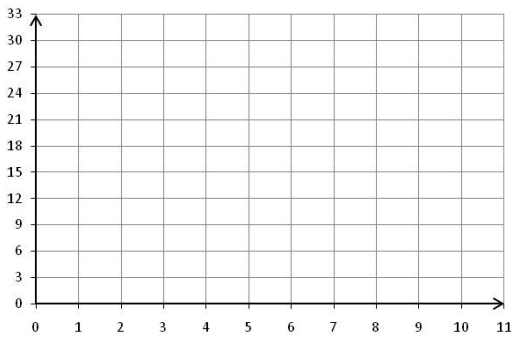
a) Atualiza a tabela com este novo valor e regista as diferenças que trouxe para a tabela e para o gráfico?

	A	B	C	D	E	F
1	Miguel				Rodrigo	
2	Carteira	Mão	TOTAL		TOTAL	
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						
11						
12						
13						
14						

b) Nestas condições, quando é que os dois amigos têm a mesma quantia?

c) Traduz esta situação por uma equação.

d) Resolve a tua equação e verifica a solução, comparando-a com os valores da tabela e com os do gráfico.



Anexo 3

Tarefa das carteiras

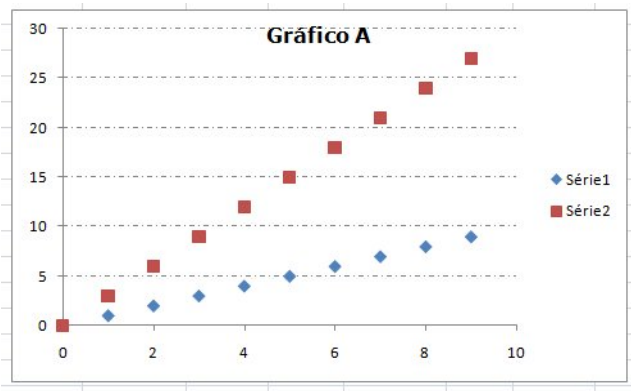
(Ana)

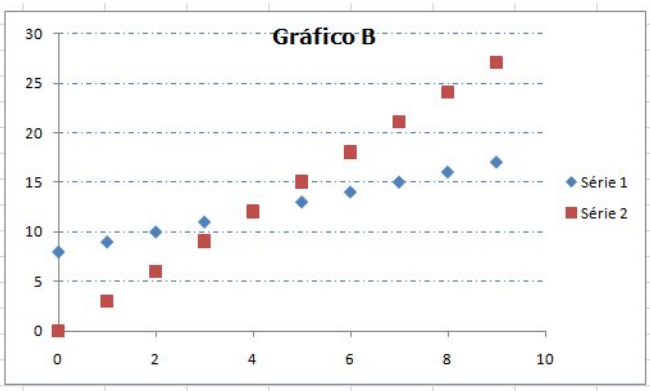


O Miguel tem 8€ na sua mão e o resto do seu dinheiro na carteira. O Rodrigo tem exatamente 3 vezes mais dinheiro do que o Miguel tem na sua carteira. O que se pode dizer da quantidade de dinheiro que o Miguel e o Rodrigo têm?

1. Utiliza o ficheiro de Excel para organizares um conjunto de possibilidades de quantias de dinheiro que o Miguel e o Rodrigo têm.
Nota: usa apenas números inteiros
2. Escreve duas expressões com variáveis que traduzam, respetivamente, a quantia de dinheiro de cada um dos amigos.

3. Qual dos dois gráficos abaixo representa a situação descrita? Justifica a tua opção.





4. No gráfico que escolheste e justificaste, indica quem é quem (Série 1 e Série 2), com base na história e nos valores da tabela.
5. Tendo em conta a tua resposta, quem gostarias de ser? O Miguel ou o Rodrigo? Porquê?
6. O que significa, no gráfico B, o cruzamento das duas linhas? A que valor corresponde na carteira do Miguel? E a que valor na carteira do Rodrigo? Nesse ponto, qual é a quantia total de cada um dos amigos?
7. Como podes relacionar as duas expressões, de modo a traduzirem o ponto em que as retas se cruzam?
8. O avô do Miguel deu-lhe mais 4€ que ele juntou à quantia que tinha na mão. Atualiza a tabela com este novo dado e indica a diferença que trouxe esta nova situação à tabela e ao gráfico.

Anexo 4

Tarefa das sequências lineares

(Ana)

Vamos continuar o nosso trabalho com as sequências de números mas agora temos à nossa disposição um *applet*, programa interativo com fins específicos e que funciona na Internet.

Quando acederes ao applet , encontras um écran semelhante ao da Figura 1.

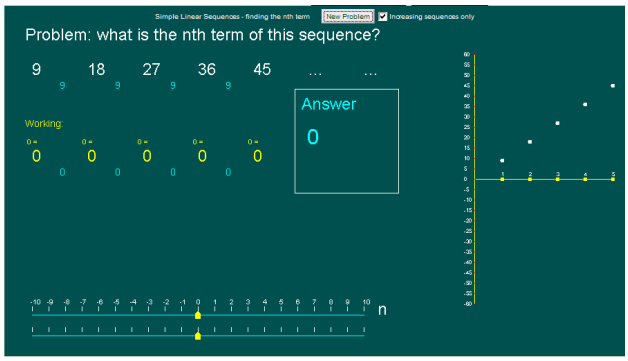


Fig.1

Instruções sobre o applet:

Para criares uma nova sequência, que aparece escrita a branco, no topo do écran, basta clicar no botão



No écran podes encontrar quatro zonas distintas:

(1) A zona das sequências (a branca, gerada pelo computador e a amarela, que tu vais modificar até coincidir com a de cima);

(2) Por baixo, a zona dos seletores, que se movem com o rato e controlam os números da tua sequência;

(3) Ao lado direito, a zona de representação gráfica, com os dois conjuntos de pontos (brancos e amarelos), relativos a cada uma das sequências.

(4) Dentro da caixa retangular, ao centro, a expressão que, em cada momento, traduz a tua sequência (e que varia com os movimentos que fizeres sobre cada um dos seletores).

1ª parte (investigação): Como descubro a sequência com o *applet*?

Acede ao *applet*, no endereço http://www.waldomaths.com/Linseq1NL.jsp. Usa o botão *New Problem*, até encontrares uma sequência só com números positivos.

1.) Regista a sequência de números que selecionaste e diz como estão relacionados os seus elementos.

2.) Agora movimenta o primeiro seletor (o de cima) e observa o que acontece no écran (aos números da sequência e ao gráfico). Procura descrever o que faz este seletor.

3.) Agora movimenta o segundo seletor (o de baixo) e observa o que acontece no écran. Procura descrever o que faz este seletor.

4.) Finalmente, procura agora chegar à sequência gerada pelo computador (a branco), movimentando apenas o 1.º seletor. Conseguiste fazer coincidir a tua sequência (a amarelo) com a dada? Os pontos do gráfico sobrepõem-se? Se sim, regista a expressão que está dentro da caixa ao centro. Se não, movimenta agora o 2.º seletor para conseguires o teu objetivo. Quando o atingires, regista a expressão como foi referido anteriormente.

5.) Gera uma nova sequência em *New Problem* e regista os seus elementos na ficha, para depois os explicares aos teus colegas: os termos da sequência e a forma como crescem, o sentido (para a direita ou para a esquerda) dos movimentos que fizeste com cada um dos seletores e porquê e a expressão final (YES!) na caixa.

2ª parte (problema)**:** Interpretar uma sequência obtida com o *applet*

Observa o écran da Figura 2 e responde às questões justificando o teu raciocínio:

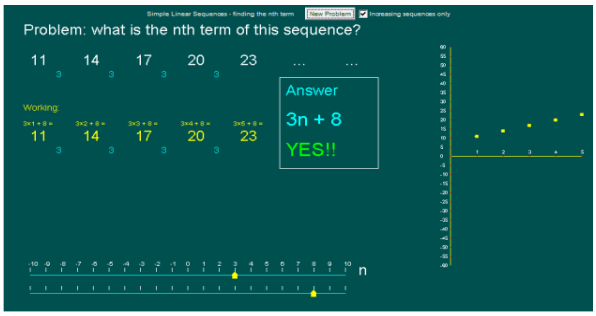


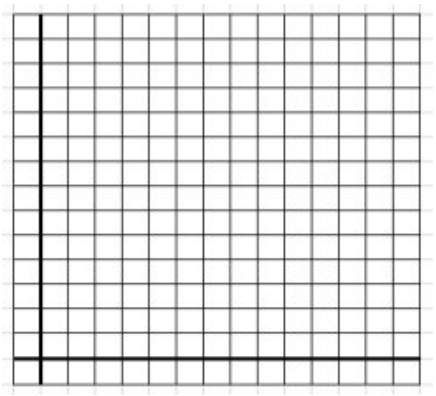
Fig. 2

1.) Indica qual é a ordem do termo desta sequência que tem como valor o número 50.

2.) Será que é possível esta sequência ter um termo cujo valor é 70?

3.) O que distingue esta sequência da sequência dos múltiplos de 3 (sem o zero)? Compara a expressão geradora dos múltiplos de 3, com a expressão da sequência acima. O que concluis?

És capaz de representar graficamente[4] um esboço das duas sequências, de modo a que se percebam os 'seus andamentos'?



[4] Cada ponto do gráfico tem uma coordenada que é a ordem e outra que é o valor do termo. Na sequência acima, o 1º termo que é 11, é representado pelo ponto de coordenadas (1,11). Como serão as coordenadas do ponto que representa o 1º múltiplo de 3?

PRÁTICAS DE ENSINO E DE AVALIAÇÃO DESENVOLVIDAS POR PROFESSORES NO CONTEXTO DA IMPLEMENTAÇÃO E GENERALIZAÇÃO DO PROGRAMA DE MATEMÁTICA DO ENSINO BÁSICO

António Borralho
Centro de Investigação em Educação e Psicologia-Universidade de Évora
amab@uevora.pt

Domingos Fernandes
Instituto de Educação-Universidade de Lisboa
dfernandes@ie.ul.pt

Isabel Vale
Escola Superior de Educação de Viana do Castelo
isabel.vale@ese.ipvc.pt

Resumo: O Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB), em vigor, foi homologado em dezembro de 2007 após um período de cerca de 18 meses de reajustamento do que estava em vigor desde o início dos anos 90 do passado século. Na sequência da homologação iniciou-se, em 2008/2009, um período de experimentação, envolvendo 40 turmas-piloto dos três ciclos do ensino básico (10 do 1.º ano, 10 do 3.º ano, 10 do 5.º ano e 10 do 7.º ano). Este período de experimentação foi planeado tendo em conta um conjunto de medidas de apoio, incluindo o acompanhamento e a formação dos professores experimentadores, o desenvolvimento e a distribuição de materiais e a realização de encontros de professores de natureza diversa. O processo contou com uma estrutura que, além dos 40 professores experimentadores, incluía um Grupo de Coordenação (GC) e um Conselho Consultivo (CC).

De fevereiro a dezembro de 2010, englobando o final do ano letivo 2009/2010 e o início de 2010/2011, uma equipa de investigadores (António Borralho, Domingos Fernandes e Isabel Vale) a pedido da ex-Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular, levou a cabo um estudo tendo em conta os seguintes objetivos: (a) Descrever, analisar e interpretar práticas de ensino e de avaliação desenvolvidas por professores experimentadores e/ou por professores a lecionar no âmbito do processo de generalização; (b) Descrever, analisar e interpretar o envolvimento e a participação dos alunos no desenvolvimento das suas aprendizagens no contexto das salas de aula.

Utilizando uma metodologia de investigação qualitativa de caráter interpretativo, descreveram-se, analisaram-se e interpretaram-se práticas de ensino e de avaliação desenvolvidas por professores quer no contexto da experimentação (2009/2010) quer no contexto da generalização (2010/2011). Os dados foram obtidos através de observações das aulas e de entrevistas semiestruturadas, realizadas junto dos professores e dos alunos do ensino básico envolvidos diretamente no estudo. Recorreu-se igualmente à utilização deliberada de *notas de campo* para registar informações provenientes de conversas informais com professores e alunos, que foram ocorrendo nos contextos onde as entrevistas se realizaram.

O principal propósito deste texto é o de apresentar e discutir alguns dos resultados mais relevantes, dando particular realce às ações desenvolvidas pelos professores e pelos alunos em sala de aula. Isto significa que se analisarão práticas relacionadas com a organização e

desenvolvimento do ensino e da avaliação, incluindo a natureza das tarefas utilizadas, o trabalho realizado pelos alunos e as dinâmicas que se geraram nas salas de aula. Além disso, serão apresentadas algumas reflexões e recomendações que decorrem do trabalho empírico realizado nas escolas participantes neste estudo.

Palavras-chave: Práticas de ensino; práticas de avaliação; implementação e generalização do programa de Matemática.

Introdução

Esta comunicação pretende dar a conhecer um estudo de avaliação que foi concebido e desenvolvido na sequência de um protocolo de prestação de serviços estabelecido entre o Instituto de Educação da Universidade de Lisboa e a ex-Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular (ex-DGIDC) do Ministério da Educação (ME) e que vem na sequência de um outro levado a cabo em 2009/2010 (Fernandes, Vale, Borralho & Cruz, 2010). Realizou-se ao longo de cerca de dez meses (março a dezembro de 2010) por uma equipa de avaliação constituída por Domingos Fernandes, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, António Borralho, da Universidade de Évora, Isabel Vale, da Escola Superior de Educação de Viana do Castelo.

O estudo que agora se apresenta foi organizado tendo em conta os seguintes objetivos principais: a) Descrever, analisar e interpretar práticas de ensino e de avaliação desenvolvidas por professores experimentadores e/ou por professores a lecionar no âmbito do processo de generalização; b) Descrever, analisar e interpretar o envolvimento e a participação dos alunos no desenvolvimento das suas aprendizagens no contexto das salas de aula; c) Avaliar as referidas práticas e a participação dos alunos tendo em conta os principais propósitos constantes no PMEB e noutros materiais curriculares aplicáveis.

É necessário referir que não é legítimo produzir qualquer tipo de generalizações com base nos resultados deste trabalho porque nem a abordagem metodológica utilizada o permite fazer, nem era esse o seu objetivo. Porém, o estudo permite identificar um conjunto de práticas de ensino e de avaliação desenvolvidas por professores dos três ciclos do ensino básico, assim como o envolvimento e a participação dos alunos nos processos pedagógicos que, supostamente, os ajudam a aprender.

Os dados relativos aos 1º e 3º ciclos do ensino básico, foram obtidos em turmas do 4.º e do 9.º anos de escolaridade, respetivamente em 2009/2010 e 2010/2011, ainda no contexto do processo de experimentação. Os dados referentes ao 2.º ciclo, em turmas do 6.º ano de escolaridade, foram obtidos em 2010/2011, já no contexto da generalização.

Os dados recolhidos, num contexto marcado pelo Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB), puderam evidenciar práticas de ensino e de avaliação de professores do ensino básico e dinâmicas de envolvimento e de participação dos alunos nos processos de aprendizagem.

A Teoria do Processo de Experimentação do PMEB

A Teoria de um Programa tem a ver com o estudo, a caracterização e os princípios e/ou pressupostos do que se pretende avaliar que, supostamente, permitirão concretizar as mudanças ou as transformações que se esperam. No fundo, ajuda-nos a conhecer e a compreender como um dado programa funciona; por exemplo, conhecer e compreender as relações entre os seus diferentes elementos, os processos utilizados e os respetivos efeitos nos

resultados que se pretendem obter. Por isso mesmo, desempenha um papel relevante nos estudos de avaliação porque ajuda a concretizar atividades tais como: a) definir as questões mais apropriadas; b) selecionar os procedimentos mais adequados para recolher a informação necessária; e c) identificar os objetos e as dimensões do que se pretende avaliar e que devem merecer particular atenção. Dito de outro modo, a teoria de um dado objeto de avaliação (e.g., projeto, programa, intervenção) não é mais do que um enquadramento conceptual que nos ajuda a determinar de que formas é que esse mesmo objeto visa resolver um determinado problema social (e.g., melhorar o ensino e as aprendizagens dos alunos na disciplina de Matemática; promover o estudo e a reflexão aprofundados do PMEB; incentivar o desenvolvimento do potencial matemático dos alunos).

A Teoria do Processo de Experimentação do PMEB, incluindo a construção do respetivo enquadramento conceptual, foi essencialmente elaborada com base na análise das conceções e teorias implícitas dos stakeholders (alguém que está envolvido em algum processo, que tem ou pode ter responsabilidades em relação a ele e algum tipo de interesse no seu sucesso ou desenvolvimento) mais diretamente envolvidos no processo e numa variedade de dados documentais fornecidos pela ex-DGIDC e disponibilizados em diversos sítios em linha institucionais. Para efeitos desta comunicação, apresentam-se de seguida, em traços gerais, os principais elementos da Teoria do Processo de Experimentação do PMEB:

1 O Ministério da Educação, através da ex-DGIDC, concebeu um plano de concretização do programa nas escolas com ensino básico. Este plano previa medidas tais como: a) a experimentação, em 2008/2009, do PMEB em 40 turmas piloto dos três ciclos do ensino básico (10 do 1.º ano; 10 do 3.º ano; 10 do 5.º ano; e 10 do 7.º ano); b) o início da generalização do PMEB no ano letivo de 2009/2010; c) a produção e distribuição de materiais curriculares de natureza diversa (e.g., brochuras temáticas, tarefas para utilizar nas aulas; planificações); d) uma estrutura de apoio para o início da generalização do PMEB em 2009/2010 (e.g., coordenadores do programa em cada agrupamento; conjunto de professores acompanhantes); e e) a formação dos professores.

2. O processo de concretização do PMEB contou com o apoio de uma estrutura que, no essencial, para além de 40 professores experimentadores, incluiu um Grupo de Coordenação (GC) e um Conselho Consultivo (CC). O GC foi a estrutura que liderou verdadeiramente todo o processo pois coube-lhe conceber, acompanhar e apoiar todas as medidas destinadas a pôr em prática o programa. Para além da Diretora Geral da ex-DGIDC, o GC integrou professores do ensino básico (alguns requisitados na ex-DGIDC) e professores e investigadores universitários das áreas da Matemática e da Educação Matemática, incluindo autores e coordenadores do processo de elaboração do PMEB, num total de oito pessoas. O CC integrava 35 elementos que representavam os principais stakeholders deste processo: os autores do programa; as associações profissionais e científicas; os matemáticos e educadores matemáticos; os professores dos três ciclos do ensino básico; e a administração. As principais atribuições do CC eram as seguintes: a) pronunciar-se sobre as propostas do GC; e b) produzir pareceres e recomendações com base nos relatórios apresentados pelo GC.

3. Os professores experimentadores constituíram, por razões óbvias, um dos mais importantes grupos de stakeholders. A grande maioria era do género feminino, tinha uma idade superior a 40 anos e uma significativa experiência profissional. No que se refere às habilitações académicas e profissionais verificou-se que apenas dois professores não eram detentores do grau de licenciado e que doze tinham adquirido o grau de mestre. Outro dado que interessa destacar é o facto de a grande maioria dos professores experimentadores dos 2.º e 3.º ciclos ter uma significativa experiência como formador no domínio do ensino/aprendizagem da Matemática. Aliás, receberam formação específica para formadores no âmbito do PMEB antes do processo de experimentação. Os professores experimentadores do 1.º ciclo frequentaram ações de formação realizadas por Escolas Superiores de Educação e por Universidades no

âmbito do Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º Ciclo. Em suma, tratava-se de um grupo de professores experimentadores com características pouco comuns (e.g., experiência, envolvimento e interesse profissionais, motivação)

4. O processo contou com um sistema de gestão em que foi notória a partilha do poder por parte da ex-DGIDC numa variedade de matérias relevantes (e.g., produção de materiais, organização e desenvolvimento da formação, seleção dos professores experimentadores). Efetivamente, as decisões nestas e noutras matérias foram significativamente influenciadas por alguns dos principais grupos de stakeholders tais como os autores-coordenadores da conceção e desenvolvimento do PMEB. Além disso, o sistema permitia que os processos de decisão incorporassem contribuições de outros stakeholders relevantes como é o caso dos professores experimentadores. Ou seja, pode dizer-se que o processo de experimentação foi delineado de forma a permitir a participação dos principais intervenientes.

5. O plano de apoio à experimentação do PMEB incluía a produção e difusão de uma diversidade de materiais tais como brochuras sobre vários domínios científicos e pedagógicos, tarefas para utilização imediata nas salas de aula e uma variedade de outros materiais (e.g., textos de apoio; planificações; listagem de sites relevantes) a incluir numa plataforma online. No domínio da formação, todos os professores experimentadores participaram numa ação, ao longo do ano letivo, na modalidade de Oficina de Formação (50 horas presenciais e 50 horas de trabalho autónomo) que, no essencial, foi da responsabilidade dos autores do PMEB. Desenvolveu-se ainda um processo de acompanhamento, da responsabilidade direta da ex-DGIDC, através de uma coordenadora para o 1.º ciclo (coautora do programa e formadora) e outra para os 2.º e 3.º ciclos (formadora dos professores do 2.º ciclo). O acompanhamento consistia em visitas às salas de aula e na realização de reuniões com os professores experimentadores. Para efeitos de agilização das reuniões constituíram-se três grupos de trabalho: um que incluía os professores das Direções Regionais de Educação do Norte e do Centro (DREN e DREC); outro os professores da Direção Regional de Educação de Lisboa e Vale do Tejo (DRELVT); e outro os professores das Direções Regionais de Educação do Alentejo e do Algarve (DREALENT e DREALG). Estes grupos reuniram, em média, uma vez por mês. Além disso, em cada período letivo, realizou-se uma reunião geral, com a presença de todos os professores experimentadores. Finalmente, de modo a tornar possível a participação dos professores experimentadores nas reuniões de trabalho previstas e a concretização dos trabalhos propostos, todos os professores tiveram a sexta-feira livre das componentes letiva e não letiva do seu horário de trabalho. Para além disso, os docentes dos 2.º e 3.º ciclos tiveram 50% de redução do horário letivo e, no caso do 1.º ciclo, os professores experimentadores partilharam as respetivas turmas com um par pedagógico. O processo de experimentação iniciou-se em quarenta turmas-piloto distribuídas equitativamente pelos 1.º, 3º, 5.º e 7.º anos de escolaridade.

A elaboração da Teoria do Processo de Experimentação foi uma condição indispensável para que se pudesse enquadrar devidamente o estudo e, consequentemente, formular as questões de avaliação que pareceram mais adequadas.

Questões de Avaliação

A Figura 1 mostra a Matriz de Avaliação que se concebeu a partir do enquadramento conceptual do Processo de Experimentação do PMEB, da análise feita do processo de generalização e ainda dos objetivos que foram definidos no âmbito deste estudo. A análise da figura mostra que foram considerados três objetos primordiais de avaliação e catorze dimensões que se indicam entre parêntesis:

1. Práticas de Ensino (Planificação e Organização do Ensino; Recursos, Materiais e Tarefas Utilizados; Dinâmicas de Sala de Aula; Papel Predominante de Professores e Alunos; Gestão do Tempo e Estruturação da Aula).

2. Práticas de Avaliação (Integração e/ou Articulação Entre os Processos de Ensino, Avaliação, e Aprendizagem; Utilizações da Avaliação; Tarefas de Avaliação Predominantes; Natureza, Frequência e Distribuição de Feedback; Dinâmicas de Avaliação; Natureza da Avaliação Formativa e da Avaliação Sumativa; Papel Predominante de Professores e Alunos).

3. Participação dos Alunos (Dinâmicas, Frequência e Natureza da Participação; Estratégias Indutoras da Participação).

Como se compreenderá, esta distribuição de objetos e de dimensões constantes na Matriz é, num certo sentido, artificial e foi feita para apoiar os avaliadores a desenvolver as suas ações de recolha e de sistematização da informação. As dinâmicas de sala de aula e a sua complexidade são sempre dificilmente enquadráveis em categorias que muito dificilmente serão disjuntas; na verdade, a maioria das vezes, há sobreposições e interações que não podem ser traduzidas num "modelo" desta ou de qualquer outra natureza. Em todo o caso, tal como é referido por Spaulding (2008), uma matriz de avaliação não é mais do que uma esquematização de um plano que permite orientar os avaliadores no terreno e garantir que a informação relevante não deixa de ser recolhida. Também outros autores fazem referência à importância da construção de uma matriz, ou de algo semelhante, na fase de planificação de uma avaliação (e.g., American Evaluation Association (AEA), 2006; Holden e Zimmerman, 2009; Westat, 2002).

Objectos	Dimensões
Práticas de Ensino	Planificação e Organização do Ensino
	Recursos, Materiais e Tarefas Utilizados
	Dinâmicas de Sala de Aula
	Papel Predominante de Professores e Alunos
	Gestão do Tempo e Estruturação da Aula
Práticas de Avaliação	Integração/Articulação Entre os Processos de Ensino/Avaliação/Aprendizagem
	Utilizações da Avaliação
	Tarefas de Avaliação Predominantes
	Natureza, Frequência e Distribuição de Feedback
	Dinâmicas de Avaliação
	Natureza da Avaliação Formativa e da Avaliação Sumativa
	Papel Predominante de Professores e Alunos
Participação dos Alunos	Dinâmicas, Frequência e Natureza da Participação
	Estratégias Indutoras da Participação

Figura 1: Matriz de Avaliação

A matriz mostra, claramente, que os objetos primordiais deste estudo de avaliação são as práticas de ensino e de avaliação dos professores e a participação dos alunos. As respetivas dimensões não são mais do que um conjunto de elementos ou componentes que ajudam a

caracterizar cada um dos objetos. Foram feitas opções baseadas em três critérios fundamentais: a) os propósitos e termos de referência do estudo; b) as orientações constantes no Programa de Matemática do Ensino Básico (2007) e c) as indicações constantes na literatura (e.g., Bishop, 2003; Black e Wiliam 1998; Bonesi e Souza, 2006; English, 2001; Fernandes, 2005, 2008; Jaworski e Wood, 2008; NCTM, 2000f Nevo, 2006; Lester, 2007; Saha, Lawrence, Dworkin e Gary (Eds.), 2009; Steinbring, Bussi e Sierpinska, 1998).

Tendo em conta a matriz constante na Figura 1, particularmente os seus objetos primordiais, e as considerações elaboradas a propósito foram definidas três questões orientadoras do estudo:

1. Como é que se poderão caracterizar as práticas de ensino e de avaliação dos professores participantes no estudo?

2. Como é que se poderá caracterizar a participação dos alunos nos processos pedagógicos e didáticos e nas atividades das aulas?

3. Como é que se poderão avaliar as práticas de ensino e de avaliação dos professores e a participação dos alunos, tendo em conta as perspetivas pedagógicas e didáticas constantes no programa de Matemática do ensino Básico?

As três questões que orientaram o estudo foram complementadas com um conjunto de outras sub-questões que decorreu das dimensões que se definiram para cada um dos objetos.

Metodologia

Tendo em conta as questões de avaliação que se formularam, os dados foram obtidos através de observações das aulas e de entrevistas semiestruturadas, realizadas junto dos professores e dos alunos do ensino básico envolvidos diretamente no estudo. Recorreu-se, igualmente, à utilização deliberada de *notas de campo* para registar informações provenientes de conversas informais com professores e alunos, que foram ocorrendo nos contextos onde as entrevistas se realizaram.

Neste estudo participaram seis professores, dois por cada um dos ciclos do ensino básico, que lecionavam turmas do 4.º, do 6.º e do 9.º anos de escolaridade. Como já foi referido, as turmas do 4.º ano (observadas na fase final do ano letivo de 2009/2010) e as do 9.º ano (observadas no ano letivo de 2010/2011) integravam ainda o chamado processo de experimentação do PMEB. As turmas do 6.º ano foram observadas no ano letivo de 2010/2011 e, por isso, já se encontravam no processo de generalização do programa.

Tendo em conta os objetivos do estudo pareceu que poderia ser útil produzir narrativas referentes às observações e entrevistas que, acima de tudo, relatassem e induzissem reflexões acerca de práticas de ensino e de avaliação dos professores participantes por cada ciclo de escolaridade.

Neste sentido, os avaliadores concentraram-se na descrição e análise, tão integrada quanto possível, do que lhes foi dado constatar nas duas salas de aula observadas de cada ciclo, produzindo assim apenas uma narrativa integrada por ciclo. Esta abordagem, no entanto, não inibiu os avaliadores de, sempre que necessário, chamar a atenção para as diferenças existentes entre as turmas ou entre os professores de um dado ano.

No total foram observadas 63 aulas ou sessões, correspondendo a cerca de 94 horas, nas seis turmas que participaram no estudo, distribuídas do seguinte modo: 21 aulas no 4.º ano, 20 aulas no 6.º ano e 22 aulas no 9.º ano. Os seis professores participantes foram, formal e

individualmente, entrevistados uma vez cada um, num total de cerca de 10 horas de tempo de entrevista.

As entrevistas aos alunos foram organizadas em quatro grupos por cada ano de escolaridade (quatro grupos, de três alunos cada, nos 4.º e 6.º anos de escolaridade e quatro grupos no 9.ºano, dois com três e dois com cinco alunos). Assim, foram entrevistados 38 alunos (12 do 4.º ano, 12 do 6.º ano e 16 do 9.º ano) num total aproximado de 6 horas de tempo de entrevista. Todas as entrevistas foram áudio-gravadas e integralmente transcritas. As observações foram feitas manualmente e, em muitos casos, apoiadas com registos fotográficos. Quer as entrevistas, quer as observações foram realizadas com o apoio de *guiões* pouco formais e pouco estruturados porque a intenção era, deliberadamente, a de procurar registar tudo o que se podia relativamente a cada um dos três " grandes objetos" do estudo. No entanto, tais "guiões" foram pensados tendo em conta os principais referentes a matriz e as questões de avaliação.

Este estudo de avaliação é descritivo, analítico e interpretativo por natureza e, por isso, decidiu-se que o tratamento dos dados deveria seguir de perto as recomendações de Wolcott (1994). A Figura 2 sintetiza os procedimentos utilizados na transformação dos dados obtidos.

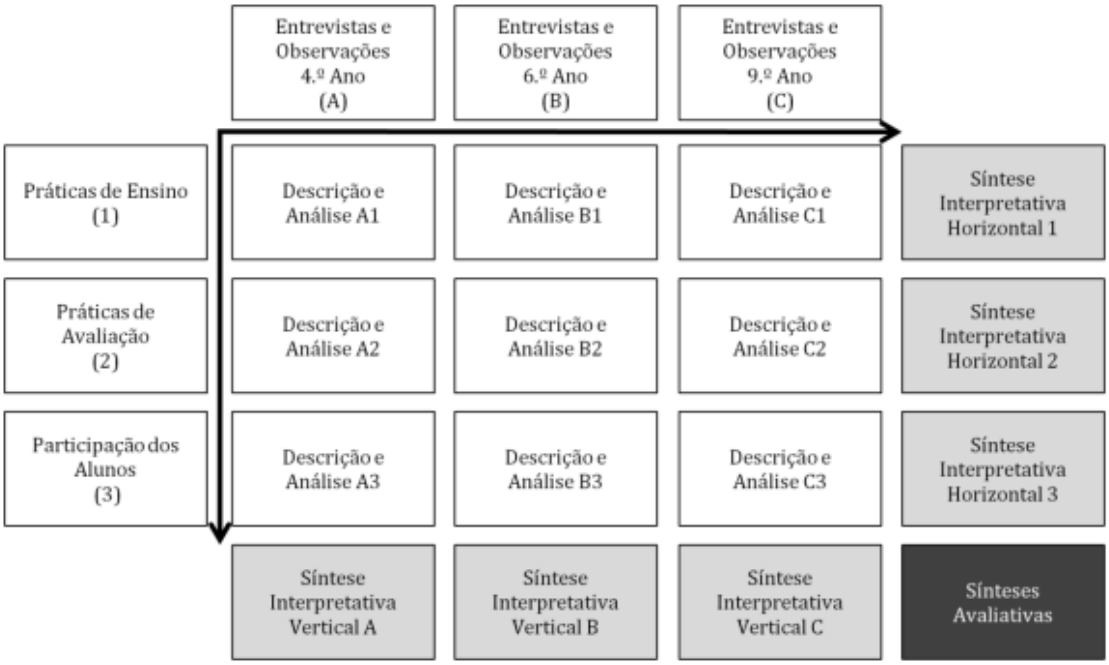


Figura 2: Esquema geral dos procedimentos utilizados na sistematização, análise e síntese dos dados

Como se ilustra na Figura 2, a organização e sistematização da informação obtida foi essencialmente feita com base nos dados recolhidos através de entrevistas e observações, junto dos professores e alunos dos 4.º, 6.º e 9.º anos de escolaridade.

Refira-se ainda que a produção das narrativas para cada um dos ciclos, a partir das descrições e análises obtidas, foi objeto de um escrutínio rigoroso por parte dos avaliadores que, em termos gerais, se pode sintetizar na Figura 3.

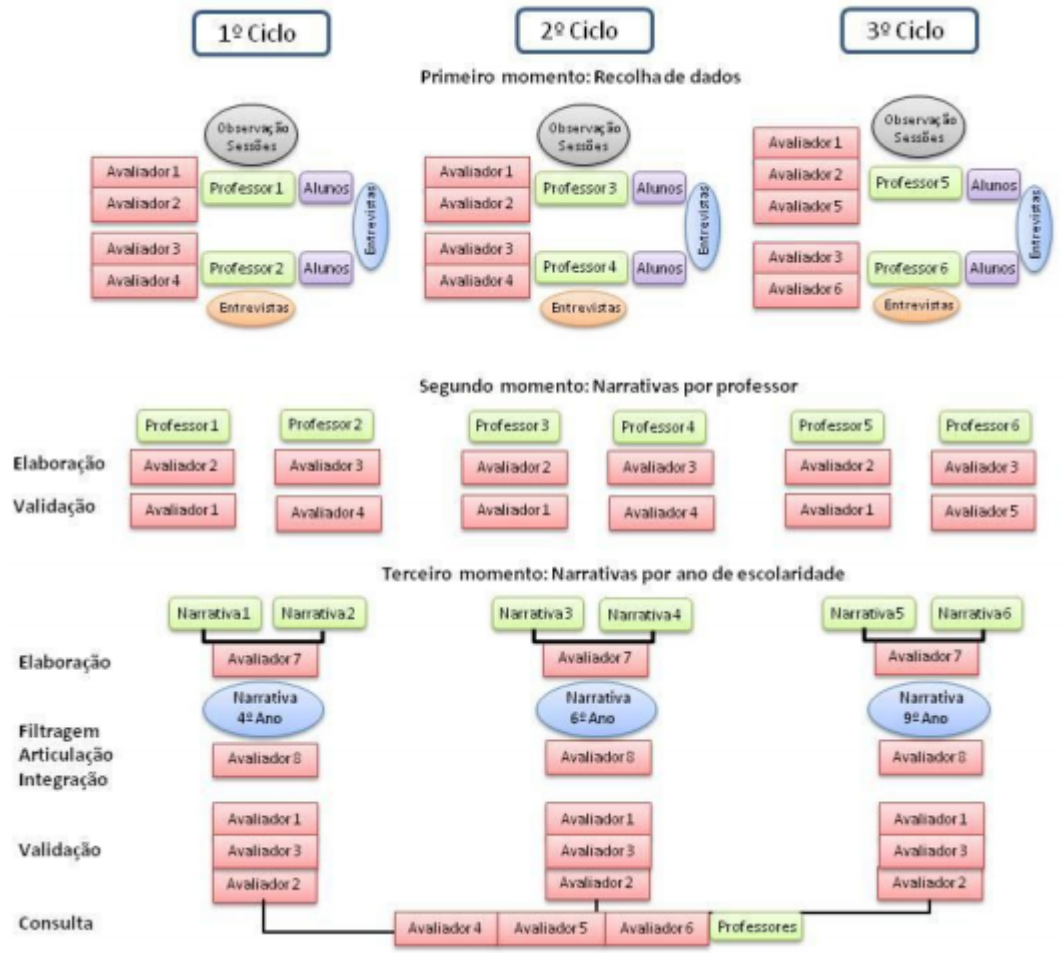


Figura 3: Processo de produção das narrativas

Por outro lado, foram considerados os três objetos primordiais de avaliação que constam da matriz que se apresentou no Figura 1. Desta forma, para cada um dos grupos intervenientes, por ciclo de escolaridade, produziu-se uma *Síntese Interpretativa Vertical* construída a partir da narrativa construída para cada ciclo, a partir dos dados obtidos junto dos intervenientes, relativamente a cada um dos objetos de avaliação. Seguindo a mesma lógica, para cada um dos objetos de avaliação, elaborou-se uma *Síntese Interpretativa Horizontal* que é construída com base na narrativa elaborada para cada ciclo relativamente a um dado objeto de avaliação. Este procedimento permitiu obter *Sínteses Avaliativas* que resultaram de uma análise cruzada das *Sínteses Verticais* e das *Sínteses Horizontais*.

É uma dessas sínteses avaliativas, construídas a partir das narrativas produzidas e com base na matriz de avaliação, que aqui se apresenta.

A Evidência da Informação Recolhida

Nesta secção apresentam-se os dados mais significativos relativos ao 4º ano de escolaridade, obtidos a partir, essencialmente, de entrevistas e observações realizadas. Esta opção prende-se com o facto de muita da informação veiculada nesta narrativa ter semelhanças com as restantes narrativas.

Os dados, nesta comunicação, dizem respeito aos seguintes objetos e dimensões: a) práticas de ensino (planificação e organização do ensino; recursos, materiais e tarefas utilizados;

dinâmicas de sala de aula; papel predominante de professores e alunos; gestão do tempo e estruturação da aula); b) práticas de avaliação (integração/articulação entre os processos de ensino/avaliação/aprendizagem; utilizações da avaliação; tarefas de avaliação predominantes; natureza, frequência e distribuição de *feedback*; ; dinâmicas de avaliação; natureza da avaliação formativa e da avaliação sumativa; papel predominante de professores e alunos). Não se integram nesta narrativa os dados referentes ao objeto de estudo "Participação dos alunos" uma vez que nos centramos nas práticas de ensino dos professores, onde as práticas de avaliação esto integradas, embora seja possível ficar com uma perceção muito clara sobre a participação dos alunos nos processos de ensino, avaliação e aprendizagem.

Narrativa do 4º Ano

Práticas de Ensino

Planificação e Organização do Ensino. Os dados recolhidos no âmbito do 1º Ciclo do Ensino Básico permitiram constatar que a formação que os professores tiveram no decorrer do processo de experimentação foi um aspeto relevante no apoio à planificação e organização do ensino. Para além da formação obtida, foram também apontados alguns recursos importantes, tais como documentos disponibilizados pela ex-DGIDC (e.g., materiais online, brochuras) e livros que permitiram planear o ensino de acordo com os objetivos estabelecidos. As palavras que se seguem, de um dos professores participantes, ilustram a presença e a importância de tais recursos.

> As brochuras da DGIDC, outras também invento eu. Tenho feito pesquisas, compro livros. Tenho tirado muitas tarefas de livros que tenho comprado, (…). Pronto, é por aí. E a DGIDC também tem agora na página uns interessantes e brochuras que também nos forneceram. (Professor do 1º Ciclo)

Também as reuniões de trabalho que aconteceram durante a fase de experimentação se revelaram particularmente importantes porque, entre muitas outras coisas, era nesse contexto que se elaboravam planificações em conjunto com os restantes colegas. Como se pode verificar pelas palavras de um dos professores participantes, a planificação e organização do ensino tinha um destaque muito particular no trabalho individual e coletivo dos docentes envolvidos no processo.

> Primeiro que tudo, fazemos, no início do ano, a planificação anual. (…) Temos que ver, primeiro, quais os objetivos que fazem parte do programa e (…) tentar arranjar atividades e tarefas dentro disso. Nós fazíamos este trabalho muito com os colegas que faziam parte aqui do grupo do sul. As planificações, os tópicos eram feitos em conjunto nas reuniões que havia mensais (…) fazíamos uma escolha entre todas as tarefas (…) e cada um lá aparecia com aquilo que conseguia encontrar… (Professor do 1º Ciclo)

Este trabalho conjunto, entre colegas, revelou-se particularmente importante no momento de estudar e aprofundar novos conceitos. Foi referido que, sempre que um professor sentia necessidade de esclarecer dúvidas sobre conceitos que nunca tinham sido trabalhados, era normal recorrer aos seus pares.

A seleção e utilização das tarefas pareceu ocupar sempre um lugar de destaque na planificação e no desenvolvimento do ensino no contexto das salas de aula. Na verdade, pode dizer-se com segurança que era a partir das tarefas que se desenvolvia toda a organização do ensino. Era a partir da resolução das tarefas que se abria caminho ao estudo de procedimentos e conceitos, numa sequência lógica, destinada a mostrar o encadeamento dos diferentes tópicos do programa. Convém salientar nesta altura que a importância das tarefas na construção de

conceitos por parte dos alunos foi um dos temas bastante trabalhados na formação dos professores. Em particular, a utilização de tarefas, utilizando materiais manipuláveis ou outros, através das quais os alunos pudessem participar ativamente na construção dos seus conhecimentos.

> São eles que têm de lá chegar. Eu nunca dou a noção. Eles é que chegam lá. E chegam muito bem! É interessante. Eles dizem: Oh professor, já descobri uma coisa! Não é preciso fazer assim, se fizermos assim chegamos lá. (...) É muito mais interessante para nós, professores, perceber que partem deles. E para eles também. (Professor do 1º Ciclo)

No que diz respeito à sequência das aulas é importante salientar a estrutura faseada das mesmas. Num primeiro momento apresentava-se a tarefa a realizar, de seguida os alunos desenvolviam o trabalho em grupos e, no final de cada aula, dedicava-se tempo ao debate geral na turma que, invariavelmente, terminava com uma síntese final. As aulas observadas pareciam estar apoiadas numa estrutura bem definida. Consequentemente, as planificações previam normalmente uma sequência de tarefas ricas que possibilitavam a exploração de vários tópicos matemáticos de grau crescente de complexidade.

É sabido que, quando são introduzidos novos conceitos, a planificação do ensino assume particular relevância. Neste aspeto foi interessante verificar que os professores recorriam a situações reais e quotidianas para facilitar a identificação dos alunos com determinada tarefa e, consequentemente, com o que tinham de aprender.

> Normalmente, começava por uma situação em que houvesse necessidade de recorrer a algum conceito que eles não conheciam. (…) Podia ser matemática ou não matemática… podia ser uma situação do dia a dia! (…) Normalmente, colocava sempre uma questão. Por vezes formulava uma questão oral. Muitas vezes era um pequeno trabalhinho, para ver até onde eles conseguiam chegar em determinadas coisas. (Professor do 1º Ciclo)

Ao longo das aulas observadas e dos contactos que se estabeleceram com os professores participantes, foi possível perceber que estavam bem cientes da importância da planificação no desenvolvimento das tarefas nas salas de aula (e.g., procedimentos de resolução, diálogos a estabelecer, *feedback*). Efetivamente, a planificação era vista como um meio útil para que os alunos pudessem evoluir em direção aos objetivos propostos. No entanto, os professores também puderam constatar a existência de situações que não se conseguem prever e para as quais é necessário encontrar estratégias de resolução.

> Costumo planificar se não via-me aflito às vezes. Agora, por vezes, surgem muitas coisas na aula que eu não estava à espera. (...) Consigo planificar alguma coisa e prever alguma coisa que possa acontecer para que eles possam responder. Mas, muitas vezes, também se ultrapassam as minhas previsões, não é? Eles surgem com coisas que eu nunca pensei que lá chegassem. (...) E depois tenho de dar a volta. É assim mesmo (...). (Professor do 1º Ciclo)

A análise das planificações dos professores permitiu identificar exemplos em que era deixado espaço para que os alunos, de forma mais ou menos orientada, pudessem participar e refletir sobre o seu próprio trabalho com uma determinada tarefa. É o que se pode verificar através do exemplo que se segue em que, numa planificação, se formula um conjunto de questões a propor aos alunos.

> Algumas questões a colocar:
>
> - Em quantos retângulos está dividido o chocolate?
>
> - Qual a fração que representa cada retângulo?
>
> - E qual a que representa dois dos retângulos? Serás capaz de representar de outra forma?

- Como podes representar a parte do chocolate que a Mariana comeu no primeiro dia? E no segundo?

- Será que é preciso partir um retângulo de chocolate para que ela possa continuar a comer chocolate até ao sábado?

- Quando partes um retângulo de chocolate ao meio que fração representa essa quantidade? (Planificação de aula)

Recursos, Materiais e Tarefas Utilizados. As brochuras da ex-DGIDC, da Associação de Professores de Matemática (APM) e das Instituições de Ensino Superior que estiveram envolvidas na Formação Contínua para professores do 1º Ciclo, foram, no essencial, as principais fontes de recolha e seleção de tarefas a utilizar nas salas de aula: " (…) Íamos buscar várias brochuras da APM, das ESE's (…) ". (Professor do 1º Ciclo)

Na generalidade das aulas observadas, os professores recorriam regularmente à utilização do quadro interativo e do quadro tradicional, assim como às calculadoras. Nas planificações analisadas constavam, invariavelmente, referências aos materiais a utilizar numa dada aula, tais como os enunciados com as tarefas e as máquinas de calcular.

De modo geral, os alunos registavam por escrito as suas produções matemáticas quer em fichas de trabalho, quer em folhas de resposta, quer ainda nos seus cadernos. Tais produções dos alunos resultavam das tarefas que lhes eram apresentadas. A este propósito foi possível constatar a preferência de alguns alunos pelos aspetos mais procedimentais ou algorítmicos e de outros pelos aspetos mais conceptuais, envolvendo processos mais complexos de pensamento. Para estes alunos os problemas, as investigações e alguns jogos matemáticos constituíam sempre desafios que apreciavam. Deve aqui sublinhar-se que vários alunos reconheciam a importância de compreender o que estavam a fazer, considerando que, quando necessário, só fazia sentido memorizar o que quer que fosse se, antes, o tivessem compreendido.

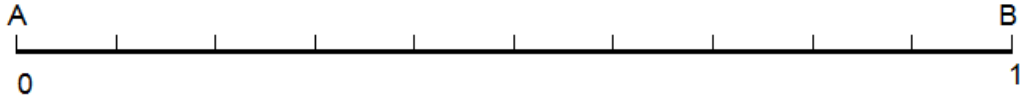
A generalidade das tarefas era de natureza exploratória, suscitando uma variedade de questões problemáticas. Veja-se o seguinte exemplo:

Tarefa: Percursos

A turma do João organizou um percurso pedestre ao Parque Natural da Serra d'Aire e Candeeiros, representado na figura por (AB).

A Maria parou para descansar depois de ter feito 25 do percurso, a Joana parou ao fim de 410, o Francisco ao fim de 35 e os restantes elementos da turma ao fim de 710 do percurso.

Assinala, no segmento (AB) abaixo traçado, o ponto que corresponde a cada uma das paragens referidas.



Sabendo que o percurso era de 4 km, quantos quilómetros tinham sido feitos pela Maria quando parou para descansar? E pela Joana? Que podes concluir acerca do percurso feito pelas duas meninas quando pararam para descansar? Justifica a tua resposta.

> O João quando fez a sua primeira paragem tinha percorrido 56 do percurso feito pelo Francisco antes de parar. Quantos quilómetros já tinha percorrido o João? (Planificação de aula)

Em geral os professores introduziam as tarefas para que os alunos, através da sua resolução, compreendessem a sequencialidade dos diferentes tópicos trabalhados. Nestas condições, a seleção das tarefas era feita de forma a que houvesse uma relação e uma articulação entre elas no que se referia, por exemplo, aos tópicos abordados.

> A tarefa de hoje vem na continuação do que temos vindo a trabalhar, aplicado a outro contexto, mas de modo a serem ultrapassadas dificuldades que ainda vão surgindo. (Observação de aula)

A propósito da utilização de estratégias de ensino promotoras das aprendizagens por parte dos professores, é possível afirmar que, de acordo com os dados obtidos, houve uma vincada preocupação em garantir que os alunos compreendessem o que tinham que fazer e o que efetivamente faziam. Neste sentido, os professores pareceram estar sintonizados com as orientações implícitas e explícitas do novo programa que, como se sabe, valoriza o papel da compreensão e da construção de sentidos no desenvolvimento das aprendizagens por parte dos alunos. Apesar da importância dada aos procedimentos e aos algoritmos, os professores desenvolviam o seu trabalho para que os alunos compreendessem o que era necessário aprender em cada momento.

Por outro lado, também foi possível verificar que os professores participantes orientavam o seu ensino para que os alunos desenvolvessem as suas capacidades transversais, em particular no que se refere à comunicação e às questões relacionadas com a linguagem matemática.

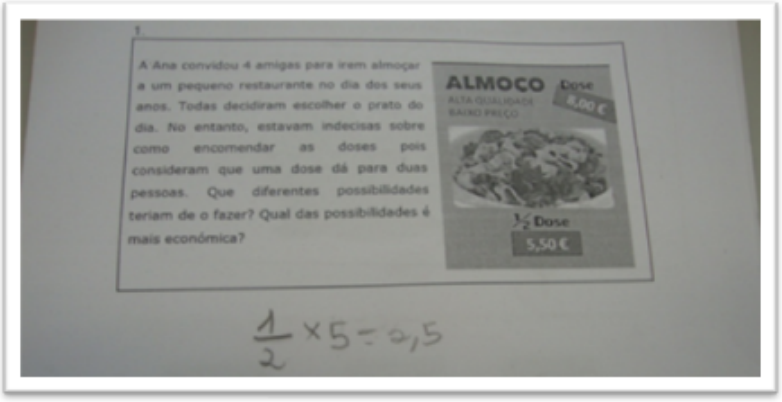


Figura 4. Exemplo de uma tarefa, pelos Autores, 2010. Utilizada com permissão.

Verificou-se, assim, que as tarefas utilizadas proporcionavam os contextos apropriados para um ensino e uma aprendizagem consentâneos com as orientações concretas do novo programa de Matemática do ensino básico. Foi ainda interessante verificar que os alunos, em geral, privilegiavam as tarefas que permitiam vários processos de resolução.

A descrição que se apresenta a seguir e que resultou da observação de uma aula, ilustra, entre várias outras coisas, a relevância e o papel desempenhado pelas tarefas no ensino e na aprendizagem.

> Na segunda parte da aula (cerca de 60 minutos) os alunos organizam-se em grupos de 4 e é entregue a cada aluno uma ficha de trabalho (...). No grupo em que observei o trabalho, a chefe começou por ler o problema. Sublinharam os termos "4 amigas" e concluíram que se tratava de cinco meninas. Um aluno começou por fazer logo o seguinte cálculo:
>
> As colegas perguntaram o que era aquilo e ele explicou que, se uma dose dava para duas, era para saber quantas doses eram precisas.

Outra aluna disse que tinham de multiplicar 8 por 2 porque eram duas doses para 4 e depois era precisa mais uma meia dose para a 5ª menina que custava 5,50 €.

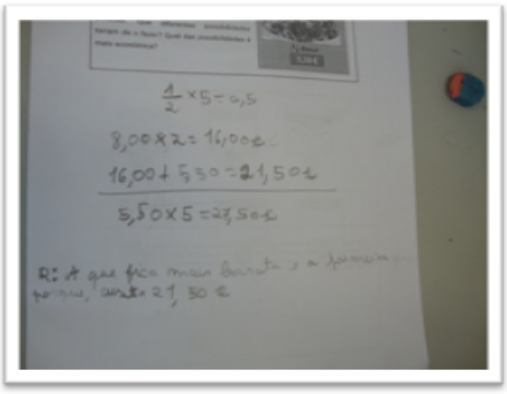


Figura 5. Resolução da tarefa ilustrada anteriormente, pelos Autores, 2010. Utilizada com permissão

Pareciam estar satisfeitos com o trabalho. Eu intervim dizendo para voltarem a ler. Concluíram que era necessário explorar outras possibilidades. Surgiu então finalmente o trabalho mais completo com duas hipóteses e resposta final:

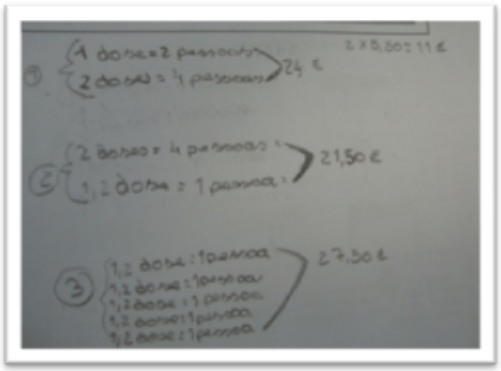


Figura 6. Resposta final à tarefa, pelos Autores, 2010. Utilizada com permissão

Noutros grupos surgiram resoluções com hipóteses e apresentações diferentes conforme pode ver-se:

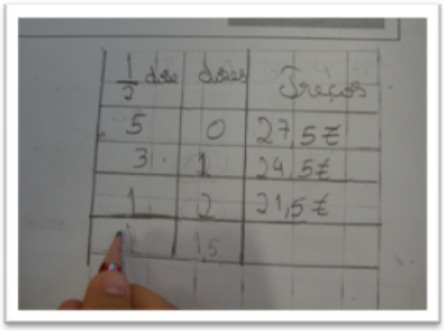


Figura 7. Outra resolução da tarefa, pelos Autores, 2010. Utilizada com permissão.

Salienta-se a última resolução, em que o grupo decidiu fazer uma tabela e teve algumas dificuldades em decidir o que colocar, como se pode ver pelo papel apagado. Esta versão foi ainda completada com uma coluna intercalada antes do preço cujo título era "Cálculos", para poderem mostrar donde vinham os valores finais, embora os tivessem calculado mentalmente.

> Fez-se depois a síntese no quadro. A aluna que foi ao quadro era deste último grupo. Depois da explicitação das várias possibilidades, o professor pediu para intervir só os grupos que tivessem uma outra possibilidade. Vários grupos tinham ponderado a hipótese de 3 doses e o aluno que interveio afirmou que concluíram que, embora a comida fosse a mais, ainda ficava mais barato que cinco meias doses, embora não fosse a solução mais económica.

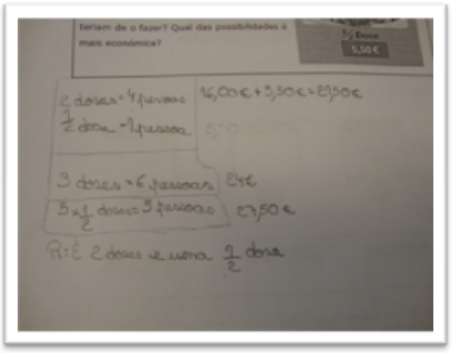


Figura 8. Resolução da tarefa feita por outro grupo, pelos Autores, 2010. Utilizada com permissão.

> A aula continuou nos mesmos moldes com a resolução de outros problemas. (Observação de aula)

Dinâmicas de Sala de Aula. As aulas observadas foram, em geral, vivas, dinâmicas e sem perturbações assinaláveis de qualquer natureza. O ensino e o desenvolvimento das atividades dos alunos decorreram sem problemas. Os alunos tiveram sempre oportunidades para participar espontaneamente no desenvolvimento das aulas, quer expondo os seus pontos de vista, quer solicitando o apoio dos professores, sempre que necessário. Apesar disso, por vezes, os professores solicitavam expressamente aos alunos que interviessem e que participassem nas discussões.

Apesar das aulas não obedecerem todas a um modelo rígido e repetitivo, a verdade é que foi possível identificar quer ao nível da estrutura organizacional, quer ao nível das dinâmicas estabelecidas, elementos que, num certo sentido, integravam a chamada "aula típica". Invariavelmente as aulas continham sempre um momento em que uma dada tarefa era proposta aos alunos que, com o apoio dos professores, procediam a uma fase de compreensão da mesma através de um diálogo em grande grupo. Depois, em pequenos grupos de trabalho (de dois ou três alunos), e de forma autónoma, os alunos desenvolviam atividades necessárias para a resolução da tarefa. Apesar de, por força da organização física das carteiras e dos espaços, os alunos estarem dispostos dois a dois, de forma convencional, os professores, reconhecendo a importância da interação social entre os alunos, promoviam a sua organização em grupos de três e de quatro.

A constituição dos grupos ia variando ao longo do desenvolvimento das diversas tarefas, para que existisse heterogeneidade nos elementos dos grupos e nas estratégias apresentadas pelos mesmos, como se pode verificar pelas palavras que se seguem de um dos professores.

> (…) dependia um pouco, mas uns dias mais homogéneos, outros dias mais heterogéneos. Umas vezes, tentava juntar aqueles alunos que têm menos capacidades e têm dúvidas, outras vezes misturava os alunos, uns com mais capacidade, outros com mais dificuldade, numa tentativa de que se ajudassem uns aos outros. (Professor do 1º Ciclo)

A imagem seguinte ilustra um momento de um grupo de trabalho de três alunos. Esta dinâmica foi utilizada com bastante frequência ao longo de todas as aulas observadas.



Figura 9. Alunos a trabalhar em grupo, pelos Autores, 2010. Utilizada com permissão.

Após a resolução da tarefa, todos os alunos eram incentivados a participar num debate em que se apresentavam, discutiam e avaliavam as diferentes abordagens utilizadas. Segundo um dos professores entrevistados "acaba-se uma tarefa, explica-se e faz-se ali uma discussão…". Os debates e as discussões centrados na resolução das tarefas, tornaram-se parte integrante da dinâmica instituída nas aulas. Disse um dos professores participantes: "…portanto, em todas as aulas há discussão".

As rotinas criadas através da estrutura das aulas e das dinâmicas instituídas, ajudaram a estabelecer e a consolidar hábitos e regras de trabalho, compreendidas e aceites por todos, que pareceram ter um papel fundamental na criação de um clima responsável e bastante favorável ao desenvolvimento do currículo e das aprendizagens.

A maioria dos alunos das turmas observadas adaptou-se sem problemas assinaláveis às dinâmicas de sala de aula que se acima se descreveram. Porém, é importante realçar o caso dos alunos que revelaram mais dificuldades e que necessitaram de um apoio mais individualizado. Na verdade, os professores pareceram não lidar bem com estas situações, sobretudo porque, na sua opinião, não tinham tempo para prestar a estes alunos a atenção necessária para os ajudar a ultrapassar as suas dificuldades. Consequentemente, evidenciavam sentimentos como os que é possível inferir da seguinte transcrição.

> (...) e é isso que, às vezes, me desmotiva um bocadinho porque queria dar mais, mas não há tempo. São meninos um bocadinho limitados. E depois fico assim: como é que uns se despacham tão rápido, e depois aqueles… Embora, por exemplo, lhes dê trabalho à parte, muitas vezes fiz trabalhos separados com eles, nota-se que falha ali qualquer coisa naqueles meninos. Precisavam de uma atenção mais individualizada e que nós nem sempre temos tempo, embora estejamos dois na sala… (Professor do 1º Ciclo)

Mesmo com dois professores numa sala foi possível constatar as dificuldades evidenciadas em lidar com alunos que, por qualquer razão, não progridem tão rapidamente como outros.

Os alunos, naturalmente, partilharam com os avaliadores as suas perspetivas e opiniões sobre tudo o que ia acontecendo nas aulas e, em particular, sobre a natureza das tarefas, as dinâmicas de sala de aula e as suas rotinas. Relativamente à forma de trabalhar as suas preferências revelaram-se bastante diversificadas. Por exemplo, como ilustram as transcrições que se seguem, uns não gostavam de trabalhar individualmente, preferindo trabalhar em pares.

> Eu gosto de fazer alguns trabalhos a pares porque o meu par pode ter uma ideia e eu tenho outra. Esclarecemos um com o outro. Se algum estiver errado (…) é a outra que fazemos. Se essa pessoa estiver certa, fazemos essa. (Aluno do 1º Ciclo)

> Eu não gosto de trabalhar muito individualmente porque acho que fico insegura. Mas gosto de trabalhar em pares, em conjunto, as duas coisas acho sempre muito bonito. Porque, em conjunto, raciocinamos ao mesmo tempo. Gosto muito porque… sinto-me insegura, parece que não vou conseguir fazer esta ficha. (Aluno do 1º Ciclo)

Os professores participantes reconheceram que as dinâmicas geradas pelo processo de experimentação do PMEB nas salas de aula acabaram por se refletir de forma importante na participação e no envolvimento dos alunos. Em particular, nas formas como os alunos organizam e preparam as suas respostas perante os desafios das tarefas propostas pelos docentes. Um dos professores entrevistados considerou que todos os docentes deveriam ter tido a oportunidade de participar no processo de experimentação pois, segundo referiu " (…) esta experiência (…) valorizou-me muito a mim e aos meus alunos. E repetia se fosse possível". Ainda de acordo com o mesmo professor, os professores que não passaram por esta experiência poderão não compreender o que está verdadeiramente em causa e vir a ter dificuldades na concretização plena do espírito e da letra do novo programa.

Papel Predominante de Professores e Alunos. As observações realizadas ao longo deste estudo de avaliação permitiram perceber que os professores participantes tiveram e assumiram sempre, o papel principal no desenvolvimento e na gestão do trabalho escolar nas salas de aula. Porém, isto não significa que os alunos não participaram e que não se envolveram nas tarefas propostas. Como já foi referido anteriormente, as aulas seguiam uma sequência que incluía momentos de discussão e debate envolvendo os alunos, quer em pequenos grupos, quer em grande grupo. A descrição do que se passou nas aulas ajuda a compreender melhor o papel desempenhado pelos professores. É o que se fará de seguida, procurando integrar o que, em geral, se passava nas salas de aula observadas.

Em geral, as aulas iniciavam-se com a apresentação de uma tarefa a realizar distribuindo o enunciado da mesma. Por vezes, fazia uma breve exploração inicial das atividades, questionando os alunos, de forma a cativar e chamar a sua atenção para o conteúdo da tarefa. Enquanto os alunos desenvolviam as atividades decorrentes das tarefas, o professor percorria sempre a sala de aula, observando o trabalho realizado, fornecendo indicações e esclarecendo dúvidas manifestadas pelas crianças. Estas interações do professor com os alunos permitiam que ambos recebessem *feedback* relativamente à forma como estavam a decorrer as suas atividades.

Nos momentos de discussão, os alunos eram muitas vezes questionados pelo professor que, ao mesmo tempo, ia gerindo as suas intervenções. Ao longo desta fase, o professor tinha a preocupação de orientar os alunos, reformulando questões e procurando que a turma, de algum modo, fosse capaz de chegar a conclusões consensuais. Verificou-se que o questionamento aos alunos esteve, por norma, presente com vários propósitos, nomeadamente o de saber se os alunos compreendiam o que era necessário compreender. Invariavelmente eram utilizadas questões tais como "Mas porquê? Como é que explicas o que fizeste? Não estou a perceber… explica lá!". Normalmente, em cada aula, o professor fazia uma síntese final, sistematizando conclusões e aprendizagens realizadas. Poder-se-á salientar três aspetos fundamentais relacionados com o papel desempenhado pelos professores participantes: (1)A distribuição atempada e oportuna de *feedback*; (2) A ação desenvolvida no sentido de conseguir que todos os alunos da turma participassem nas discussões inerentes ao desenvolvimento das tarefas; (3) A ação desenvolvida no sentido de prestar uma atenção tão personalizada quanto possível a todos os alunos.

> Este esforço dos professores foi genericamente reconhecido pelos alunos entrevistados. Por exemplo, um dos alunos referiu numa entrevista que o professor tinha um papel fundamental pois era ele que conseguia que os alunos gostassem de Matemática, ajudando-os a compreender, por vezes, até de "uma forma divertida" (Aluno do 1.º Ciclo).

Todas as aulas foram desenvolvidas a partir de tarefas previamente planificadas que os alunos trabalharam de diferentes modos. Nos momentos da discussão coletiva das tarefas, os alunos iam respondendo às questões formuladas pelos professores. Alguns alunos tomavam a iniciativa de participar, nomeadamente através de observações e comentários relativamente a intervenções dos seus colegas.

Após a interpretação das tarefas no grande grupo, os alunos iniciavam as atividades autonomamente, em pequenos grupos de trabalho. Foi possível constatar que, nesta fase, os alunos estavam atentos e interessados, empenhando-se na resolução das tarefas, partilhando ideias e sugerindo e discutindo diferentes estratégias e conjeturas. Em cada grupo de trabalho, os alunos procuravam chegar a uma solução comum para a tarefa que tinham entre mãos.



Figura 10. Um grupo de alunos trabalhando sobre uma tarefa, pelos Autores, 2010. Utilizada com permissão

Na discussão coletiva sobre a resolução de uma dada tarefa, os alunos dirigiam-se ao quadro, onde resolviam a questão, explicando, de seguida, o modo como tinham procedido para atingir aquela resolução e solução. Quando os colegas não concordavam com a resolução apresentada por um aluno, pediam a palavra para refutar ou dar uma sugestão. Com frequência os alunos intervinham para apresentar formas alternativas de resolução ou para relatar o que, e como, tinham feito.

Foi possível verificar que as rotinas estabelecidas e as dinâmicas de sala de aula foram realmente interiorizadas pelos alunos, nomeadamente no que se refere à natureza crítica mas construtiva das suas intervenções. De tal modo que, muitas vezes, eram eles, com destaque para os melhores alunos, quem tomava a iniciativa da monitorização das atividades, da procura de justificações e da gestão da comunicação.

De forma a ilustrar o papel que os alunos desempenharam na resolução das tarefas e no desenvolvimento das suas próprias aprendizagens, descreve-se em seguida ações empreendidas a propósito de uma tarefa que permitiam a exploração de vários tópicos matemáticos, com particular destaque para o pensamento algébrico.

> Na terceira parte da aula (cerca de 20 minutos) os alunos organizaram-se em grupos de quatro para realizarem a última tarefa.
>
> Tratava-se de uma sequência figurativa. Como material de apoio o professor entregou a cada grupo cromos quadrados de modo a concretizarem os primeiros termos da sequência.



Figura 11. Os alunos a trabalharem com o auxílio de materiais de apoio, pelos Autores, 2010, Utilizada com permissão.

Surgiram várias resoluções e interpretações e estratégias diferentes. Foi feita uma síntese de todas as resoluções tendo cada aluno tido oportunidade para partilhar o seu raciocínio com a turma.

Este grupo limitou-se a fazer uma indicação muito concisa.

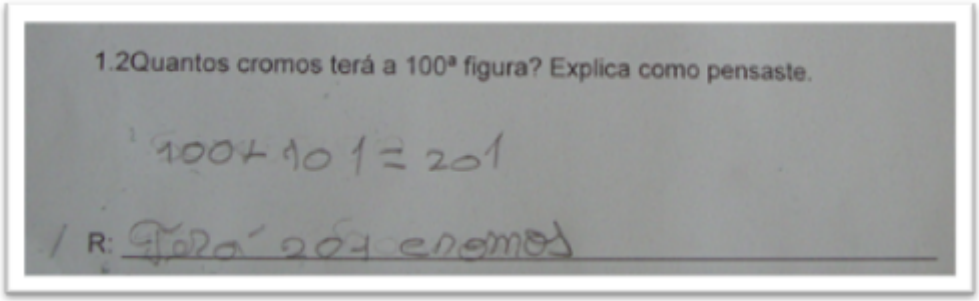


Figura 12. Resolução concisa de uma tarefa, pelos Autores, 2010. Utilizada com permissão.

Mas houve grupos que explicaram o seu pensamento de forma mais detalhada e mais clara.

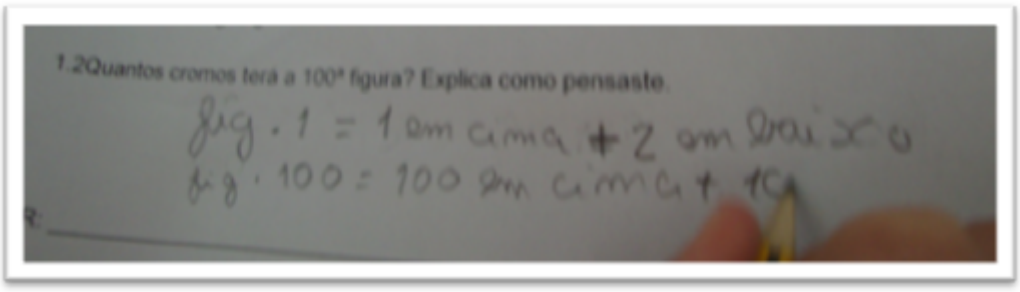


Figura 13. Exemplo de uma resolução mais detalhada da tarefa, pelos Autores, 2010 Utilizada com permissão.

Ou ainda através de outra forma de representar a lei de formação.

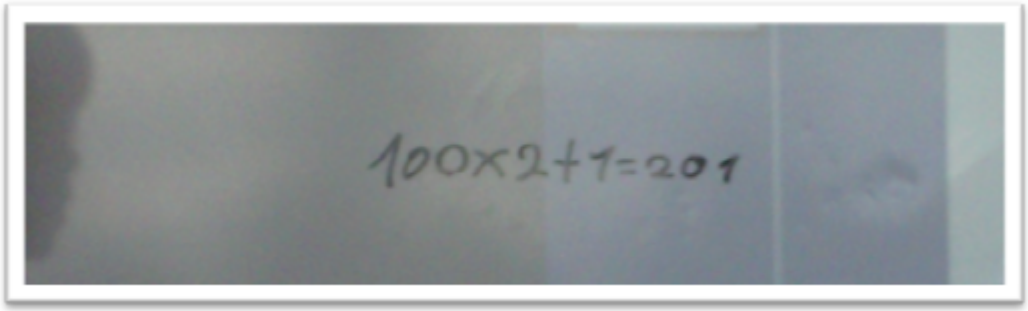


Figura 14. Outro exemplo de uma resolução da tarefa, pelos Autores, 2010. Utilizada com permissão

Na última questão, em que se pedia para "determinar o número de cromos necessários para construir uma figura de qualquer ordem", houve bastantes dificuldades. Um número de alunos pareceu não ter compreendido a pergunta.

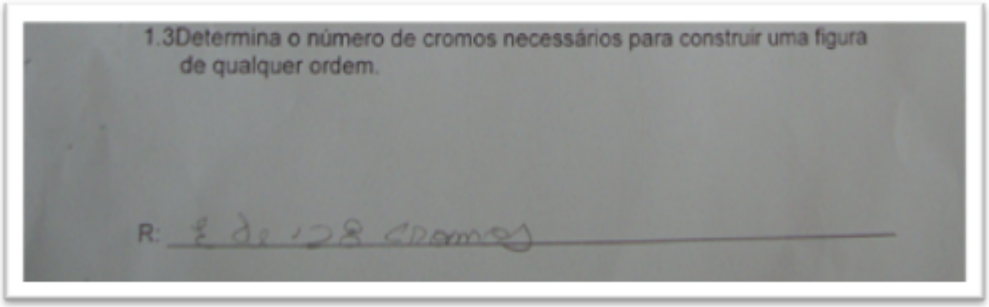


Figura 15. Resolução de outra questão da tarefa, pelos Autores, 2010. Utilizada com permissão

Um aluno, considerado como o melhor da turma, explicou aos colegas que era "vezes dois mais um".

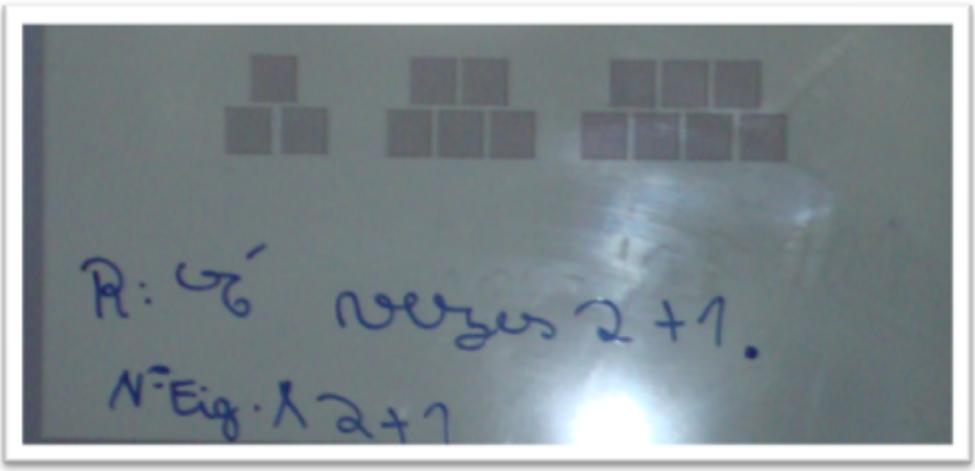


Figura 16. Resposta correta de um aluno, pelos Autores, 2010. Utilizada com permissão

O professor pediu-lhe para completar escrevendo então "nº da figura x 2 + 1". Aqui poderia ter-se usando o termo "o dobro" mas, entretanto, a aula aproximava-se do fim. (Observação de aula)

O que foi possível determinar relativamente ao papel mais predominante dos alunos é que ele não é independente de outros elementos, nomeadamente o papel dos professores. Se é verdade que um dos papéis dos alunos foi, indubitavelmente, participar nas discussões, em pequeno ou em grande grupo, tal deve-se em muito boa medida às ações dos professores no sentido de incentivarem a comunicação matemática nas aulas. Na verdade, os professores

nunca deixaram de proporcionar tempos e espaços para que os alunos pudessem apresentar as suas resoluções e para que pudessem questionar e dialogar com os colegas. Desta forma, nunca se deixaram questões por explorar tendo-se procurado, mesmo na elaboração das sínteses, organizá-las por ordem crescente de complexidade.

***Gestão do Tempo e Estruturação da Aula*.** Já acima se fez referência ao facto de as aulas terem uma estrutura e uma sequência (quatro fases) e assentes em tarefas de natureza exploratória. A primeira fase tinha como principal propósito apresentar e clarificar a tarefa a explorar nessa mesma aula. A propósito da apresentação da tarefa à turma, um aluno referiu que o professor formulava questões e ajudava os alunos a compreender quais os desafios que tinham que enfrentar para a sua resolução.

> Todos lemos o problema que temos na folha e, depois, falamos um bocadinho sobre ele. O professor também faz perguntas e começamos a resolver. Depois também corrigimos, oralmente, e o professor vai lançando sempre mais desafios (…). (Aluno do 1º Ciclo)

Na fase seguinte da aula era dado algum tempo aos alunos para se centrarem na resolução da tarefa proposta. Os professores acompanhavam os diferentes grupos, por sua iniciativa ou a pedido dos alunos, de modo a identificarem dificuldades e a aperceberem-se do desenvolvimento das atividades.

Posteriormente, realizava-se uma discussão acerca dos resultados produzidos pelos alunos através do seu trabalho. Além disso, exploravam-se e sistematizavam-se as ideias essenciais relativas à tarefa com o recurso à apresentação de trabalhos realizados pelos alunos que os professores selecionavam criteriosamente.

No final da aula, os professores recorriam sistematicamente à elaboração de sínteses, de pontos de situação, que pareceram revelar-se muito úteis para a consolidação das aprendizagens dos alunos. Verificou-se que nesta fase, a comunicação que se estabelecia era de natureza mais reflexiva. Na generalidade das aulas observadas, as sínteses finais consistiam em considerações destinadas a verificar se os alunos tinham compreendido o que havia sido feito e se ainda subsistiam dúvidas e/ou dificuldades, permitindo esclarecer essas dúvidas.

Este trabalho, estas rotinas e atividades que, diariamente, foram sendo desenvolvidas nas salas de aula foram interiorizados pelos alunos que, sem problemas, as conseguiram identificar, fazendo referência às diversas etapas presentes nas aulas de Matemática.

> Primeiro, sabemos que todas as manhãs vamos fazer rotinas de cálculo e, a seguir, o professor vai explicar um problema (…) O professor dá-nos a folha e nós fazemos tudo. Depois vamos corrigir, oralmente, e o professor faz-nos mais perguntas. E não só as perguntas que estão no problema. (Aluno do 1º Ciclo)

A descrição que se apresenta a seguir mostra a sequência de uma aula e o tipo e a natureza das tarefas que, em geral, eram utilizadas pelos professores participantes neste estudo. A tarefa que aqui é apresentada despertou especial interesse e envolvimento dos alunos e destinava-se a abordar o tópico *Números e Operações – Números Racionais não Negativos* e intitulava-se *Tablete de chocolate*.

> Tarefa: Oferta de chocolates
>
> Na "aldeia do chocolate", uma fábrica oferece, todos os domingos, aos meninos que lá vivem, uma tablete de chocolate. Logo de manhã, naquele domingo, 2 irmãos, o Rui e a Mariana, dirigiram-se à fábrica para receber a sua tablete. Mal saiu da fábrica, o Rui desembrulhou o chocolate e comeu-o todo. No dia seguinte, ao ver a irmã comer chocolate perguntou-lhe: Como é que ainda tens chocolate? E a Mariana respondeu: "Só como metade por dia" ao que o Rui disse: "Para a semana vou fazer o mesmo".

No domingo a seguir, o Rui foi buscar o seu chocolate e comeu metade. Na 2ª feira comeu a outra metade e ficou sem nada. Na 4ª feira reparou que a Mariana ainda tinha chocolate. "Marina, como é que ainda tens chocolate?" E a irmã respondeu: "Já te disse, como metade da tablete todos os dias e só a acabo no sábado", ao que o rapaz respondeu" Foi isso que eu fiz, comi metade no domingo, metade na 2ª feira e na 3ª feira já não tinha nada para comer". Como explicas a situação?

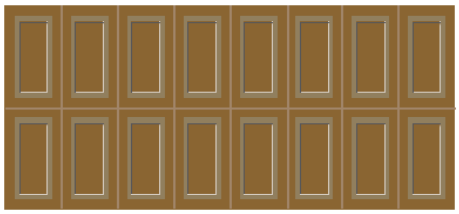


Figura 17. Ilustração de uma tablete de chocolate

O professor distribuiu a ficha de trabalho e os alunos leram, primeiramente, de forma autónoma. Tal como nas outras tarefas, fez-se uma exploração inicial onde os alunos leram e recontaram o problema descrito. Esta parte foi realizada com a globalidade da turma.

Para esta atividade foi necessário cada grupo criar a sua hipótese e conjeturá-la, percorrendo um caminho que não se conhecia à partida.

O trabalho permitiu representar partes da unidade sob a forma de fração, relacionar frações e números fracionários e resolver problemas.

No início os alunos mostraram-se confusos, tendo sido necessária maior reflexão da sua parte para compreender o problema. De facto, com o decorrer do trabalho em grupo, foram sendo discutidas as diferentes ideias e os alunos conseguiram ultrapassar as dificuldades. O professor foi orientando, sem nunca dar qualquer solução, e dando algumas indicações que os alunos poderiam aproveitar para delinear uma estratégia de resolução.

A produção matemática dos alunos foi escrita. Na folha de resposta colaram os recortes que tinham da tablete e referiram os dias e a parte (fração) comida em cada dia, duplicando, sucessivamente, os denominadores.

Na discussão, o professor colocou no quadro interativo a imagem da tablete completa e os alunos, um de cada vez, foram representar, no quadro, as divisões sucessivas da tablete de chocolate.

A solução final apresentada foi a seguinte:

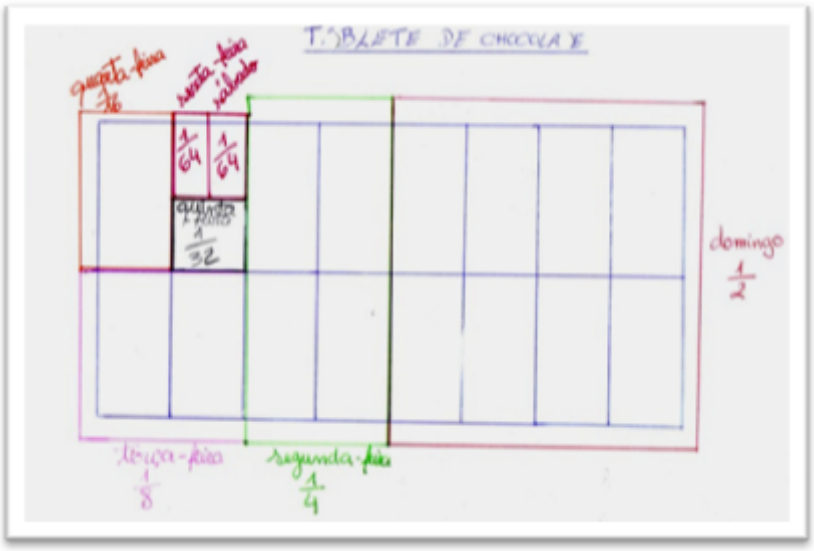


Figura 18. Resolução de um dos grupos, pelos Autores, 2010. Utilizada com permissão.

Os alunos mostraram-se bastante participativos, querendo ir ao quadro resolver o problema. Quando não concordavam com alguma ideia dos colegas, apresentavam os seus argumentos e a refutação era aceite se estivesse fundamentada e correta. O ambiente de trabalho era bom e propício para o desenvolvimento da interação entre os alunos e o professor e, consequentemente, para a discussão de ideias matemáticas, de estratégias de resolução e de soluções.

O professor foi sempre pedindo aos alunos que justificassem aquilo que representavam. Os alunos referiram que "as frações iam sendo cada vez mais pequenas", pois o denominador era cada vez maior. Na verdade, os alunos constataram e perceberam que era o dobro do anterior, que representava metade da parte da tablete que ainda existia.

Na discussão da imagem apresentada anteriormente, e aquando da indicação da parte e respetiva fração numérica de sexta-feira, o professor concluiu que a parte de sábado era igual à de sexta-feira.

Ao relacionar-se as diferentes frações indicadas na resolução, foi mencionado:

2X (1/64) = 1/32 (1/64 + 1/64)

e os alunos fizeram o respetivo registo.

Para outras frações, os alunos fizeram, autonomamente, na folha de resposta. O professor fez o primeiro e os alunos realizaram os restantes.

Assim, surgiu quase naturalmente a seguinte sequência de expressões.

2X (1/32) = 1/16

2X (1/16) = 1/8

2X (1/8) = ¼

2X (1/4) = ½

2X (1/2) = 1

Esta parte da tarefa, por manifesta falta de tempo, não chegou a ser discutida em grupo.

A figura seguinte representa o trabalho realizado por um aluno.

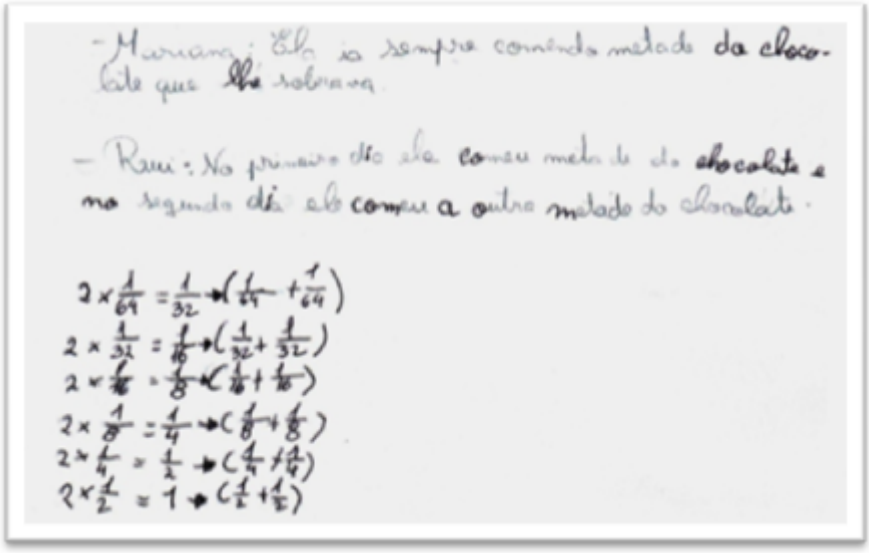


Figura 19. Resolução da tarefa por um aluno, pelos Autores, 2010. Utilizada com permissão.

Apesar do empenho e da participação ativa dos alunos, que contribuíram de várias formas para a resolução do problema, o professor teve sempre um papel interveniente. Para além de apoiar diretamente os alunos com mais dificuldades, ia distribuindo feedback ao longo do processo de resolução e, sobretudo, na fase da discussão. Estas ações do professor revelaram-se sempre fundamentais para que os alunos pudessem progredir.

Quando os alunos estavam a trabalhar em grupo, o professor foi insistindo para que se despachassem para que todos pudessem participar na discussão que só se iniciou quando todos terminaram a tarefa.

No final, o professor fez uma breve síntese oral, referindo a importância da tarefa e chamando a atenção dos alunos para a sua relação com outras tarefas trabalhadas anteriormente. A ideia do professor pareceu ser a de contribuir para que os alunos compreendessem e integrassem ideias e conceitos, apesar de, nesta altura, não ter feito referência a conceitos anteriormente trabalhados. (Observação de aula)

Práticas de Avaliação

Integração/Articulação entre os processos de Ensino / Avaliação / Aprendizagem. A maioria das atividades realizadas nas aulas resultava de tarefas que, em geral, tinham uma natureza aberta, com a possibilidade de utilização de diferentes estratégias de resolução. De acordo com um dos professores participantes, era este o tipo de tarefas que mais contribuía para a participação e o interesse dos alunos.

> Normalmente, são as tarefas mais abertas. Investigações ou problemas com várias soluções. Tem que ser alguma coisa que os desafie. (…) As questões dos trabalhos em que eles têm que discutir, em que têm que investigar, procurar e em que têm que discutir uns com os outros são, efetivamente, aquilo que eles gostam mais de fazer. (Professor do 1º Ciclo)

As entrevistas feitas aos alunos corroboraram esta ideia do professor pois todos foram referindo que as suas atividades preferidas eram as investigações porque o seu desafio era superior.

> Sim, é mais das investigações e quando não sabemos o que vamos encontrar. É isso mesmo. (Aluno do 1º Ciclo)

> Porque se nós já sabemos o que vamos fazer é… e sabemos a regra que vamos ter que aplicar, é só chegar ali, aplicar a regra e já está o problema. (…) Se nós não soubermos a regra, temos que começar a pensar. (Aluno do 1º Ciclo)

> Acho que é muito fácil! (…) Se nós sabemos as regras que vamos aplicar e isso tudo, as tarefas, e isso tudo, é muito fácil e nós, de novo, não vamos ter nada para fazer. Nós gostamos de coisas novas onde não sabemos o que vamos encontrar. O que temos que fazer, as regras novas que vamos aprender e isso tudo. Gostamos de ter coisas novas para fazer. (Aluno do 1º Ciclo)

Nas observações realizadas verificou-se que, ao longo do desenvolvimento das tarefas em grupo, assim como na sua discussão em grande grupo, os professores tentavam que os melhores alunos não anulassem a participação dos outros, para conseguir um melhor equilíbrio entre as contribuições de todos os alunos. Curiosamente os alunos tinham noção dessa intenção dos professores e, em entrevista, mostraram compreender porque é que isso acontecia.

> O professor, às vezes, quando a gente está a tentar responder, os que sabem não é, manda-nos calar (…) Temos que dar oportunidades aos outros. (Aluno do 1º Ciclo)

A avaliação formal e informal estiveram presentes, de forma continuada, em todo o processo de ensino-aprendizagem, baseando-se fundamentalmente em questões orais e em observações. Os professores distribuíam *feedback* de forma sistemática, variando a sua natureza e o seu propósito. As avaliações realizadas incidiam sobre todas as atividades realizadas diariamente pelos alunos que, muitas vezes, se materializavam em trabalhos escritos em folhas distribuídas para o efeito ou em fichas de avaliação.

No final de cada tópico os alunos realizavam geralmente uma "ficha global" cujo principal propósito parecia ser a identificação de eventuais dificuldades dos alunos, tendo estes uma participação importante nessa análise. A natureza sumativa deste tipo de avaliação, não lhe retirou qualquer relevância no apoio ao desenvolvimento das aprendizagens dos alunos e contribuiu para que a avaliação, o ensino e as aprendizagens pudessem ser mais articuladas e, eventualmente, integradas. A este propósito, a descrição que a seguir se apresenta de uma aula observada ilustra que, embora pontualmente, houve momentos em que a avaliação estava realmente integrada no chamado processo ensino-aprendizagem.

Na sequência do trabalho da turma sobre uma tarefa, o professor decidiu elaborar uma apresentação em *PowerPoint* em que integrava uma seleção de resoluções de diferentes alunos, umas corretas, outras incorretas. Desta forma, explorando as resoluções apresentadas, através de uma discussão com os alunos, foi possível avaliar o trabalho realizado, contribuir para que os alunos aprendessem e compreendessem e para que a professora ensinasse o que se revelou ser necessário. O professor referiu-se do modo seguinte à ação que resolveu empreender.

> Aqueles resultados não têm como finalidade dar uma nota. Não têm não. Tenho marcado os certos e os errados e mais nada. (…) Desta vez até fiz um PowerPoint com alguns resultados, uns certos outros errados, que se discutiram. (…) Esta resposta, aquela, a outra. O que é que está mal, o que é que não está completo, o que é que faltou colocar aqui?. Portanto, faço um pouco isto. (Professor do 1º Ciclo)

Foi possível verificar que este tipo de trabalho, ainda que pontualmente realizado, permitia que os alunos pudessem compreender o que tinham alcançado e se tornassem mais conscientes das suas dificuldades e das dos seus colegas. Para além de ser uma atividade que parecia integrar bem o ensino, a aprendizagem e a avaliação, permitia fazer um balanço, uma súmula, do que os alunos tinham aprendido acerca dos tópicos abordados. Por outro lado,

também se criavam condições para que os alunos avaliassem o seu próprio trabalho bem como o dos seus colegas.

Utilizações da Avaliação. Os professores participantes neste estudo evidenciaram que a avaliação pode ter diferentes utilizações tais como: a) classificar e certificar as aprendizagens dos alunos; b) distribuir *feedback* aos alunos, ajudando-os a aprender; e c) regular aprendizagens e o próprio ensino. Nas suas práticas de avaliação os professores utilizavam as fichas e os registos feitos acerca dos alunos como um meio para conhecer as suas dificuldades e para decidir se estão ou não em condições de progredir no estudo dos tópicos do programa.

Segundo um dos professores participantes, a análise dos trabalhos dos alunos, permite identificar os aspetos a melhorar, assim como os conteúdos que é necessário explorar e aprofundar com mais atenção.

> Naqueles tópicos muito prolongados, eu prefiro ir fazendo pequenas avaliações, não tanto com o intuito de fazer uma avaliação sumativa mas mais para fazer uma avaliação alternativa. Ver, efetivamente, o que é que cada um consegue (…) e depois fazemos uma discussão daquilo que foi feito. Quais foram as dificuldades encontradas e o que é que correu mal. (Professor do 1º Ciclo)

Analisando o que foi dito por este professor, percebe-se a importância de se realizar uma "avaliação intermédia" para depois se fazer uma análise, em grande grupo, das dúvidas e dificuldades apresentadas pelos alunos.

Tarefas de Avaliação Predominantes. Os dados recolhidos junto dos professores participantes indiciam que a sua visão do processo de avaliação os leva, de certo modo, a separar o que consideram ser tarefas de ensino e de aprendizagem daquilo que consideram ser tarefas de avaliação. Como anteriormente se referiu a integração dos três processos foi meramente pontual e não foi deliberada e sistematicamente assumida. Consequentemente, a visão preponderante é a de que a avaliação é um processo que, de certo modo, se desenvolve à parte. Neste sentido, os professores utilizaram frequentemente avaliações formais, mais estruturadas, com predominância para as fichas de avaliação sumativa e as fichas de trabalho, e avaliações informais, menos estruturadas, baseadas em observações e na formulação de questões. Os resultados das avaliações informais eram, por vezes, objeto de registo como foi referido por um dos professores nestes termos: "Normalmente, no final da aula, quando há alguma coisa muito positiva ou muito negativa, registo no meu caderno" (Professor do 1º Ciclo).

O discurso dos professores relativamente à avaliação pareceu ser mais centrado nos resultados e nas preocupações com as classificações e com as notas do que na natureza das tarefas de avaliação que poderiam contribuir para que os alunos aprendessem mais e melhor. Ou seja, tarefas que promovessem efetivamente a integração dos três processos de ensino, aprendizagem e avaliação. E a verdade é que, como evidenciam descrições anteriores, os professores faziam isso mesmo quando utilizavam as tarefas mas, aparentemente, de forma não deliberada e propositada. A transcrição que se segue ilustra o discurso mais comum dos professores relativamente às questões relacionadas com a avaliação e as tarefas a utilizar para a sua concretização.

> [as fichas] levo para casa, porque preciso para fazer relatórios, e tenho de fazer o registo. Em todos os tópicos os meninos são avaliados. Tenho uma ficha de avaliação em todos os tópicos, portanto tenho a nota deles por tópico… E depois nas aulas, no dia a dia. Eu fico com o registo e fico com uma ideia do que eles fazem na aula. Fico com uma ideia mais ou menos de cada um…Quando eu tenho uma pergunta para fazer à turma já sei quem responde… Sei as respostas, quem é capaz, quem não é, quem vai conseguir, quem não vai… Embora, às vezes, haja uma surpresa ou outra. Mas eu tenho a noção total, principalmente agora no final do ano, do nível deles em todos os tópicos. E depois o

> trabalho diário, eu levo as fichas para casa e analiso sempre. Eu tenho um dossiê de todos os tópicos desde o 3º ano, de todos os trabalhos dos alunos e, normalmente, digitalizo os raciocínios e as diferentes estratégias. Portanto seleciono três ou quatro mais diferentes, digitalizo, mesmo para fazer um arquivo pessoal… (Professor do 1º Ciclo)

Em suma, apesar das tarefas e das atividades delas resultantes constituírem o cerne do desenvolvimento curricular e, por isso mesmo, do ensino, da aprendizagem e da avaliação, parecem não ser vistas pelos professores como meios importantes de recolha de informação avaliativa. E isto, como se disse, apesar dos professores o fazerem de forma sistemática. Esta constatação parece significar que, para estes professores, a avaliação está mais associada a formas de recolha de informação conducentes a um registo formal ou a uma classificação do que a formas de ajudar os alunos a aprender.

Natureza, Frequência e Distribuição de Feedback. De acordo com as observações realizadas, os professores recorriam sistematicamente ao *feedback* com o propósito de orientar e encaminhar os alunos. Um dos professores referiu que tinha sempre a preocupação de manter o desafio da descoberta, assim como a autonomia no interior dos diversos grupos. Por isso mesmo, em vez de dar respostas aos alunos, fornecia-lhes *feedback* que os ajudasse a pensar por si mesmos acerca das melhores estratégias para resolver os problemas.

> (…) que eles conseguissem… Não dar, não lhes dar a resposta, mas fazendo perguntas que os encaminhassem tais como: "Então, o que é que achas disto assim, assim?", "Achas que é possível fazer desta maneira ou da outra?" ou "Estás a ir pelo caminho correto?". Muitas vezes dizia "Olha que esse caminho não vai lá dar! Tentem lá ver se encontram aí um caminho alternativo". (…) eu tentava não lhe dar as respostas ao dizer "Faz assim ou faz assado.". Assim, era muito mais fácil. Portanto, tentávamos ver se encontrávamos ali um caminho que eles, depois, já seguissem. (Professor do 1º Ciclo)

O *feedback* foi uma constante ao longo de todas as aulas observadas quer acerca do trabalho realizado nas fichas, quer acerca do trabalho realizado em grupos ou individualmente, quer ainda nos momentos das questões orais e das discussões. Expressões tais como "Vê lá bem aí! Não percebo o que fizeste aqui! Muito bem, sim senhor!" eram comuns no decorrer das aulas.

Em algumas aulas o *feedback* era fornecido mais formalmente, recorrendo a uma apresentação em *PowerPoint* ("que eles gostam muito") em que constava uma seleção de estratégias de resolução consideradas mais significativas. Esta estratégia foi frequentemente utilizada nos momentos planeados de discussão final. Apesar dos professores referirem que gostariam que fossem sempre os alunos a partilhar e a explicar o que fizeram, a falta de tempo acaba por determinar a utilização daquela abordagem. Contudo, houve situações em que, em vez de se utilizar uma apresentação em *PowerPoint*, se digitalizaram as resoluções ou raciocínios de um dado grupo de alunos que, depois, as apresentam e colocam à discussão da turma.

> … e levo para casa. Digitalizo as respostas, ou os raciocínios, ou as estratégias, que quero trabalhar, que quero explorar e, no dia seguinte, projeto-os e o grupo a que corresponde o trabalho vai debater. (Professor do 1º Ciclo)

Dinâmicas de Avaliação. Em cada aula os professores utilizavam essencialmente a formulação de questões e as observações como forma de recolher informação acerca da progressão dos seus alunos. Os alunos eram regularmente solicitados para justificarem o trabalho realizado e, por isso, a autoavaliação era um processo normalmente utilizado para que pudessem tomar consciência dos seus progressos e das suas dificuldades.

A heteroavaliação também fazia parte integrante das dinâmicas de avaliação uma vez que os alunos comentavam o trabalho dos colegas nos momentos da discussão em grande grupo,

proporcionando momentos em que, por exemplo, era possível avaliar abertamente a resolução de um problema.

Também ao nível do trabalho de grupo foi possível observar que os alunos partilhavam as suas ideias e estratégias, que eram objeto de apreciação e de avaliação pelos seus pares e, por isso, geraram-se dinâmicas de coavaliação. Nestes momentos, os alunos, através da discussão entre pares, acabavam por criar condições para que a regulação e a autorregulação das suas aprendizagens pudesse ter lugar.

Natureza da Avaliação Formativa e da Avaliação Sumativa. No decorrer das observações efetuadas nas aulas pôde constatar-se que os professores distribuíam *feedback* de forma sistemática, deliberada e regular. Desta forma os alunos podiam contar com orientações fundamentais para progredir nas suas atividades e nas suas aprendizagens. Note-se que o *feedback* ocorria nos diferentes momentos em que as aulas estavam normalmente organizadas, a propósito de intervenções orais dos alunos ou das diferentes formas que utilizavam para representar o seu trabalho matemático.

A utilização do *feedback*, como forma de ir orientando e regulando as aprendizagens dos alunos, garantiu a existência de práticas sistemáticas de avaliação formativa por parte dos professores participantes. Ou seja, uma avaliação que estava muitas vezes bem articulada com o ensino e com a aprendizagem e que servia essencialmente para ajudar os alunos a aprender.

Fica no entanto a convicção de que a natureza do ensino, com uma significativa participação dos alunos, a natureza das tarefas, a estrutura organizativa das aulas e as dinâmicas desenvolvidas, acabaram por ter uma forte, se não determinante, influência nas práticas de avaliação formativa. O que isto parece querer significar é que as abordagens utilizadas pelos professores para organizar e desenvolver o currículo no dia a dia, tal como sugeridas no PMEB, eram pouco compatíveis com outras práticas de avaliação.

Assim, poder-se-á dizer que, de forma mais ou menos consciente, os professores utilizaram uma avaliação formativa que, no essencial, tinha as seguintes características principais: a) ocorria de forma tendencialmente contínua; b) estava essencialmente orientada para a melhoria das aprendizagens dos alunos, assim como para o desenvolvimento de rotinas de trabalho e de procedimentos; c) era de natureza formal e informal, embora tivesse sido visível uma tendência para a sua formalização, através de "fichas de avaliação", de "fichas de trabalho" e de diversas formas de registo utilizadas pelos professores; d) estava associada a processos de autoavaliação e de autorregulação utilizadas pelos alunos quer individualmente, quer em grupo; e) surgia também como "elemento" fundamental nos processos de heteroavaliação e de coavaliação; e f) permitia que os alunos desenvolvessem sentimentos positivos face às suas capacidades para aprender matemática.

Apesar da utilização de uma avaliação formativa com aquela natureza, este estudo permitiu evidenciar a necessidade que os professores têm em aprofundar os seus conhecimentos teóricos e práticos relativamente a esta "modalidade" de avaliação pedagógica. Na verdade, a avaliação formativa, em particular, e a avaliação pedagógica em geral, pareceram ser percecionadas como estando mais associadas ao desenvolvimento e à utilização de uma variedade de instrumentos e menos a um processo eminentemente pedagógico destinado a ajudar os alunos a aprender.

Um dos professores participantes corroborava precisamente a necessidade de desenvolver os seus conhecimentos e práticas nesta área. Na sua opinião, ao longo do processo conducente à experimentação e à generalização do PMEB, as questões relativas à avaliação pedagógica poderiam ter sido mais trabalhadas.

> "Foi falado pouco. Houve colegas que apresentaram algumas grelhas de registo, mas tudo isto funcionou ainda esporadicamente". (Professor do 1º Ciclo).

A avaliação sumativa, no essencial, era formal por natureza e traduzia-se na utilização das chamadas "fichas de avaliação sumativa" e, em certos casos, de outro tipo de fichas, nomeadamente as que eram designadas como fichas de trabalho. As fichas de avaliação sumativa eram realizadas individualmente no final de cada período letivo, mas também no final de cada tópico abordado e, segundo um dos Professores, " (...) é como se fosse uma prova de aferição". No entanto, se fossem verificadas dificuldades sobre algum tópico, se fosse necessário trabalhar algum aspeto ou se os alunos precisassem de motivação, ainda era possível realizar uma nova ficha.

As observações e as entrevistas realizadas permitiram concluir que, tal como acontecia relativamente à avaliação formativa, os professores pareceram não estar plenamente cientes dos diferentes propósitos da avaliação sumativa para além dos que são mais clássicos (e.g., classificar, ordenar, seriar). Na verdade, apesar de terem utilizado com alguma frequência formas de avaliação sumativa que, no essencial, se destinavam a apoiar o ensino e a aprendizagem, os professores não o faziam de forma deliberada e propositada. Faziam-no de forma intuitiva e, tal como acima se referiu, por força das circunstâncias relativas às formas como desenvolviam o currículo.

Foi ainda possível constatar que a natureza e as relações entre a avaliação formativa (formal e informal) e a avaliação sumativa (formal e informal) não eram claras para os professores participantes sobretudo porque estes conceitos pareceram não estar devidamente interiorizados. Por exemplo, a ideia de que a avaliação sumativa é essencialmente formal, se faz essencialmente no final dos períodos e serve para classificar, está enraizada nas conceções dos professores. Na verdade, as avaliações sumativas informais, encaradas como pontos de situação ou como balanços relativamente ao que se aprendeu e destinadas a apoiar as aprendizagens, não surgiram como tal nas perspetivas dos professores.

Em síntese, através deste estudo foi possível identificar as seguintes características da avaliação sumativa utilizada pelos professores participantes: a) ocorria pontualmente, nomeadamente após o estudo de um tópico ou no final dos períodos; b) estava essencialmente orientada para a elaboração de balanços acerca do que os alunos sabiam e eram capazes de fazer, visando a atribuição de "notas", mas também ocorria, embora com pouca frequência, para apoiar o ensino e as aprendizagens; c) era de natureza formal e só muito pontualmente informal; e d) era essencialmente realizada através de "fichas de avaliação sumativa".

Papel Predominante de Professores e Alunos. Em matéria de avaliação pareceu ter ficado bem claro que os professores tiveram, de facto, e como seria de esperar, o principal protagonismo. O seu papel mais predominante consistiu na formulação de questões, na distribuição de *feedback*, na conceção e administração de instrumentos de avaliação, na formulação de juízos acerca do "estado" dos alunos face ao que se pretendia alcançar e no desenvolvimento de ações que incentivassem os alunos a participar no processo de avaliação. A recolha de informação, elemento central no processo de avaliação, e a tomada de decisões relativamente ao desenvolvimento do ensino e das aprendizagens, estiveram, naturalmente, presentes. Porém, nestes últimos aspetos, nem sempre ficou muito claro para os observadores o tratamento dado à recolha de informação nem o processo ou os processos que levavam à tomada de decisões de natureza pedagógica.

Os alunos, num certo sentido, tiveram um papel algo passivo, limitando-se a seguir as orientações ou as sugestões dos professores decorrentes do *feedback* distribuído. Consequentemente, foi possível assinalar episódios de coavaliação e de heteroavaliação que, em rigor, decorriam mais das dinâmicas de trabalho estabelecidas nas salas de aula do que de rotinas resultantes de práticas deliberadamente orientadas para o envolvimento ativo dos alunos na avaliação do seu trabalho escolar.

Síntese Avaliativa Global

A síntese avaliativa que se apresenta de seguida decorreu, naturalmente, da descrição, análise e interpretação dos dados recolhidos, sobretudo os que se obtiveram nas seis turmas observadas e que originaram as respetivas narrativas. Trata-se de uma abundante base empírica a partir da qual seria possível produzir ilações e atribuir significados e sentidos eventualmente diversos dos que se apresentam neste estudo.

Ficou claro para a equipa de avaliação, desde muito cedo, que o material empírico obtido era suficientemente rico e sólido para se poder ir além da estrita elaboração de respostas às questões que inicialmente se formularam. Desta forma podem ser consideradas ilustrações credíveis do que parece ser possível fazer-se nas salas de aula no contexto de um programa que pode ser considerado exigente e de generalização problemática.

Não se pode naturalmente ignorar que os professores participantes neste estudo, sobretudo os da experimentação, foram apoiados e acompanhados de forma sistemática, tiveram acesso a formação especializada, trabalharam colaborativa e cooperativamente e tinham um perfil que não é propriamente o mais comum. Mas, de igual modo, os professores do início da generalização (6.º ano de escolaridade), apesar de não terem sido professores experimentadores, tinham tido acesso a formação e a uma diversidade de apoios que se encontram disponíveis, nomeadamente brochuras e tarefas para utilização nas salas de aula. Além disso, foram apoiados pelos coordenadores do PMEB ao nível das escolas/agrupamentos e pelas ações desenvolvidas no âmbito do Plano da Matemática II (PM II).

Em todo o caso, reafirma-se que este estudo mostra o que parece ser possível fazer-se nas salas de aula, a partir de uma descrição e análise aprofundadas das práticas de um grupo restrito de professores, e não o que está realmente a acontecer na maioria das salas de aula do ensino básico.

Uma Aposta Bem Sucedida

O chamado *Processo de Experimentação do Programa de Matemática do Ensino Básico*, globalmente considerado, foi uma aposta inequivocamente bem sucedida quer quanto à sua forma, quer quanto ao seu conteúdo. Apesar das incontornáveis dificuldades que mais adiante se discutirão, a verdade é que foi possível estabelecer um sistema de apoio e de acompanhamento que contribuiu de forma decisiva para a geração de dinâmicas novas e inovadoras em domínios tais como o da formação, o do ensino e o da participação dos alunos.

Os professores participantes neste estudo e, mais particularmente, os professores experimentadores explicitaram claramente a relevância da formação e da variedade de interações que se estabeleceram para que as suas práticas, a todos os níveis, pudessem estar devidamente articuladas com o "espírito e a letra" do PMEB.

Esta constatação é importante pois sugere que existe no sistema a capacidade para pôr em prática uma variedade de apoios que podem contribuir para que os professores, em geral, possam desenvolver positivamente o PMEB.

Um Programa bem Interiorizado e Compreendido

Os dados obtidos permitiram verificar que, ao contrário do que parece ser habitual, os professores participantes conheciam bem o programa de Matemática. Ou seja, para além de identificarem os quatro grandes núcleos temáticos (Números e Operações, Álgebra, Geometria e Organização e Tratamento de Dados) e as capacidades transversais (Resolução de Problemas, Raciocínio Matemático, Comunicação Matemática) nele constantes, os professores parecem ter interiorizado e compreendido bem um conjunto de orientações programáticas fundamentais em domínios tais como o desenvolvimento e a gestão curricular, a utilização de

recursos, o estabelecimento de conexões e as diferentes dinâmicas de trabalho nas salas de aula.

O bom domínio do programa revelou-se importante ao longo do desenvolvimento do processo de experimentação porque apoiou os professores em aspetos tais como: a) a identificação do que era mais relevante; b) a seleção de tarefas; c) a organização do trabalho nas salas de aula; e d) a gestão da participação dos alunos nas atividades escolares.

Para que isto fosse possível os professores tiveram oportunidades para proceder à leitura, análise e discussão do programa, nomeadamente no contexto da formação que foi disponibilizada e no trabalho desenvolvido pelos professores experimentadores nas reuniões locais, regionais e nacionais. O facto de não haver manuais disponíveis que, como se sabe, são muitas vezes a única referência curricular consultada, pode ter contribuído para que os professores sentissem necessidade de "estudar" aprofundadamente o programa.

Este resultado sugere claramente que o conhecimento, a interiorização e a compreensão do programa e das orientações que, de forma mais ou menos explícita, nele estão presentes, têm uma importância que pode ser decisiva numa organização e desenvolvimento do ensino que ajudem os alunos a aprender.

A Planificação e Organização do Ensino e o Trabalho Colaborativo

A planificação das aulas e a sua análise e discussão foram características marcantes do processo de experimentação que produziram efeitos positivos na organização e na qualidade do ensino proporcionado aos alunos. A planificação e organização do ensino gerou dinâmicas de trabalho colaborativo que contribuíram para que os professores se sentissem mais confiantes e seguros relativamente ao papel que lhes competia desempenharem.

A avaliação realizada mostrou que a planificação envolve um conjunto complexo de atividades que os professores terão toda a vantagem em desenvolver colaborativa e cooperativamente. Neste caso concreto ficou bem evidenciado que essas dinâmicas de trabalho não só foram possíveis como contribuíram claramente para o estabelecimento de um clima bastante favorável ao desenvolvimento profissional dos docentes participantes.

Por fim, verificou-se que os professores reconheceram a importância das planificações para o desenvolvimento das tarefas nas salas de aula e, neste sentido, eram vistas como uma estratégia essencial para que os alunos pudessem trabalhar e evoluir em direção aos objetivos propostos.

A Presença das Capacidades Transversais

Os resultados deste estudo ilustram, com clareza, que o desenvolvimento propositado, deliberado e sistemático das capacidades transversais previstas no programa fez parte das preocupações diárias dos professores participantes. Na verdade, os alunos eram frequentemente instados a partilhar e a explicar os seus raciocínios (oralmente e por escrito) e as abordagens utilizadas na resolução de uma variedade de tarefas. Desta forma, desenvolviam as suas capacidades de comunicar e de raciocinar matematicamente tal como, aliás, está previsto no programa. Note-se que este trabalho acabou por se instalar como uma rotina nas salas de aula observadas, sugerindo que as capacidades transversais podem ser trabalhadas sem que, para isso, seja necessário qualquer aparato especial.

A capacidade de resolução de problemas foi a que pareceu ser menos trabalhada. De facto, durante os períodos em que decorreu o trabalho de campo, não se vislumbraram ações sistemáticas nesse sentido em nenhuma das turmas, tal como, pelo contrário, aconteceu relativamente às outras capacidades. As tarefas selecionadas estavam mais orientadas para outro tipo de trabalho matemático (e.g., investigações, explorações, exercícios) do que para a resolução de problemas propriamente dita. Não deixa de ser um dado curioso pelo facto da

área da resolução de problemas ter sido, nos anos 90, alvo de relevante investigação em Portugal.

De qualquer modo, o que se pode afirmar na sequência deste estudo é que as capacidades transversais, principalmente o raciocínio e a comunicação, fizeram parte integrante do desenvolvimento do currículo, surgindo naturalmente associadas ao trabalho desenvolvido sobre os diferentes temas do programa.

Aulas Estruturadas e com Rotinas Pedagógicas bem Estabelecidas

É possível afirmar com segurança que existe uma relação muito significativa entre certas práticas adotadas por todos os professores e a formação que lhes foi proporcionada. Tais práticas estavam geralmente bem articuladas com as orientações metodológicas constantes no programa e, por isso, a formação acabou por atingir a sua finalidade última: contribuiu para "mexer" com as práticas de ensino dos professores.

A formação influenciou claramente os professores na organização e estruturação das suas aulas. Assim, tipicamente, as aulas, centradas em tarefas ou sequência de tarefas, decorriam de acordo com as seguintes quatro fases: a) Apresentação e apropriação da Tarefa; b) Resolução da tarefa; c) Discussão das soluções e resultados; e d) Reflexão, sistematização e síntese. Note-se que, por vezes, as fases c) e d) ocorriam no mesmo momento.

As sequências de atividades facilitavam a participação dos alunos numa variedade de dinâmicas que iam do trabalho individual ao trabalho em grande grupo, passando pelo trabalho em pares ou em pequenos grupos. Em geral as tarefas utilizadas nas referidas sequências eram de natureza exploratória, sobretudo na introdução de conceitos.

Além disso, foi notória a preocupação dos professores dos diferentes anos de escolaridade em diversificar e articular os materiais ou recursos utilizados, com a natureza das tarefas. Por exemplo, a utilização de materiais manipuláveis no 4.º ano, dos quadros interativos no 6.º ano e dos computadores no 9.º ano.

Todos, alunos e professores, estavam bem cientes dos papéis que tinham que desempenhar em cada uma daquelas fases. Todos conheciam bem as rotinas e pareciam trabalhar bem no tipo de ambiente assim criado. Todos os alunos sabiam bem qual era o seu papel em cada momento e pareceram sempre bem adaptados às rotinas pedagógicas que foram sendo estabelecidas e que, em boa medida, decorriam da natureza das tarefas utilizadas nas aulas.

Este é, muito provavelmente, um dos resultados de maior alcance deste estudo de avaliação na medida em que evidencia práticas que se revelaram muito eficazes nas salas de aula e que poderão, com algum investimento, ser adotadas pela grande maioria das escolas e dos professores de Matemática.

Professores bem Cientes do seu Papel

Nas aulas, todos os professores, ainda que com estilos, experiências e atitudes bem diferenciadas, pareciam ter rotinas bem estabelecidas. Mais uma vez, é inevitável o estabelecimento de relações com a formação e, em geral, com os sistemas de apoio e acompanhamento que foram proporcionados ao longo do processo de experimentação. Na verdade, a formação, as planificações em conjunto, certas dinâmicas do acompanhamento e os materiais disponibilizados, contribuíram para que os professores tivessem apreendido bem as orientações de natureza pedagógica e didática constantes no programa.

Nestas condições, pode dizer-se que os professores tinham as suas ações muito centradas na distribuição de *feedback*, na formulação de questões, na gestão das intervenções e da participação dos alunos e na elaboração de sínteses e de pontos de situação relativamente ao que tinha sido, ou deveria ter sido, aprendido. Isto não significa que os professores não interviessem e que não houvesse momentos em que "dessem aulas". Mas, em geral, o que

verdadeiramente emergiu da observação das aulas foi a preocupação dos professores em não dar respostas imediatas aos alunos, em criar condições para que todos participassem nas discussões, em procurar garantir que todos tinham compreendido, em distribuir *feedback* de natureza reguladora que os ajudasse a orientar-se. Note-se que, em alguns casos, os esforços dos professores para que os alunos participassem nas discussões coletivas nem sempre resultaram, provavelmente devido a eventuais dificuldades em gerir a sua participação.

O Problema da Gestão do Tempo

Este aspeto não foi uma dimensão de análise deste trabalho, mas acabou por ser um elemento muito referenciado ao longo do estudo. Tendo em conta que, por um lado, se procuram cumprir as orientações de natureza pedagógico-didática constantes no PMEB e que, por outro, se procuram cumprir os seus objetivos em termos do que os alunos têm que aprender é, para muitos professores, um problema recorrente. O presente estudo evidenciou que os professores revelaram dificuldade em gerir o tempo de forma a poder cumprir o programa e, mais uma vez, quando podiam, recorriam a tempo de outras áreas curriculares não disciplinares que, assim, se transformavam em aulas de Matemática. Importa, a este propósito, referir que o recurso à Área de Projeto e ao Estudo Acompanhado foi institucionalmente viabilizado nas turmas abrangidas pelo PM II. Esta possibilidade tem sido considerada fundamental pela comissão de acompanhamento do PM II e do PMEB no processo de generalização do programa desde 2009/2010.

Esta questão é de natureza complexa pois envolve uma diversidade de fatores que vão desde a forma como os professores gerem o currículo propriamente dito, onde o tempo, naturalmente, não pode deixar de estar presente, às dinâmicas de participação e de autonomia dos alunos, à natureza das tarefas utilizadas nas salas de aula e à gestão do próprio tempo.

Se é verdade que, para um número de professores, parte do problema tem a ver com o tempo curricular da Matemática, que consideram escasso, não é menos verdade que muito ainda se poderá fazer no domínio da melhoria das competências dos professores na área do desenvolvimento e da gestão do currículo.

O que este estudo permitiu concluir é que há, de facto, um problema com a gestão do tempo e que, muito provavelmente, surgirão dificuldades para que o programa possa ser cabal e integralmente cumprido. Parece ser necessário equacionar bem a dimensão que este problema tem ao nível da generalização.

O Problema da Avaliação Para as, e das, Aprendizagens

As conceções e as práticas de avaliação dos professores participantes, tanto quanto foi possível apurá-las através deste estudo, revelaram-se, em geral, algo desfasadas do que acerca do assunto consta no PMEB. Mas, além disso, o que foi talvez mais surpreendente foi ter-se verificado que as práticas de avaliação dos professores, em geral, não pareceram estar articuladas com as suas práticas de ensino.

Para a maioria dos professores participantes há questões conceptuais que, no domínio da avaliação, não estão resolvidas, tais como o próprio conceito de avaliação, os seus propósitos e funções, as suas modalidades e as respetivas naturezas. Este facto explica, em boa medida, o problema. E, por isso, parece ser necessário agir ao nível da formação. Repare-se que, por exemplo, o adequado desenvolvimento da avaliação formativa e a sua articulação com a avaliação sumativa interna podem contribuir para melhorar substancialmente as aprendizagens dos alunos. Consequentemente, a questão da gestão do tempo pode vir a ser melhorada com uma adequada utilização daquelas duas modalidades de avaliação.

Os professores, apesar de utilizarem uma variedade de tarefas que pareceram francamente adequadas para aprender, para ensinar e para avaliar, só as utilizavam nos dois primeiros

processos, pelo menos de forma consciente. De facto, na maioria das vezes, distribuíam *feedback* e formulavam questões mas não valorizavam essas suas ações como ações avaliativas. Consequentemente, perdia-se alguma estruturação e alguma organização que é necessária no processo de avaliação e que é fundamental para que ele esteja devidamente articulado/integrado com os processos de ensino e de aprendizagem. Na verdade é a avaliação que acaba por "ligar" o ensino e a aprendizagem e com esta ideia os professores ainda não pareceram estar a lidar adequadamente.

Por vezes, ficava-se com a sensação que, para muitos professores, para haver avaliação tem que haver instrumentos, classificações e medidas, mesmo quando falavam de avaliação para as aprendizagens (avaliação formativa). Por outro lado, quando se falava de avaliação das aprendizagens (avaliação sumativa) associavam-na única e simplesmente a testes ditos sumativos, ou seja, parecia não se admitir que, por exemplo, uma sistematização de assuntos que supostamente se aprenderam num dado período de tempo, feita através de questões orais, pode ser uma avaliação de natureza sumativa.

Em suma, das práticas que foi possível observar e analisar no âmbito deste estudo, as de avaliação foram as que se revelaram mais inconsistentes e até desfasadas do PMEB. Nesse sentido, trata-se de uma matéria que deve ser objeto de algum tipo de intervenção, sobretudo se se pensar que as práticas de avaliação nas salas de aula estão fortemente relacionadas com o desenvolvimento das aprendizagens dos alunos.

Bibliografia

American Evaluation Association (2006). *Guiding principles for evaluators*. Acedido em 25 de outubro de 2010, http://www.eval.org/GPTraining/GP%20Training%20Final/gp.package.pdf.

Bishop, A. (Ed.) (2003). *Second International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: The Netherlands: Springer.

Black, P., & Wiliam, D. (1998). *Inside the black box: Raising standards through classroom assessment*. Acedido em 17 de outubro de 2008, de www.pdkintl.org/kappan/kbla9810.htm

Bonesi, P. G., & Souza, N.A. (2006). Fatores que dificultam a transformação da avaliação na escola. *Estudos em Avaliação Educacional, 17*(4), 138.

DGIDC (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Acedido em 21 de maio de 2009, de http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf.

English, L. (Ed.) (2001). Handbook of International Research in Mathematics Education. Mahwah, NJ: LEA.

Fernandes, D. (2005). *Avaliação das aprendizagens: Desafios às teorias, práticas e políticas*. Cacém: Texto Editores.

Fernandes, D. (2008). *Avaliar para aprender: Fundamentos, práticas e políticas*. São Paulo: Editora UNESP.

Fernandes, D., Borralho, A., Vale, I., & Cruz, E. (2010). *Uma avaliação do Processo de Experimentação do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico (2008/2009)*. Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Holden, D., & Zimmerman, M. (2009). *A Pratical Guide to Programme Evaluation Planning*. London: Sage

Jaworski, B. & Wood, T. (Eds.) (2008). *The mathematics teacher educator as a developing professional: Individuals, teams, communities and networks* (International handbook on mathematics teacher education, Vol. 4). Rotterdam: The Netherlands: Sense Publishers.

Lester, F. (Ed.) (2007). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Charlotte, NC: NCTM/Information Age Publishing.

NCTM. (2000). Principles & Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM.

Nevo, D. (2006). Evaluation in education. In I. Shaw, J. Greene & M. Mark, *The sage handbook of evaluation* (pp. 440-460). London: Sage.

Saha, L. J., & Dworkin, A. G. (Eds.) (2009). *International Handbook of Research on Teachers and Teaching*. Netherlands:Springer.

Spaulding, D. (2008). *Program evaluation in practice*. San Francisco, CA: Jossey Bass.

Westat, J. (2002). *The 2002 User Friendly Handbook for Project Evaluation*. Washigton, DC: National Science Foundation.

Wolcott, H. (1994). *Transforming qualitative data*. London: Sage.

Explorar tarefas matemáticas

EXPLORAR TAREFAS MATEMÁTICAS

Ana Paula Canavarro
Universidade de Évora e Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
apc@uevora.pt

Leonor Santos
Instituto de Educação e UIDEF da Universidade de Lisboa
leonordsantos@sapo.pt

A centralidade da tarefa no ensino da Matemática

Em 1986, Christiansen e Walther publicaram *Task and activity*, um dos primeiros artigos em que o conceito de tarefa é discutido como elemento fundamental do ensino. Neste artigo, atualmente considerado um clássico, os autores afirmam que na aula, "A tarefa proposta [pelo professor] torna-se o objeto para a atividade do aluno" (p. 244), distinguindo entre o que é a questão matemática concreta que o professor apresenta aos alunos e a atividade que estes desenvolvem (ou não) em função da sua adesão e capacidade de realização num contexto que é mediado também pelo professor: "o contexto da tarefa, em conjunto com as ações relacionadas do professor, constituem a metodologia principal através da qual se espera que a Matemática seja transmitida aos alunos" (p. 244). A tarefa surge aqui com uma identidade própria, independente e à priori da experiência de aprendizagem que poderá proporcionar aos alunos.

Existem diversos tipos de tarefas matemáticas que se podem organizar consoante o seu grau de abertura, de desafio cognitivo, de relação com a realidade, de duração de realização (Ponte, 2005). O NCTM, nas Normas Profissionais, chama a atenção da importância de os alunos contactarem com tarefas matemáticas válidas (NCTM, 1991/1994) que caracteriza segundo três critérios: o conteúdo matemático presente na tarefa, os alunos a que se dirigem e os modos de aprendizagem matemática que proporcionam. A tarefa deve traduzir as orientações curriculares, revelando uma "matemática sólida e significativa", com a compreensão profunda do tópico e o desenvolvimento de processos matemáticos particulares, e também ajudar o aluno a compreender o que é fazer matemática. As tarefas matemáticas válidas desafiam os alunos, desenvolvem as suas compreensões e aptidões matemáticas, estimulam-nos a estabelecer conexões e a desenvolver um enquadramento coerente para as ideias matemáticas, apelam à formulação e resolução de problemas e ao raciocínio matemático e promovem a comunicação sobre a matemática (NCTM, 1991/1994).

Em Portugal, o Currículo Nacional do Ensino Básico (ME, 2001, p. 68) defende que "todos os alunos devem ter oportunidades de se envolver em diversos tipos de experiências de aprendizagem", tais como resolução de problemas, atividades de investigação, projetos e jogos, pressupondo o contacto e trabalho dos alunos com um conjunto de tarefas de natureza muito diversa. Mais recentemente, o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), para além das experiências de aprendizagem enunciadas no documento anterior, acrescenta "exercícios que proporcionem uma prática compreensiva de procedimentos" (p.8). Neste programa existe um forte apelo ao professor para que utilize tarefas de diversos tipos na sala de aula, e que estas ajudem a cumprir uma multiplicidade de objetivos de aprendizagem: a construção de conceitos; a compreensão dos procedimentos matemáticos; o domínio das

linguagem matemática e das representações relevantes; e o estabelecimento de conexões dentro da Matemática e entre esta e outros domínios:

> A diversificação de tarefas e de experiências de aprendizagem é uma das exigências com que o professor se confronta, e a escolha das que decide propor aos alunos está intimamente ligada com o tipo de abordagem que decide fazer, de cunho essencialmente direto ou transmissivo, ou de caráter mais exploratório. Em qualquer caso, é preciso que as tarefas no seu conjunto proporcionem um percurso de aprendizagem coerente que permita aos alunos a construção dos conceitos fundamentais em jogo, a compreensão dos procedimentos matemáticos em causa, o domínio da linguagem matemática e das representações relevantes, bem como o estabelecimento de conexões dentro da Matemática e entre esta disciplina e outros domínios. (ME, 2007, p.11)

Nos programas de matemática do ensino secundário existem também várias referências que sublinham a importância das tarefas a selecionar pelo professor para a sala de aula, "as quais deverão contribuir para o desenvolvimento do pensamento científico, levando o estudante a intuir, conjeturar, experimentar, provar, avaliar…" (ME, 2001, p.10). Os programas do secundário referem-se explicitamente à resolução de problemas, atividades investigativas e, de forma recorrente, às aplicações e modelação matemática, justificando-se pela sua potencialidade de tornar visível que "o papel da matemática como instrumento de modelação da realidade é incontornável" (ME, 2001, p. 11).

Assim, hoje em dia parece ser consensual o reconhecimento da enorme importância da tarefa como base das experiências matemáticas a proporcionar aos alunos, a vantagem da diversificação de tarefas que possibilite uma diversidade de experiências matemáticas aos alunos, e a necessidade da sua adequação aos propósitos de ensino definidos pelo professor.

Seleção, adaptação e planificação das tarefas para a sala de aula

No seu trabalho de preparação letiva, o professor tem como uma das suas principais funções selecionar as tarefas que pretende levar para a sua sala de aula. Até há uns anos, esta seleção constituía um trabalho muito menos complexo do que atualmente. Por um lado, hoje em dia são inúmeros os mediadores curriculares que proporcionam ao professor um amplíssimo leque de tarefas (Stein & Kim, 2009), às quais o acesso é facilitado por via da internet. Por outro lado, as tarefas devem procurar contribuir para dar cumprimento às exigências curriculares atualmente defendidas, pelo que precisam de ser criteriosamente escolhidas consoante a sua orientação para propósitos específicos diferentes. Apesar de a tarefa só por si não dizer tudo, ela encerra muito daquilo que os alunos podem aprender e é reconhecido que as tarefas, pelas suas características próprias, ocasionam diferentes oportunidades para a aprendizagem dos alunos (Boston & Smith, 2009). Por exemplo, se se pretende desenvolver a capacidade de raciocinar e resolver problemas dos alunos, é necessário investir em tarefas com elevado nível de complexidade cognitiva (Stein & Lane, 1996; Stein & Smith, 2009).

A análise das características das tarefas é, pois, um aspeto essencial para a sua seleção. Nesta secção desta revista, alguns textos reportam-se a este aspeto. Claúdia Oliveira e Hélia Oliveira analisam as características das tarefas de modelação, Ana Patrícia Gafanhoto e Ana Paula Canavarro analisam as características das tarefas que promovem o uso de representações múltiplas de funções em ambientes com recurso ao computador, Catarina Delgado, Joana Brocardo e Hélia Oliveira analisam as características de tarefas que promovem o desenvolvimento do sentido de número nos alunos. Ressalta destes estudos a importância de o professor reconhecer nas tarefas as características essenciais que contribuem para proporcionar aos alunos as aprendizagens específicas que pretende, nomeadamemente aspetos como a estrutura da tarefa, a formulação das questões e a sequência pela qual

surgem. O conhecimento da influência destes aspetos contribui para que o professor esteja mais preparado para adaptar da melhor forma as tarefas que deseja usar com os seus alunos.

Um outro cuidado que o professor tem na sua preparação letiva é o de sequenciar as tarefas matemáticas que propõe aos alunos ao longo do tempo. Muitas vezes este trabalho surge no contexto da elaboração de uma sequência de ensino focada num terminado tema/tópico matemático, na qual as várias tarefas adotadas são chamadas a cumprir papéis distintos, e a ordem pela qual são apresentadas aos alunos nas sucessivas aulas não é indiferente. Nesta secção, Cristina Loureiro propõe um percurso didático de estruturação espacial e geométrica, Hélia Pinto propõe uma trajetória de aprendizagem de uma turma com vista ao desenvolvimento do raciocínio multiplicativo, Hélia Ventura e Hélia Oliveira propõem uma experiência de ensino cujo objetivo principal foi proporcionar o desenvolvimento do sentido de número racional nos alunos. Sublinha-se destes estudos a importância das práticas de planificação letiva dos professores ser pensada como um todo coerente e contemplar tarefas que ajudem a cumprir objetivos específicos mas de forma articulada, tendo em vista o objetivo global da sequência de ensino. Destaca-se ainda a importância das sequência de ensino ou trajetórias de aprendizagem puderem ser ajustadas em função da apreciação que o professor faz da resposta dos alunos.

O desenvolvimento das tarefas na aula

É na relação com os alunos que as tarefas revelam o seu potencial, sendo aqui determinante o papel do professor na sua exploração. As formas de trabalho que escolher, os recursos que proporcionar, a gestão que fizer do tempo e das interações na sala de aula, o papel que se reservar a si mesmo e aos alunos, vão limitar ou potenciar as oportunidades de aprendizagem criadas a partir das tarefas (Smith & Stein, 1998).

A ação do professor é especialmente crítica no desenvolvimento de tarefas de natureza investigativa ou problemática, onde se espera que orquestre a discussão da tarefa e oriente a sistematização das aprendizagens (Canavarro, 2011; Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008). A condução de aulas com estas características constitui, em muitos casos, um grande desafio para o professor:

> A investigação já realizada revela que as tarefas que apresentam um nível de desafio cognitivo elevado para os alunos, constituem também o maior desafio a nível da concretizaçõa na sala de aula para os professores (Stein *et al*., 1996). Em primeiro lugar, estas tarefas tendem a ser também conceptualmente exigentes para os professores, o que relevante se atendermos a que muitos tiveram poucas oportunidades para aprender matemática de forma não procedimental. Em segundo lugar, as aulas em que os alunos se envolvem com tarefas de elevado nível cognitivo são difíceis de orquestrar. Em contraste com aulas convencionais de Matemática, durante as quais os professores normalmente demonstram um procedimento e, em seguida, observam os alunos enquanto eles o praticam num conjunto de problemas semelhantes, as aulas que se desenvolvem com tarefas de elevado nível cognitivo tendem a propor aos alunos a resolução de problemas ou explorações. Aulas assim exigem do professor a capacidade de se relacionar com os conceitos que o problema envolve, de ouvir e compreender as estratégias de resolução dos alunos, e de os ajudar a alinhar o seu raciocínio com o conhecimento formal da disciplina. (Stein & Kim, 2009, p.42)

A condução de aulas a partir de tarefas desafiantes, desenvolvidas numa lógica de ensino exploratório, são uma prática ainda pouco consolidada (Franke, Kazemi, & Battey, 2007). No entanto, trata-se de um tipo de prática letiva especialmente adequado para lidar com os atuais desafios curruiculares, quer no que diz respeito ao desenvolvimento de capacidades

transversais nos alunos, quer no que diz respeito à abordagem compreensiva de tópicos matemáticos.

Nesta secção desta revista, são vários os textos que se focam no desenvolvimento das tarefas matemáticas na aula com os alunos. Ricardo Gonçalves e Cecília Costa estudam o papel de mediador do professor na exploração de uma atividade de modelação matemática; Margarida Nunes Silva, Ana Maria Boavida e Hélia Oliveira analisam as práticas de uma professora associadas à realização de uma das tarefas da trajetória de aprendizagem planeada para ensinar números racionais; Marisa Quaresma e João Pedro da Ponte analisam as práticas letivas de uma professora com vista ao desenvolvimento da compreensão da noção de número racional e da capacidade de resolução de problemas; Paulo Dias e Leonor Santos analisam a prática do questionamento oral de um professor com intenção avaliativa; Fátima Delgado, Rosa Antónia Ferreira e José Manuel Fernandes analisam as práticas de duas professoras relacionadas com a exploração de tarefas na aula de Matemática e na de Estudo Acompanhado. Ana Paula Canavarro, Hélia Oliveira e Luís Menezes analisam as práticas de ensino exploratório de uma professora e identificam as suas ações e intenções que estão subjacentes.

Destes estudos sobressai a ideia da complexidade do trabalho que o professor realiza com vista a promover uma exploração adequada e rica da tarefa pelos alunos, nomeadamente quando se depara com situações por ele não antecipadas que derivam da atitude e da qualidade da resposta dos alunos à tarefa. As situações em que o desenvolvimento da comunicação matemática é objetivo de aprendizagem, requerem especial atenção do professor, seja na gestão das interações entre os alunos, na procura de aperfeiçoamento da sua forma de expressão, ou ainda na sua apreciação do valor da comunicação – por exemplo, na regulação das aprendizagens. As tarefas e a comunicação são precisamente os dois elementos-chave das práticas letivas do professor que João Pedro da Ponte, Marisa Quaresma, Isabel Velez, e Joana Mata-Pereira identificam, e apresentam elementos de um modelo para o estudo das práticas profissionais dos professores de Matemática, combinando as abordagens cognitiva e sociocultural.

Em jeito de conclusão

As tarefas são um elemento fundamental que muito marcam as possibilidades de aprendizagem matemática dos alunos. Na atualidade, tanto a seleção de tarefas adequadas e ricas, como o seu desenvolvimento na aula com os alunos, coloca grandes desafios ao professor, sendo estas duas atividades componentes essenciais da sua prática letiva.

É importante que a investigação em educação matemática continue a procurar compreender e aprofundar o conhecimento neste domínio, não perdendo de vista o contexto de mudança curricular associado ao atual programa de Matemática do ensino Básico, ainda recente, e que solicita o professor a adotar um ensino exploratório com base em tarefas diversificadas (ME, 2007). Numa agenda para futura ação, serão de contemplar questões como:

Como concebem os professores o conceito de tarefa matemática e de que se reveste realmente? Que função atribuem às tarefas no ensino da Matemática? Que relação estabelecem entre as "aulas com tarefas" e as restantes aulas?

Que recursos adotam os professores para selecionar tarefas para a aula? Quais as suas fontes de inspiração? Qual o papel dos manuais escolares? Que outros mediadores curriculares se destacam?

Como selecionam os professores as tarefas para as suas aulas, que critérios usam? Como adaptam as tarefas matemáticas aos propósitos matemáticos que definem para as suas aulas? Como consideram as diferenças de interesses e aprendizagem dos próprios alunos? Como lidam com tarefas de natureza de nível cognitivo elevado com alunos com dificuldades?

Como planificam os professores as aulas em que exploram tarefas de natureza problemática? Que aspetos consideram? Que dificuldades surgem? Que recursos prevêm para apoiar a o desenvolvimento das tarefas e sua discussão pelos alunos?

Como adaptam os professores as tarefas aos dispositivos tecnológicos que estão ao dispor nas aulas? Que alterações fazem relacionadas com o uso de representações múltiplas, de dinamismo e potencialidades especificas do software a usar, em particular com o quadro interativo?

Como conduzem os professores as aulas com tarefas de natureza exploratória? Como estruturam as aulas e as desenvolvem? Como gerem o tempo e os recursos? Que dificuldades experimentam?

Como orquestram os professores a discussão das tarefas pela turma? Como as usam para promover o desenvolvimento das capacidades transversais de resolução de problemas, raciocínio matemático e, em especial, de comunicação matemática?

Referências

Boston, M., & Smith, M. (2009). Transforming secondary mathematics teaching: increasing the cognitive demands of instructional tasks used in teachers' classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(2), 119-156.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática, 115*, 11-17.

Christiansen, B., & Walter, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspetives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.

Franke, K. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 225-356). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

ME (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

ME (2001). *Programa de Matemática A – 10º ano*. Lisboa: ME.

ME (2007). *Programa de Matemática para o Ensino Básico*. Lisboa: ME.

NCTM (1991). *Normas para o Currículo e a Avaliação da Matemática Escolar*. Lisboa: APM e IIE. (Trabalho original publicado em 1989).

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM e IIE. (Trabalho original publicado em 1991).

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Smith, M., & Stein, M. (1998). Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 268-275.

Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313-340.

Stein, M. K., & Lane, S. (1996). Instructional tasks and the development of student capacity to think and reason: An analysis of the relationship between teaching and learning in a reform mathematics project. *Educational Research and Evaluation, 2*(1), 50–80.

Stein, M. K., & Kim, G. (2009). The Role of Mathematics Curriculum Materials in Large-Scale Urban Reform: An Analysis of Demands and Opportunities for Teacher Learning. In J. Remillard, B. Herbel-Eisenmann, & G. Lloyd (Eds.), *Mathematics teachers at work: connecting curriculum materials and classroom instruction* (pp. 37-55). NY: Routledge.

Stein, M., & Smith, M. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: Da investigação à prática (artigo original publicado em 1998). *Educação e Matemática, 105*, 22-28.

MODELAÇÃO MATEMÁTICA NO ENSINO PROFISSIONAL: CONSTRUÇÃO E EXPLORAÇÃO DE UMA TAREFA[1]

Cláudia Oliveira
Instituto Profissional de Transportes, Loures
claratejo@gmail.com

Hélia Oliveira
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ul.pt

Resumo: O presente texto centra-se na construção e exploração de uma tarefa que envolve a modelação matemática de uma situação próxima da realidade, decorrente de atividades de natureza profissional, com alunos do 2.º ano de um curso profissional de nível secundário. A tarefa foi construída segundo os princípios das *tarefas geradoras de um modelo* e a análise da atividade desenvolvida pelos alunos é feita através de um diagrama que representa o ciclo de modelação matemática. Os resultados mostram que a mobilização de conhecimento extra-matemático e as características da tarefa desempenham um papel importante no desenvolvimento dos processos de modelação, aspetos que foram tidos em conta na construção da tarefa proposta.

Palavras-chave: Ciclo de modelação, modelação matemática, conhecimento extra-matemático, tarefas geradoras de um modelo.

Introdução

As aplicações e modelação matemática constituem o tema transversal no *Programa de Matemática para os Cursos Profissionais de Nível Secundário* (ME, 2004), onde é preconizado que o ensino dos vários temas seja suportado por atividades que contemplem a modelação matemática e o estudo de situações da realidade, adequadas a cada curso. Perspetiva-se também o estabelecimento de conexões entre temas matemáticos, aplicações da matemática noutras disciplinas e com relevância para interesses profissionais. O documento *Princípios e Normas* (NCTM, 2007) destaca, igualmente, a importância de um ensino que apele às capacidades de compreensão e aplicação da Matemática, considerando que as aptidões que o mundo profissional exige hoje, ultrapassam a rotina e os procedimentos mecânicos.

A necessidade de os alunos desenvolverem capacidades de interpretação e de trabalhar com sistemas complexos que envolvam processos matemáticos, como construir, descrever, explicar, predizer, representar e quantificar e ainda de usar a matemática para trabalhar, por exemplo, com questões do mundo profissional, faz emergir a modelação matemática como uma atividade importante no ensino e aprendizagem da matemática (Lesh & Doerr, 2003). Contudo, a concretização destas ideias e propósitos para a matemática escolar desafiam a prática dos professores, relativamente à construção de tarefas que favoreçam o envolvimento dos alunos nos processos de modelação.

[1] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto Práticas Profissionais dos Professores de Matemática (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

Este texto decorre de um estudo em que se assume a importância de construir e explorar tarefas de modelação matemática que partam de situações próximas da futura realidade profissional dos alunos, contribuindo para a mobilização do seu conhecimento extra-matemático. O estudo centra-se nas características de uma tarefa de modelação realizada por alunos do 2.º ano de um curso profissional de nível secundário e na atividade que gerou, procurando dar respostas às seguintes questões: i) Qual o papel do conhecimento extra-matemático dos alunos no desenvolvimento dos processos de modelação? ii) Que características da tarefa potenciam o desenvolvimento dos processos de modelação?

Modelos e Modelação matemática

A investigação sobre modelação matemática tem procurado compreender o conceito geral de modelo, de processo de modelação e os seus objetivos principais (Blomhøj, 2008), assim como pensar as características que as tarefas de modelação devem possuir para que possam suscitar a atividade de modelação (Lesh, Hole, Hoover, Kelly, & Post, 2000).

A atividade de modelação

A resolução de tarefas de modelação traduz uma correspondência entre a realidade ("resto do mundo" fora da Matemática) e a Matemática. No ciclo de modelação o ponto de partida é uma *situação real* que tem de ser estruturada pelo resolvedor do problema, que lida com um *modelo real* da situação. O modelo real é traduzido matematicamente, dando origem ao *modelo matemático* da situação original e, inclusivamente, podem ser construídos diferentes modelos da mesma situação. O processo de resolução do problema continua, através da escolha de métodos adequados e do trabalho no seio da matemática, obtendo-se assim *resultados matemáticos*. Estes devem ser traduzidos para o mundo real relativamente à situação original. Assim, o resolvedor do problema também valida o modelo matemático (Blum & Ferri, 2009).

Na literatura existem estudos cujo foco é o processo cognitivo dos alunos enquanto modelam. Matos e Carreira (1995; 1997), por exemplo, analisaram o processo de transição entre a realidade e a matemática e vice-versa, embora não reconstruíssem as transições entre as fases. Ferri (2006; 2007) analisa os processos de modelação dos alunos com o propósito de reconstruir as suas rotas individuais, através da transição entre as fases do ciclo.

Na análise dos processos de modelação dos alunos, veio a tornar-se notória a influência da mobilização do seu conhecimento extra-matemático (CEM) (Ferri, 2007), tendo em conta os contextos das tarefas. Ärlebäck (2009) identificou o recurso ao CEM por parte dos alunos de formas diferentes: na construção do modelo, na validação do modelo ou de estimativas e pela invocação de experiências pessoais.

Vários estudos, com uma abordagem cognitiva da modelação, observam ser frequente a ocorrência da *representação mental da situação* durante a resolução de tarefas de modelação e por isso incluem-na no ciclo de modelação, que adotam nas suas investigações, como se observa na Figura 1 (Ferri, 2006).

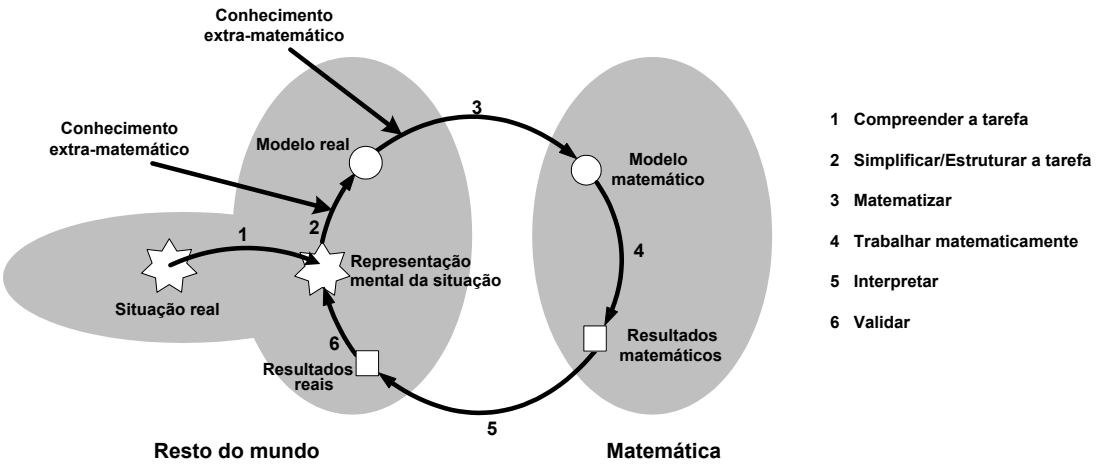


Figura 1 - Ciclo de modelação (Blum & Leiss, 2005; Ferri, 2006)

A transição da *situação real* para a *representação mental da situação* constitui o passo mais importante do processo de modelação, correspondendo à compreensão da tarefa (Ferri, 2006). As vantagens, para a investigação, deste modelo sobre outros, relacionam-se com o fato de este constituir uma ilustração, não normativa, de um processo teórico de resolução que não é linear (Ärlebäck, 2009) e que permite dividir o ciclo de modelação, por exemplo, em *sub-atividades* (Ferri, 2006). As sub-atividades constituem os passos de modelação: *compreender*, *simplificar/estruturar*, *matematizar*, *trabalhar matematicamente*, *interpretar* e *validar*. O ciclo de modelação, assim descrito, pretende auxiliar os investigadores e os professores, a conhecer os passos de modelação relevantes na resolução de uma tarefa de modelação e, em especial, a mobilização do CEM na transição entre as várias fases do processo (Blum & Ferri, 2009).

Tarefas geradoras de um modelo

Especial atenção tem sido dada ao conceito de modelo (*modelling eliciting*) através da criação das tarefas geradoras de um modelo (*model eliciting activities*) que se caracterizam pelo seu contexto significativo e pela relevância dada à forma como os alunos resolvem e interpretam situações problemáticas (Lesh & Doerr, 2003). Estas tarefas procuram evidenciar o raciocínio dos alunos através das descrições, explicações e construções produzidas durante o processo de resolução e propõem fazer emergir um modelo. Nas situações destas tarefas o produto a ser desenvolvido não é conhecido, e existe mais do que uma solução, pelo que vários produtos são possíveis. Ao trabalharem neste tipo de tarefas, os alunos têm de produzir uma descrição ou modelo que foque relações importantes dos dados fornecidos precisando para isso de os simplificar ou reduzir. Outro aspeto importante, é a documentação da explicação dos raciocínios utilizados através do uso de representações como, por exemplo, tabelas, gráficos ou desenhos (Lesh & Doerr, 2003).

Nas investigações sobre as conceções dos professores, acerca da natureza das situações problemáticas baseadas na vida real e nas quais o raciocínio matemático é útil, foram desenvolvidos princípios orientadores para a construção de tarefas geradoras de um modelo onde para cada um é evocada uma questão que testa se o princípio é cumprido (Lesh *et al*., 2000). Os princípios orientadores são os seguintes: (i) *Princípio da realidade*. Os problemas devem ser significativos e relevantes para os alunos. É importante que os alunos deem sentido às situações problemáticas baseados no seu conhecimento e nas suas experiências pessoais.

S*erá que esta situação pode acontecer na realidade?*; (ii) *Princípio da construção do modelo*. A tarefa proposta deve proporcionar ao aluno a oportunidade de descrever, explicar ou justificar as suas conjeturas sobre o problema dado. *A situação cria a necessidade de desenvolver construtos matemáticos significativos?*; (iii) *Princípio da auto-avaliação.* A situação deve proporcionar aos alunos a oportunidade de validar a utilidade do seu modelo. *A situação exige que os alunos acedam continuamente aos modelos gerados?*; (iv) *Princípio da documentação da construção*. A situação e o contexto devem permitir que os alunos expressem por escrito os seus raciocínios enquanto resolvem o problema. *A situação exige que os alunos revelem o seu pensamento enquanto trabalham na resolução do problema;* (v) *Princípio da reutilização e partilha da construção*. As soluções encontradas pelos alunos devem ser generalizáveis e facilmente adaptáveis a outras situações. *O modelo gerado pode ser generalizado a situações similares?*; e (vi) *Princípio da simplicidade*. A situação problemática deve ser simples e facilmente interpretada por outros. *A situação apresentada é simples?* (Lesh *et al*., 2000).

As ideias apresentadas nortearam a construção das tarefas e a análise da sua exploração na investigação realizada (Oliveira, 2010), onde se inclui a que analisamos neste texto.

Metodologia

O estudo seguiu uma abordagem de investigação qualitativa, assumindo um cunho descritivo e interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994). Os participantes são um grupo de quatro alunos de uma turma do 2.º ano do curso profissional de Técnico de Transportes, onde foi realizada a tarefa. Os critérios definidos para a sua escolha foram: i) a facilidade em verbalizar os raciocínios, ii) o interesse pela atividade dos transportes em geral e iii) a heterogeneidade no aproveitamento da disciplina de matemática. A principal fonte de dados foi a gravação em vídeo mas foram também utilizados os registos escritos produzidos pelos alunos e notas de campo registados pela primeira autora, enquanto investigadora e professora da turma. Para a análise dos dados, recorreu-se ao diagrama adotado neste estudo para representar o ciclo de modelação (Fig. 1). Na análise das transcrições, as elocuções e as ações dos alunos foram codificadas de acordo com as fases apresentadas. O resultado final foi traduzido através do diagrama (Fig. 2) que acompanha a caracterização do processo de modelação, na secção 5 deste texto. As setas a tracejado representam a rota descrita pelo grupo durante a resolução da tarefa proposta.

Princípios gerais da tarefa de modelação "Entregas ao domicílio"

A construção da tarefa. Para a elaboração da tarefa proposta, a professora conversou longamente com o professor da disciplina de Tecnologias de Gestão de Transportes, de modo que as situações propostas fossem contextualizadas na realidade profissional da área dos transportes e que os alunos lhe reconhecessem autenticidade. Com esse mesmo objetivo, contactou também com antigos alunos da escola que trabalham na área dos transportes, que partilharam as suas reflexões sobre o que representou para eles a matemática escolar e a matemática que usam no seu quotidiano profissional. Conversou, ainda, com diretores de empresas da área dos transportes sobre a forma como encaravam a importância das aprendizagens de matemática dos seus empregados.

A tarefa em análise. A tarefa "Entregas ao domicílio" surgiu na sequência de um conjunto de aulas onde foram exploradas algumas situações modeladas por funções racionais. A elaboração do seu enunciado procurou seguir os princípios apresentados anteriormente na

seção 2.2 e inserir-se no contexto da disciplina de Tecnologias e Gestão de Transportes, incluída no plano curricular do curso, na qual os alunos simularam a criação da sua própria empresa de transportes de mercadorias, "Transportes 2TT". O enunciado tem duas mensagens: uma do diretor da empresa e outra de um potencial cliente que pretende fazer o aluguer de uma carrinha para distribuição de compras ao domicílio e que pede a ajuda da empresa para fazer o cálculo do preço a cobrar aos seus próprios clientes pela prestação deste serviço. Na primeira mensagem, o diretor fornece algumas informações respeitantes ao aluguer da carrinha e sobre a distância do domicílio dos clientes ao supermercado e pede que seja calculado um valor por quilómetro a cobrar ao cliente do supermercado. Na resolução desta tarefa os alunos precisam da informação complementar (Anexo 2) fornecida com uma tarefa anterior.

Objetivos principais. Estes são: i) ligar a matemática com o CEM do aluno, encarando esta ligação como uma ferramenta motivadora na resolução da tarefa; ii) promover a mobilização de conhecimentos matemáticos adequados para dar respostas próprias face a problemas imbuídos na realidade; iii) promover a comunicação por escrito e oral das soluções encontradas e iv) observar a interação estabelecida entre os alunos participantes no estudo.

Desenvolvimento da tarefa. Para a realização desta tarefa previu-se a utilização de duas aulas de 90 minutos cada. Uma parte da segunda aula seria dedicada à apresentação dos resultados de cada grupo, à turma, para discussão alargada. Os alunos poderiam começar por identificar o número de quilómetros como a variável independente e o custo da carrinha por dia como a variável dependente e relacionar estas variáveis com o objetivo de encontrar um modelo matemático que fornecesse o custo da carrinha por dia, para o dono do supermercado, em função do número de quilómetros percorridos, com a aplicação da percentagem de lucro que decidissem apurar. Para calcular o valor por quilómetro, os alunos poderiam socorrer-se da tabela que consta do Anexo 2.

Na relação que fornece o custo diário do aluguer da carrinha para o dono do supermercado está envolvida uma função afim. Para que pudessem propor um valor por quilómetro, a cobrar ao cliente do supermercado, os alunos poderiam observar a relação entre o custo diário da carrinha e o número de quilómetros realizados diariamente, isto é, o preço médio a pagar por quilómetro. Nesta relação está envolvida uma função racional. Os alunos poderiam explorar a representação gráfica destas funções utilizando a calculadora gráfica (CG).

Modo de trabalho. O modo de organização dos alunos é o trabalho de grupo para que a comunicação, estabelecida entre eles durante a resolução da tarefa, fomentasse a compreensão e a procura de estratégias. A discussão da tarefa em grande grupo foi também prevista, para tornar visível, a toda a turma, a valorização dada ao raciocínio dos alunos em detrimento dos resultados finais, sendo proporcionado ao representante de cada grupo a oportunidade de expor a sua resolução.

Exploração da tarefa "Entregas ao domicílio"

Depois de analisada a atividade integral dos alunos, durante as duas aulas dedicadas à resolução desta tarefa, observou-se que o ciclo de modelação é percorrido uma vez, embora se observem avanços e recuos na transição entre as fases do *modelo matemático*, dos *resultados matemáticos*, dos *resultados reais* e da *representação mental da situação*, como se pode observar na Figura 2, através das setas de duplo sentido. A atividade dos alunos é predominante, entre a fase da situação real e a fase do modelo matemático. Na primeira aula a atividade dos alunos começa com o confronto com a situação real. Os alunos fazem uma representação mental da situação, através da compreensão da

tarefa e usando o conhecimento extra-matemático. Na tentativa de simplificar o problema apresentado e de estruturar uma abordagem, os alunos deparam-se com algumas dificuldades para fazer emergir um modelo real, superadas pela mobilização do CEM, e já perto do final da primeira aula os alunos iniciam a matematização do problema. Na segunda aula, a atividade dos alunos, coadjuvada pelo CEM, centra-se em torno da matematização e do trabalho matemático para encontrar resultados que virão a ser considerados, pelo grupo, como os resultados reais e que permitem, na sua interpretação, a conclusão da resolução da tarefa, após uma ténue validação.

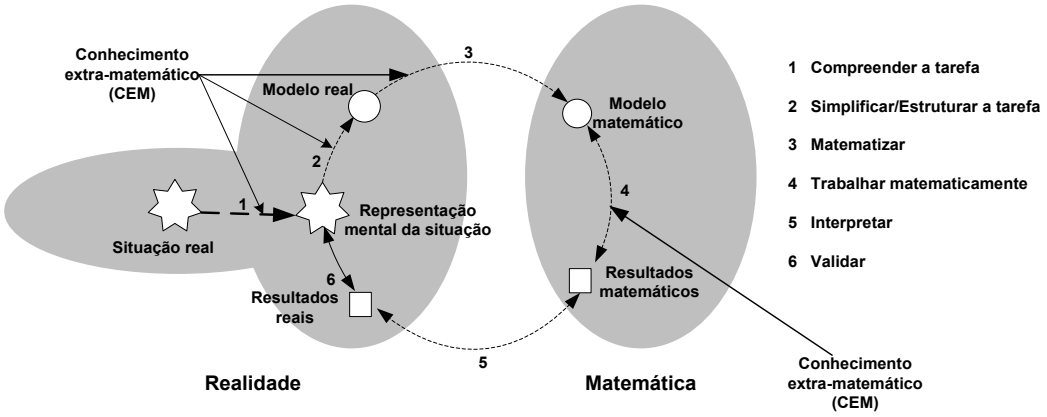


Figura 2 – Ciclo de modelação e sub-atividades na tarefa de modelação "Entregas ao domicílio"

De seguida, pormenoriza-se a atividade dos alunos durante a resolução da tarefa, de acordo com a rota no ciclo de modelação apresentada na Figura 2.

Situação real → Representação mental da situação

Perante a situação real apresentada, os alunos focam a atenção nos dados que consideram essenciais e um aluno do grupo sumariza o que é pedido na tarefa, como sendo "um aluguer de um veículo e não de um transporte de aluguer", reportando-se a um serviço que lhe é familiar no âmbito do transporte de mercadorias, evidenciando o uso do CEM para tentar compreender a tarefa e representar mentalmente a situação dada.

Representação mental da situação → Modelo real

Na transição da *representação mental da situação* para o *modelo real*, os alunos tentam simplificar e estruturar uma abordagem à resolução da tarefa, apelando ao CEM ao estabelecer a comparação com situações reais idênticas, observando-se que se deparam com muitas dificuldades, como, por exemplo, identificar a estrutura interna da situação.

> Rodrigo: Olha a taxa de saída é como os taxistas, ele paga logo os dois euros e depois começa a contar… pagas dois euros mais os quilómetros que fizeres…
>
> Rodrigo: Uma coisa que eu não sei é como é que os gajos do Continente fazem…eles não fazem preços certos?
>
> Andreia: É, é preços certos…
>
> Rodrigo: Por exemplo, eles não levam cinco euros quer tu leves o que levares?…nem que seja só uma coisinha…levam-te cinco euros…
>
> Andreia: É, é assim… Tu vais ter o valor do frete e depois vais dividir o frete pelos quilómetros…aí vai dar quanto é que ele vai cobrar…

Na última intervenção de Andreia, neste excerto, a aluna tem em mente um modelo, embora não fique claro se este se refere ao cliente da empresa ou ao cliente do supermercado. Contudo, esta é uma primeira tentativa onde o número de quilómetros surge como uma potencial variável. Mais adiante, observa-se que os alunos continuam com dificuldade em clarificar uma variável para a relação que pretendem estabelecer e voltam a mobilizar os seus conhecimentos extra-matemáticos, associados a situações reais idênticas.

> Andreia: eu acho que é mais lógico pelo número de quilómetros… não… tu tens aqui… acho que são vinte e nove… (conta o número de clientes) tens aqui os trinta… tu vais fazer os dois euros a dividir pelos trinta? O que te interessa no frete é os quilómetros…logo eu acho que tem mais lógica é fazer os dois euros a dividir pelo número de quilómetros…e é assim que a Sonae Distribuição faz as contas…é pelo número de quilómetros… o número vai variar conforme o número de quilómetros…porque é assim, eles dão-te um x, tu moras na zona n, a zona n levam-te até, imagina, pelo serviço, seis euros, mas depois já fazes mais quilómetros e pertences à zona m, a zona m já vai pagar sete euros por exemplo, porque eles fazem conforme os quilómetros…logo as contas são feitas a partir dos quilómetros e não do número de pessoas… porque tu estás a fazer variar o número de pessoas e não o número de quilómetros…

Os alunos discutem o problema no seio do seu grupo até que Sandro acaba por pedir a intervenção da professora, evidenciando a sua dificuldade em representar a estrutura da situação fornecida.

> Sandro: setora, a gente sabe os quilómetros que vai fazer mas não sabe pensar o custo por quilómetro, como não sabemos o número de clientes nem a quantos clientes vamos aplicar aquela taxa de dois euros. Como é que se faz essa conta? Quantas incógnitas podemos utilizar numa fórmula?
>
> Professora: Eu ainda não percebi o que estás a considerar… Quais são as tuas variáveis? O que é que vocês estão a relacionar? É o número de quilómetros ou é o número de clientes?
>
> Andreia: Ele defende os clientes e eu defendo os quilómetros…
>
> Rodrigo: se usássemos com os quilómetros estávamos a perder dinheiro…(não conclui)
>
> Sandro: como é que é essa fórmula agora?

Modelo real → modelo matemático

Na tentativa de definir uma variável e uma relação funcional, as afirmações dos alunos, no excerto anterior, progridem ao nível matemático, o que evidencia que a sua atividade está a situar-se na transição do *modelo real* para o *modelo matemático*. Rodrigo apela ao seu CEM, com o objetivo de atribuir significado aos conhecimentos matemáticos que vão sendo mobilizados para definir um modelo matemático que traduza a situação enunciada.

Mais adiante, depois de apurado o preço por quilómetro (0,637), de acordo com os valores da tabela que consta do Anexo 2 e com o CEM na área do transporte de mercadorias, Andreia assume $y=0{,}637x+2$ como um bom modelo matemático, o que provoca a discussão no grupo.

> Andreia: Temos de ir ao graph. (Introduz na máquina a função y=0,637x+2 e obtém a sua representação gráfica)
>
> Rodrigo: O que é que é o x?
>
> Andreia: O x cá em baixo? (refere-se ao eixo das abcissas) É os quilómetros. É suposto o preço subir conforme o número de quilómetros…
>
> Sandro: Não…

José: Não, vai ser suposto descer…

Rodrigo: Isto está mal… não pode ser.

Sandro: Está mal o quê?

Rodrigo: Não pode ser…

José: Quanto mais quilómetros fizerem, vais pagar menos…

Na última afirmação de José, o aluno identifica a existência de uma relação de proporcionalidade inversa entre o custo diário da carrinha e o número de quilómetros realizados diariamente. Mais adiante, Andreia refere-se a esta relação por função "inversa". Os alunos discutem a propriedade que esperam encontrar na representação gráfica que traduza a situação, mas José, com base no seu CEM, critica o modelo linear encontrado por Andreia.

Professora: O que é te faz confusão com essa função?

Andreia: É que não é inversa setora… isso é que lhe está a fazer confusão…

Professora: Inversa?

Andreia: É que ele está a pensar na inversa. É isso é que lhe está a fazer confusão.

Professora: Inversa como?

Andreia: (vira-se para José) Não é? Tu estavas a pensar que quanto maior fosse o número de quilómetros menor era o custo.

José: Quanto maior é o número de quilómetros menor é o custo.

Andreia: Tens uma empresa que faz uma coisa de Loures para Santarém e de Loures para o Porto. Para o Porto fica mais barato do que para Santarém? Eu acho que o do Porto fica mais caro.

José: Tens que cobrar mais aos que estão mais perto.

Andreia: O custo por quilómetro diz tudo… logo tem de ser aquele custo por x quilómetros. Se aumenta os quilómetros, aumenta o custo. Por isso, nunca pode ser de outra maneira.

O sentido que atribuem à representação gráfica obtida com a CG permite ajudá-los a decidir sobre a validade do modelo encontrado. Esta é a estratégia que Sandro utiliza ao introduzir na máquina a expressão $\frac{0.637x+2}{x}$, dando sentido aos comentários de José e de Andreia, ao procurar, intuitivamente, a função "inversa" que sabia não ser representada por uma reta, mas sim de um outra forma que obrigaria que na expressão algébrica surgisse uma divisão pela letra utilizada para representar o número de quilómetros.

Sandro obtém uma representação (Fig. 3) e a interacção entre Rodrigo, José e Sandro permite a compreensão da representação gráfica obtida no contexto da situação apresentada e a validação do seu modelo. Interpretam o significado do eixo das abcissas e discutem a redefinição da janela de visualização, no que diz respeito ao domínio e o contradomínio adequado ao contexto da situação.

Sandro: É que eu não sei explicar o que está aí. Eu não percebo bem esta matéria.

Professora: Não percebes esta matéria? Rodrigo ajuda lá um bocadinho.

Rodrigo: Para dizer o quê?

Professora: Ele conseguiu ver o gráfico, mas agora está com dificuldade em dizer o que é isso.

Rodrigo: Isto não nos interessa. (Aponta para a ramo negativo da hipérbole)

Professora: Porque é que isso não interessa?

Rodrigo: Não há quilómetros negativos. Nós não fazemos quilómetros negativos.

José: O que é que é o eixo dos xx?

Sandro: É o número de quilómetros.

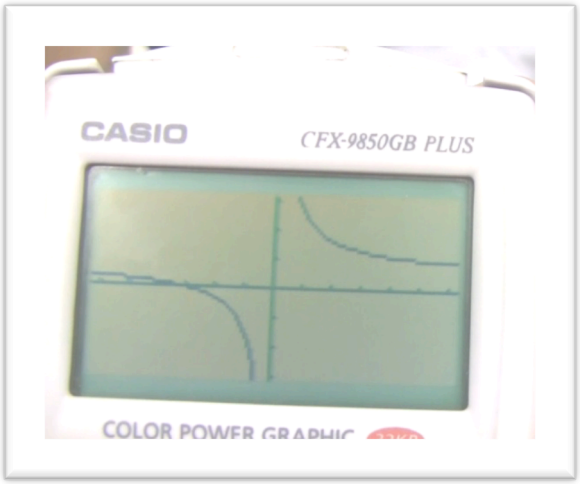


Figura 3 – Representação gráfica obtida por Sandro

Os valores utilizados para a janela de visualização ([1,240]×[0,3]) partem de uma análise dos dados, do contexto do problema e do sentido atribuído à expressão analítica. Nesta altura, os alunos tinham gerado dois modelos: $y = 0{,}637x + 2$ e $y = \frac{0{,}637x+2}{x}$. No entanto, o grupo não tinha ainda clarificado a correspondência destes modelos com as situações apresentadas no enunciado da tarefa.

Modelo matemático ↔ Resultados matemáticos ↔ Resultados reais

A atividade dos alunos já transitou do *modelo matemático* para os *resultados matemáticos*, muito embora retorne ao *modelo matemático* que os alunos perseguem na tentativa de o compreender.

A discussão dos alunos baseia-se na leitura das representações gráficas obtidas com a CG, procurando validar os modelos que lhes correspondem através de metáforas com o seu CEM. Na tentativa de encontrar um modelo que traduza a situação, mostram alguma dificuldade em estabelecer relações entre as diferentes formas de representar uma função, especialmente a analítica e a gráfica. A validação do potencial modelo para a situação problemática continua dependente do significado da variável na expressão da função introduzida na CG e da interpretação que os alunos fazem da sua representação gráfica. Esta interpretação é feita de acordo com a intuição, conhecimentos matemáticos adquiridos em momentos anteriores e com o CEM, nomeadamente na área do transporte de mercadorias.

Os alunos continuam a usar as potencialidades gráficas da CG para fazer procedimentos, tais como concretizar o valor da variável para 50 quilómetros, de forma a tirar conclusões. Não manipulam algebricamente as expressões que vão procurando estabelecer mas procuram dar sentido às expressões encontradas.

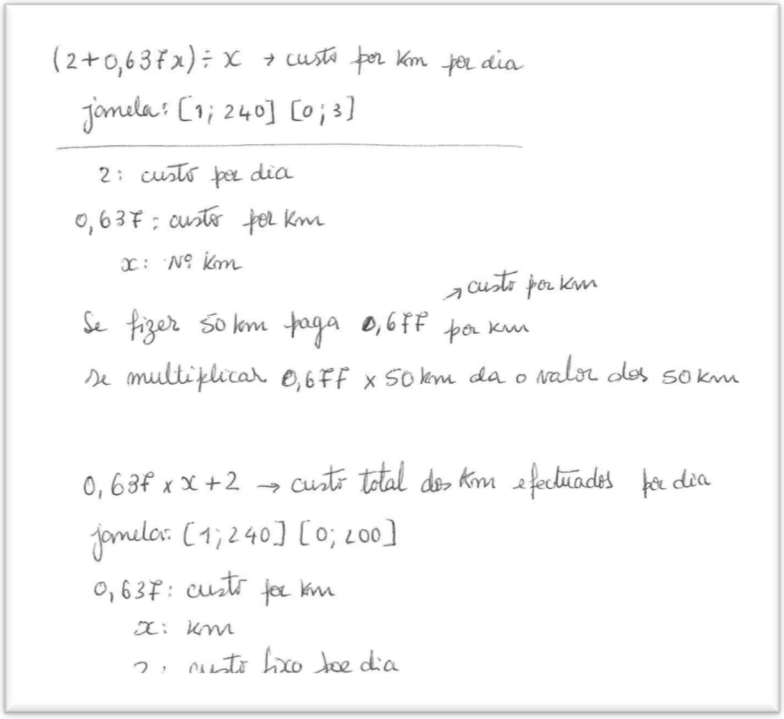


Figura 4 - Primeiro registo escrito sobre a tarefa

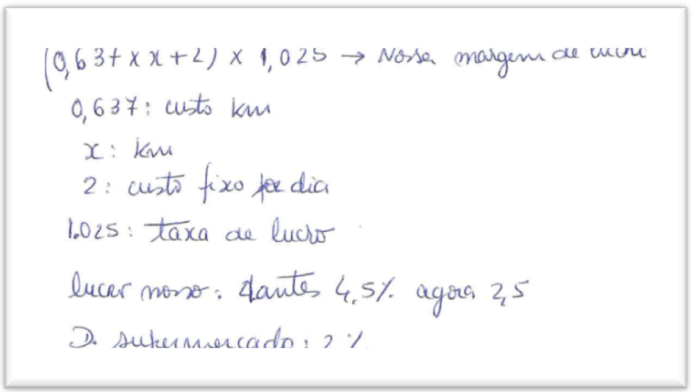
Na resposta apresentada, registam as expressões analíticas das funções obtidas através do sentido dado à sua representação gráfica obtida pela CG, indicando a janela de visualização utilizada.

Na transição do *modelo matemático* para os *resultados matemáticos*, os alunos trabalham matematicamente muito apoiados na interpretação das representações gráficas e os resultados matemáticos são interpretados de acordo com a sua possível correspondência com resultados reais.

Resultados reais ↔ Representação mental da situação

Depois de terem obtido alguns resultados matemáticos os alunos procuram adequá-los à representação mental da situação apresentada e concluir a tarefa, verificando se respondem ao que é solicitado, evidenciando a transição para a representação mental da situação. Contudo, observa-se, também, um retorno aos resultados reais e à validação dos seus raciocínios através da interpretação dos resultados matemáticos obtidos com a CG.

Já perto do final da segunda aula, os alunos consideram a tarefa concluída produzindo o registo escrito da Figura 5.



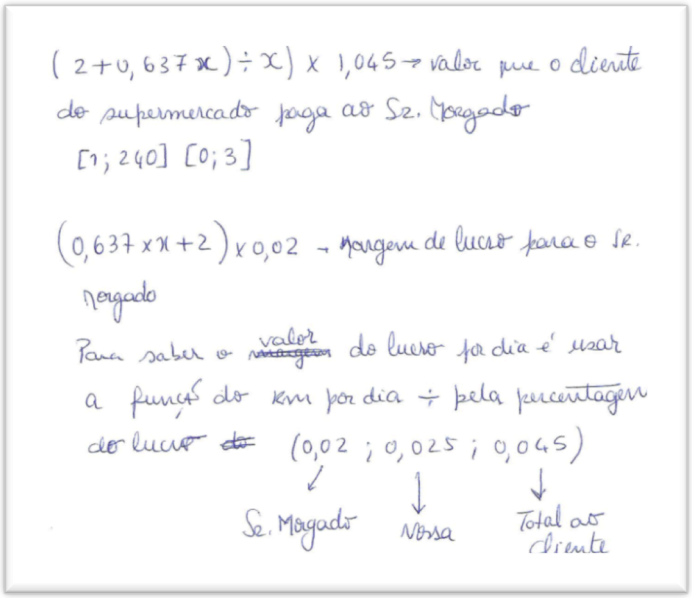


Figura 5 – Registos escritos como resposta à tarefa

Conclusões

De acordo com as questões de investigação formuladas, procuramos de seguida sintetizar as principais conclusões do estudo.

No que diz respeito ao papel do CEM no desenvolvimento dos processos de modelação, primeira questão do estudo, podemos concluir que este permitiu dar sentido e interpretar os modelos encontrados e desbloquear as situações de impasse verificadas nos processos de modelação. O CEM foi requerido não só na transição da *representação mental da situação* para o *modelo real*, e deste para o *modelo matemático* como referido por Ferri (2006), mas também na transição entre as fases da *situação real* para a *representação mental da situação* e entre o *modelo matemático* e os *resultados matemáticos*. Em particular, o CEM foi requerido nas sub-atividades relativas à compreensão, simplificação e estruturação da tarefa e ao trabalho matemático.

A tarefa foi construída com a intenção de apresentar um contexto complexo e exigente do ponto de vista da interpretação requerida, uma vez que nem os elementos essenciais da situação nem os conceitos ou procedimentos matemáticos envolvidos eram facilmente identificáveis. Esta situação criou um bloqueio na atividade desenvolvida pelos alunos que, tal como se pretendia, foi ultrapassado pelo uso do CEM que se caracterizou pela comparação com situações reais idênticas, pela utilização de conhecimentos da área de estudo do transporte de mercadorias e por associação a experiências pessoais.

Um dos propósitos bem sucedidos da tarefa foi a promoção da comunicação oral e escrita. Uma parte da discussão, cujo foco saiu do âmbito da matemática, foi fundamental para que os alunos, nos momentos de bloqueio, não desistissem da tarefa. As interações observadas no uso do seu CEM conduziram o processo de modelação e revelaram-se essenciais para a transição entre as fases e para a ativação das diferentes sub-atividades no ciclo de modelação. Deste modo, a opção pelo trabalho em grupo revelou-se bastante adequada às características da tarefa proposta.

Relativamente à segunda questão de investigação, conclui-se que as características da tarefa baseadas nos princípios que nortearam a sua construção (Lesh *et al*., 2000) potenciaram o desenvolvimento dos processos de modelação, como a seguir se fundamenta.

A tarefa tem um contexto significativo para os alunos, tornando-a acessível, cumprindo assim o *princípio da simplicidade*, embora como referimos acima a situação exija um elevado nível de interpretação. A reação inicial positiva que se observou relaciona-se com a familiaridade da situação apresentada e com a proposta de aplicação da matemática no âmbito de outra disciplina já estudada. Desta forma, foi também cumprido o *princípio da realidade*, já que os alunos deram sentido à situação com base no seu conhecimento e nas suas experiências pessoais. A ligação da matemática com o CEM do aluno, como uma ferramenta motivadora na resolução da tarefa, foi assim um objetivo bem sucedido.

A situação apresentada procurou criar oportunidades para aplicar ou gerar um modelo através do estabelecimento de conexões matemáticas entre tópicos relacionados com o tema das funções. O conhecimento matemático necessário para a sua resolução procurou ser ajustado ao nível de competência matemática dos alunos e de forma a constituir um desafio. A forma como os alunos foram progredindo na resolução da tarefa leva-nos a crer que esta lhes proporcionou a oportunidade de descrever, explicar e justificar as suas conjeturas e ainda de mobilizar conhecimentos matemáticos adequados para dar respostas próprias face à situação apresentada. Assim, cumpriu-se o *princípio da construção do modelo*.

A utilização da calculadora gráfica desempenhou um papel fundamental no desenvolvimento dos processos de modelação. Os alunos usaram as representações gráficas obtidas com a CG e interpretaram-nas de acordo com o seu CEM. A CG usada como ferramenta de visualização (Doerr & Zangor, 2000) permitiu experimentar, formular e testar as suas conjeturas, pelo que se conclui que foi utilizada com reflexão sobre os conceitos matemáticos envolvidos e permitiu que desenvolvessem o seu conhecimento matemático e a capacidade para criar e modificar modelos matemáticos (Lesh & Doerr, 2003). Desta forma, ao longo da resolução da tarefa os alunos acederam continuamente aos modelos que foram criando, tendo-se cumprido o *princípio da auto-avaliação*.

Na resolução desta tarefa o processo de comunicação desempenhou um papel importante na interação social dos alunos assim como no desenvolvimento da comunicação matemática. Embora os alunos produzissem respostas escritas pouco detalhadas ou até incompletas, o *princípio da documentação* revela-se igualmente presente na construção da tarefa.

Os modelos encontrados pelos alunos poderiam ser generalizáveis e adaptáveis a outras situações análogas, envolvendo outro tipo de variáveis, o que sugere um desenvolvimento desta tarefa. Desta forma, a construção da tarefa seria ampliada ao *princípio da generalização da construção* (Lesh *et al*., 2000).

A construção e a aplicação desta tarefa constituíram um desafio à prática profissional da primeira autora, que procurou tornar a sala de aula num espaço privilegiado para a mobilização de aprendizagens anteriores, dentro e fora da matemática, e desta forma promover o envolvimento dos alunos na atividade matemática.

Referências

Ärlebäck, J. (2009). On the use of realistic Fermi problems for introducing mathematical modelling in school. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 6(3), 331-364.

Blomhøj, M. (2008). Different perspectives on mathematical modelling in educational research - categorising the TSG21. In *ICMI 11*, Monterey, México. Retirado no dia 20 de Janeiro de 2009 de http://tsg.icme11.org/document/get/811.

Blum, W., & Leiss, D. (2005). – "Filling up" – the problem of independence-preserving teacher interventions in lessons with demanding modelling tasks. In *Proceedings of CERME-4, WG 13 Modelling and Applications* (pp. 1623-1633). Sant Feliu de Guíxols, Spain.

Blum, W., & Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: can it be taught and learnt? *Journal of mathematical modelling and application*, *1*(1), 45-58.

Bogdan, R. e Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Doerr, H., & Zangor, R. (2000). Creating meaning for and with the graphing calculator. *Educational Studies in Mathematics*, *41*, 143-163.

Ferri, B. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, *38*(2), 86-95.

Ferri, B. (2007). Personal experiences and extra-mathematical knowledge as an influence factor on modelling routes of pupils. In *Proceedings of CERME-5, WG 13 Modelling and Applications* (pp. 2080-2089). Larnaca, Cyprus.

Lesh, R., & Doerr, H. (2003). *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Lesh, R., Hole, B., Hoover, M., Kelly, E., & Post, T. (2000). Principles for developing thought-revealing activities for students and teachers. In R. Lesh (ed.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 591- 645). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Matos, J., & Carreira, S. (1995). Cognitive processes and representations involved in applied problem solving. In C. Sloyer, W. Blum & I. Huntley (Eds.), *Advances and perspectives in the teaching of mathematical modelling and applications (ICTMA- 6)* (pp. 71-80). Chichester: Ellis Horwood.

Matos, J., & Carreira, S. (1997). The quest for meaning in students' mathematical modelling. In K. Houston, W. Blum, I. Huntley & N. Neil (Eds.) *Teaching & learning mathematical modelling (ICTMA -7)* (pp. 63-75). Chichester: Ellis Horwood.

ME (2004). *Programa de Matemática para cursos profissionais de nível secundário.* Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral de Formação Vocacional.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Oliveira, C. (2010). *Modelação e Funções: uma experiência no ensino profissional*. (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa).

Anexo 1 – Tarefa "Entregas ao domicílio"

Entregas ao domicílio Caixa de entrada | X

Transportes2TT para colaboradores mostrar detalhes 10 Mar (10:30)

Responder

Caro colega:

O Sr. Morgado é proprietário do supermercado *Sempre Fresco* e hoje de manhã enviou-me o *e-mail* que reencaminho e a lista dos seus habituais clientes com algumas informações. Deve ser-lhe cobrada uma taxa de saída da carrinha de 2 euros por dia e aplicar o valor habitual por quilómetro. É nosso cliente há muitos anos, pelo que neste caso, podemos não aplicar a margem de lucro que habitualmente usamos.

Peço-lhe que sugira um valor por quilómetro a cobrar ao cliente do supermercado para que seja rentável ao Sr. Morgado a realização das entregas ao domicílio. Dê detalhes e uma explicação o mais clara possível para que ele possa decidir se a sua sugestão é boa para ser usada.

Cumprimentos do vosso director.

Manuel Pedrinhas

Transportes 2TT@gmail.com

De: Rui Morgado [ruimorgado@gmail.com]
Enviado: quarta-feira, 10 de Março de 2010 09:52
Para: Transportes 2TT
Assunto: Entregas ao domicílio

Olá Amigo Pedrinhas!

Espero que vá bem. Eu vou bem mais a minha Maria, mas esta crise está a notar-se cada vez mais! Os clientes aqui da zona cada vez mais se atormentam em vir cá ao meu estabelecimento… as pernas já não ajudam! Vejo passar as carrinhas do hipermercado ali do Centro Comercial para cima e para baixo e pensei que se calhar também podia fazer as entregas à casa dos meus clientes de há tantos anos. Talvez assim não perdesse tanta clientela! Olhe, mando-lhe uma lista com algumas informações sobre os nossos habituais clientes. Eu próprio farei a distribuição todos os dias, da parte da tarde. Mande-me lá os preços de quanto ficaria a custar-me este serviço e ajude-me a pensar no preço a cobrar aos meus clientes. Só preciso da carrinha porque o meu carrito não serve para estas coisas.

Até breve,

Rui Morgado

Lista dos clientes do Sr. Morgado

Nome da(o) cliente	Distância da residência ao supermercado (em km)	Nome da(o) cliente	Distância da residência ao supermercado (em km)
Maria	9,4	Madalena	10,9
Rosa	5,1	Fátima	5,9
Gertrudes	7,6	João	8,3
Luísa	13	Inácia	11,2
Josefa	10,1	Miquelina	6,7
Teresa	6,9	Francisco	9,3
Antónia	13,2	Maria Inês	3,2
Conceição	7,9	Matilde	11,4
Maria Clara	4,9	Maria Joana	4,6
Mariana	10,5	Maria do Céu	12,6
Fernanda	6,3	Vitor	3,3
Ana	6,9	Luís	8,1
José	6,2	Filipe	6,4
Maria Rita	7,8	José António	3,7
António	4,9	Maria de Fátima	12,6

Anexo 2 – Informação complementar à tarefa "Entregas ao domicílio"

Excerto de informação sobre custos padrão do transporte de carga completa para o transporte internacional (Anuário da ANTRAM, 2009, p.59)

	€/Km		€/Km
Gasóleo	0,294*	Renovação de Alvará	0,0004
Pneus	0,033	Pedido de licença do veículo	0,00004
Oleo	0,004	Autorização comunitária	0,00004
Manutenção e reparação	0,048	Motorista	0,272
Trânsitos	0,083	Seguros	0,027
Inspecção obrigatória	0,001	Impostos	0,004
Total custos variáveis	**0,462**	Amortizações	0,112
		Juros	0,033
		Total custos fixos	**0,448**
			0,909

Fonte: Logistema – Estudo Comparativo das Condições Económicas de exploração dos transportes de Mercadorias em Portugal e Espanha
*** Preços actualizados em Fevereiro de 2009**

A ADAPTAÇÃO DAS TAREFAS MATEMÁTICAS: COMO PROMOVER O USO DE MÚLTIPLAS REPRESENTAÇÕES[1]

Ana Patrícia Gafanhoto
Escola Secundária Mouzinho da Silveira, Portalegre
patriciagafanhoto@hotmail.com

Ana Paula Canavarro
Universidade de Évora & Unidade de Investigação do IE/UL
apc@uevora.pt

Resumo: O presente texto tem como objetivo discutir de que modo tarefas matemáticas intencionalmente adaptadas pelo professor promovem o uso flexível e eficaz pelos alunos das representações matemáticas relativas às funções. As tarefas caracterizam-se por serem diversificadas no seu contexto (puramente matemático ou relacionado com a realidade) e por se estruturarem de modo a (1) apelarem à familiarização com uma dada representação inicial, (2) pedirem explicitamente a transição entre diversas representações; e (3) requerem a livre escolha de uma ou mais representações para responder a questões de exploração. O estudo desenvolveu-se a partir da análise das representações utilizadas por alunos de 9.º ano na resolução de seis tarefas adaptadas, no domínio das funções, recorrendo ao Geogebra. Em cada tarefa, independentemente do seu contexto, os alunos foram capazes de obter e utilizar todas as representações das funções, conforme solicitado nas questões de transição. Nas questões de exploração, recorreram de forma eficaz às representações já criadas e, em alguns casos, conciliaram algumas delas para produzir as respostas. Assim, o contexto das tarefas não parece ter sido determinante no uso das representações pelos alunos, mas a sua estrutura revelou-se especialmente adequada, de onde se sublinha a importância da adaptação criteriosa das tarefas pelo professor, nomeadamente quando recorre ao computador.

Palavras-chave: Adaptação de tarefas matemáticas; representações múltiplas; ensino das funções; Geogebra.

Introdução

A valorização e quase exclusividade da representação algébrica no estudo da álgebra, associada à execução de procedimentos desprovidos de significado, contribuiu para os problemas de aprendizagem de muitos alunos nas últimas décadas (Ponte, 2006).

As orientações curriculares para a Matemática têm vindo a reclamar uma abordagem distinta da Álgebra, em particular das funções, em que as diversas representações sejam exploradas de forma integrada e aproveitando as mais-valias de cada uma. O uso das representações verbal, numérica, tabular, gráfica e algébrica, tem o potencial de tornar a aprendizagem da Álgebra significativa e eficaz (Friedlander & Tabach, 2001; Brown e Mehilos, 2010).

O National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2007) refere especificamente, na sua norma para a representação (6.º ao 8.º ano), que os alunos conseguirão ser melhores

[1] Trabalho realizado no âmbito do Projeto *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática,* com apoio da FCT, contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008.

resolvedores de problemas algébricos se conseguirem mover-se com facilidade entre os diversos tipos de representações:

> (...) é comum os alunos começarem a trabalhar com tabelas de dados numéricos para investigarem o padrão associado a uma função linear; porém, também deverão aprender a representar esses dados sob a forma de gráfico, ou equação, quando pretendem determinar a relação linear geral. Os alunos deverão, ainda, adquirir flexibilidade na identificação de formas equivalentes de equações e expressões lineares. Essa flexibilidade poderá surgir à medida que os alunos forem adquirindo prática com as múltiplas formas de representação de um problema de contexto (p.334).

O uso de representações múltiplas de funções no ensino e aprendizagem da Matemática encontra um aliado no computador, cuja utilização didática é atualmente viável na maioria das salas de aula de Matemática (Laborde, 2008; NCTM, 2007). É diverso o *software* que permite aos alunos obterem gráficos ou tabelas com extensas listas de valores preenchidos ou usarem a expressão algébrica de uma função para obterem um determinado ponto (x,y) do seu gráfico (Zbiek, Heid, Blume, & Dick, 2007).

Porém, não é expectável que os alunos adquiram de forma autónoma a competência de lidar com as diversas representações das funções. O professor tem um importante papel a desempenhar para ajudar o aluno a usar de forma fluente e eficaz estas representações, para o que muito contribuem as experiências de aprendizagem que proporciona aos alunos. Estas experiências, embora se substanciem no trabalho realizado na sala de aula, estão diretamente relacionadas com as tarefas matemáticas que o professor adota para trabalhar com os alunos (Ponte, 2005). A seleção de tarefas adequadas é um aspeto decisivo da prática do professor que deve ser balizado pelos seus objetivos e perspetivado em função da existência de *software* potente (Laborde, 2008). O uso deste software no ensino, como os ambientes de geometria dinâmica (AGDs), desafia não só a abordagem matemática aos conhecimentos, mas também a dinâmica com que podem ser abordados, permitindo aos alunos uma grande autonomia na aprendizagem.

Este texto foca-se precisamente na adaptação de tarefas matemáticas a adotar com vista a promover o uso de diversas representações das funções por parte dos alunos. O seu objetivo é discutir de que modo tarefas matemáticas intencionalmente adaptadas com determinadas características promovem o uso flexível e eficaz pelos alunos das representações matemáticas relativas às funções.

Representações múltiplas com tecnologia: A adaptação de tarefas

Uma das mais importantes decisões que o professor realiza regularmente na sua atividade de ensino incide sobre as tarefas que propõe na aula. É em torno das tarefas que as aulas se desenrolam; elas são o ponto de partida para as experiências de aprendizagem dos alunos. A centralidade das tarefas é reconhecida por inúmeros autores e o NCTM dedica-lhe especial atenção, defendendo que devem ser escolhidas em função do conteúdo matemático, dos alunos a quem se dirigem e do potencial de aprendizagem que contêm (NCTM, 1991/1994).

Para muitos professores, a escolha das propostas de trabalho que colocam aos alunos é diretamente influenciada pelos manuais escolares e outros mediadores curriculares acessíveis, em especial na Internet (APM, 1998; Laborde, 2008). No entanto, nem sempre estes recursos se adequam da melhor maneira aos alunos de uma dada turma e ao propósito de ensino dos professores. A seleção, adaptação ou criação de boas tarefas para a sala de aula constitui um desafio para muitos professores (Almiro, 2005).

Na escolha de uma tarefa, é importante que o professor tenha presente diversas dimensões que a definem. Ponte (2005) elege quatro dimensões importantes: o grau de estruturação, o

grau de desafio matemático, a relação com a realidade e a duração da realização. A variação das duas primeiras dimensões dá origem a diferentes tipos de tarefa, entre as quais se evidenciam os problemas, os exercícios, as investigações, e as explorações (Ponte, 2005).

O contexto da tarefa pode ser diversificado e tem como pólos as tarefas enquadradas num contexto da realidade e as tarefas formuladas em termos puramente matemáticos. Quando são propostas tarefas cujo contexto é real, é importante que as situações sejam apresentadas de modo realista e sem artificialidade, e mobilizem o conhecimento prévio dos alunos (NCTM, 2007). No entanto, há que cuidar que o contexto não seja um fator que dificulte a realização da tarefa devido ao desconhecimento deste; nestas situações, o professor deve familiarizar os alunos com esse contexto (Ponte *et al.*, 2007).

Um outro aspeto relevante na caracterização das tarefas tem a ver com a(s) representação(ões) matemáticas a que apelam (Goldin & Shteingold, 2001). Hoje em dia, e assumindo que os alunos têm acesso à tecnologia que facilita e potencia o que conseguem fazer em Matemática, muitas das questões relacionadas com representações normalmente incluídas em exercícios perdem a sua pertinência (Laborde, 2008). Isto é particularmente visível no trabalho com funções. Enquanto que há uns anos a obtenção de um gráfico de uma função constituía um desafio que podia ocupar toda uma aula de 12º ano, hoje em dia o mesmo gráfico é obtido automaticamente em reduzidos segundos.

O tema das funções é especialmente adequado a concretizar as atuais orientações internacionais e nacionais de proporcionar aos alunos o contacto com a diversidade de representações matemáticas. As representações são elementos essenciais na compreensão de conceitos e das relações matemáticas; na comunicação de abordagens, de argumentos e de conhecimentos matemáticos; na explicitação de raciocínios; na identificação de conexões entre conceitos matemáticos inter-relacionados; e na aplicação da Matemática a problemas realistas ou modelação (Goldin & Shteigold, 2001). Há portanto a necessidade de criar oportunidades de os alunos contactarem com diversas formas de representação das ideias matemáticas, de passarem informação de uma forma de representação para outra e estabelecerem relações entre diferentes ideias matemáticas (NCTM, 2007). O professor deve procurar proporcionar aos seus alunos o trabalho com cada uma das representações e a sua análise e comparação, de modo a conhecerem os seus pontos fortes e fracos. Uma estratégia é trabalhar num ambiente que proporcione múltiplas representações, em que as desvantagens de umas possam facilmente ser colmatadas pela combinação com as outras (Kaput, 1992).

Friedland e Tabach (2001) apresentam quatro formas de representação essenciais ao ensino da Matemática, nomeadamente da Álgebra – representação verbal, representação numérica, representação gráfica e representação algébrica. Estes autores identificam as vantagens e desvantagens associadas a cada uma das formas de representação:

a) representação verbal – está normalmente associada à apresentação da situação e à interpretação final dos resultados obtidos, dando ênfase à conexão da Matemática com outras áreas do conhecimento e entre a Matemática e o quotidiano. Esta forma de representação pode tornar-se um obstáculo para a comunicação matemática, uma vez que não é universal e a sua utilização pode ser feita de forma ambígua ou conduzir a associações incorretas.

b) representação numérica – é uma representação natural para os alunos que se encontram a iniciar o estudo da Álgebra e, normalmente, precede qualquer outro tipo de representação. Este tipo de representação é importante na compreensão inicial de um problema e na investigação de casos particulares, no entanto, não é generalizável, sendo por isso uma ferramenta, em alguns casos, limitada.

c) representação gráfica – proporciona uma imagem clara de uma função de variável real. É uma forma de representação intuitiva e apelativa para os alunos que gostam de uma análise visual. No entanto, a representação gráfica é muito influenciada por fatores externos (por

exemplo, escalas) e apresenta frequentemente só uma parte do domínio do problema. A sua utilidade como ferramenta matemática varia de acordo com a tarefa em causa.

d) representação algébrica – esta é concisa, geral e efetiva na apresentação de padrões e modelos matemáticos, e por vezes é a única ferramenta para justificar ou efetuar generalizações. Contudo, esta forma de representação que usa exclusivamente símbolos algébricos, pode ocultar o significado matemático e causar dificuldades de interpretação de resultados.

Brown e Mehilos (2010) fazem referência a uma outra forma de representação das funções, a tabular, concretizada por tabelas de duas colunas, nas quais se relacionam diretamente as variáveis independente x e a dependente y através da concretização numérica de pares x e y. Estas tabelas, quando preenchidas num número significativo de pares, auxiliam os alunos a identificar as relações entre as variáveis, encontrar regularidades e a expressá-las de forma mais abstrata. A tabela atua como uma ponte entre a Aritmética, onde os números são específicos, e a Álgebra, onde as variáveis não são concretizadas e expressam relações gerais.

Ao definir as tarefas para a aula, o professor tem a oportunidade de incentivar a utilização de várias representações. O uso de diferentes representações para apresentar e explorar a "situação-problema" em que se baseia uma tarefa, estimula a flexibilidade na escolha das representações para resolver essa tarefa e proporciona segurança para o seu uso posterior pelos alunos. Para além disso, quando os alunos têm presente as diferentes representações na compreensão da "situação-problema", a transição de uma representação para outra é encarada como uma necessidade natural em vez de uma exigência arbitrária (Friedland & Tabach, 2001).

Numa tarefa em que é apresentada a "situação-problema" seguida de questões que guiam o aluno na sua investigação, há incentivo, segundo Friedland e Tabach (2001), ao uso de múltiplas representações se as questões, sequenciais, tiverem os seguintes propósitos:

1. *Familiarização com a representação inicial*: questão pede aos alunos que analisem a representação inicial, podendo até realizar algumas extrapolações ou aventar estimativas de respostas;
2. *Transição entre representações:* questão pede aos alunos que trabalhem especificamente com representações diferentes da inicial;
3. *Exploração de representações:* questão mais complexa e aberta pede aos alunos que optem pela forma de representação que considerarem mais adequada para a obtenção de uma solução para o problema.

O professor pode e deve recorrer a ambientes tecnologicamente suportados como contexto de exploração das tarefas que exigem ou beneficiam do uso de múltiplas representações. O uso das tecnologias é particularmente importante na resolução de problemas e na exploração de situações, casos em que os cálculos e os procedimentos de rotina não constituem objetivo prioritário de aprendizagem, e a atenção se deve centrar nas condições da situação, nas estratégias de resolução e na interpretação e avaliação dos resultados (Ponte *et al*, 2007).

O recurso a computadores com *software* acessível que permite obter as diversas representações das funções é uma estratégia que o professor deve encarar, pois esta melhora as oportunidades de aprendizagem dos alunos que podem tirar o maior proveito do que a tecnologia permite fazer de forma correta e eficiente, como a construção de gráficos (NCTM, 2007). Os ambientes de geometria dinâmica facilitam a execução de ações relativas à resolução da tarefa, ampliam a sua exploração e análise, abrem novas oportunidades para produzir respostas e, ainda em alguns casos, revelam-se como a única estratégia de obter uma resposta (Laborde, 2008).

Entre estes destaca-se o Geogebra, acessível de forma livre às escolas e aos alunos, com interface em português, e com potencialidades na múltipla representação de funções, incluindo a gráfica (representação gráfica de função em referencial cartesiano), a algébrica (escrita ou visualização da expressão algébrica da função), a tabular (mais ou menos completa e sobre domínio delimitado), e a numérica (coordenadas de pontos ou cálculo através da tabela) (Gafanhoto, 2011).

Metodologia

O estudo relativo a este texto acontece no contexto de uma investigação mais alargada (Gafanhoto, 2011). Nessa investigação foi realizada uma intervenção didática na qual, de forma intencional, se adaptaram/criaram tarefas que foram implementadas na turma de uma professora, com vista a compreender o uso das representações matemáticas por alunos do 9.º ano, com o recurso do Geogebra. Essas tarefas, em número de seis, foram adaptadas segundo critérios discutidos pelas duas autoras deste texto, considerando as indicações da professora titular da turma no que respeita às necessidades dos alunos e à integração coerente na planificação global da turma. A primeira autora deste texto teve ainda um papel determinante na planificação das aulas de implementação das tarefas, feita em parceria com a professora titular. Nestas aulas foi adotado um modelo de breve apresentação da tarefa pela professora titular, seguida de um extenso período de trabalho autónomo dos alunos em pequeno grupo com recurso a um computador por grupo, e finalizado com uma breve discussão coletiva conduzida pela professora titular com a colaboração da investigadora primeira autora. Assim, durante a implementação das tarefas, a investigadora primeira autora assumiu uma postura de observadora participante, quer no apoio aos alunos durante o trabalho de grupo, quer na discussão coletiva das tarefas. A recolha de dados consistiu na observação e análise documental, tendo-se realizado o registo dos acontecimentos da aula e a análise dos documentos produzidos pelos alunos, quer as resoluções escritas das tarefas, quer os ficheiros Geogebra respetivos.

No estudo a que diz respeito este texto, recorremos essencialmente à análise documental. Começámos por realizar uma análise das seis tarefas então adotadas, segundo o contexto em que se inserem e segundo a sua estrutura e propósito das questões. De seguida, recorremos à análise das representações matemáticas produzidas pelos alunos em resposta às tarefas, sintetizada por Gafanhoto e Canavarro (2011). Numa fase seguinte, fizemos, para cada tarefa, uma análise da utilização das representações matemáticas pelos alunos. Concluímos com a análise transversal da utilização das representações matemáticas pelos alunos em resposta às questões das tarefas, com vista a identificar regularidades e aspetos de diferença ou detalhe que nos permitam responder ao objetivo deste texto, ou seja, de que modo tarefas matemáticas intencionalmente adaptadas com determinadas características promovem o uso flexível e eficaz pelos alunos das representações matemáticas relativas às funções.

Análise das tarefas

As tarefas utilizadas foram criteriosamente escolhidas. Considerámos importante escolher tarefas que fossem realizáveis em uma aula, que fossem abertas e permitissem aos alunos a realização de um trabalho significativo (natureza problemática) e que diversificassem o seu contexto. Pareceu importante considerar tarefas com e sem contexto real por se ter a expectativa de que isso poderia influenciar o tipo de uso que os alunos fariam das representações. No quadro 1 apresentam-se as tarefas e sua classificação relativa ao contexto:

Quadro 1 - Tarefas e seu contexto

TAREFA	CONTEXTO		REFERÊNCIA
	MATEMÁTICA	REALIDADE	
1. Qual o tarifário melhor? Eis a questão…		X	Adaptado do Grupo de trabalho T3, 2002
2. As informações dadas por uma função do tipo $y=mx+b$…	X		Adaptado de manuais escolares
3. Matemática por um canudo		X	Adaptado do Grupo de trabalho T3, 2002
4. As folhas de papel que usamos		X	Criado pela primeira investigadora
5. Estudo das funções $y=ax^2$	X		Adaptado de exercícios de manuais
6. O crescimento do meu cabelo é modelado por uma função		X	Adaptado do Grupo de trabalho T3, 2002

As tarefas que se contextualizam na realidade apresentam situações diversificadas: escolha de tarifários de telemóvel; relação entre o comprimento e a largura das folhas de papel A4; análise do crescimento do cabelo; e o espaço visualizado através de canudos de diferentes comprimentos. Nas tarefas de contexto matemático foram estudadas famílias de funções (afim e quadrática).

A adaptação das tarefas para o estudo envolveu a criação de uma estrutura comum e a adoção de questões com vista à utilização e à interação das diferentes representações das funções à exceção da verbal, considerada menos relevante para alunos do 3.º ciclo. Nestas tarefas pode identificar-se uma estruturação em três partes distintas, inspirada em Friedland e Tabach (2001):

1) Familiarização: constituída pelo enunciado escrito (ou ficheiro Geogebra) que apresenta a situação-problema recorrendo a uma dada representação e, eventualmente, alguma questão de interpretação;

2) Transição: constituída por questões que proporcionam a criação de todas representações possíveis. A ordem pela qual são solicitadas as diversas representações varia de modo a que alunos efetuem diferentes transições entre representações;

3) Exploração: constituída por questões mais abertas em que, para responder, os alunos podem optar pelas representações que considerem mais adequadas. Este tipo de questões envolve diferentes pedidos matemáticos, como identificar a imagem dado o objeto, identificar o objeto dada a imagem, estabelecer comparações entre funções ou, ainda, estudar a influência da variação dos parâmetros. Foi também pedido aos alunos que explicitassem as representações usadas para responder a este tipo de questões.

Na adaptação das tarefas foi também tido em conta o facto de se querer utilizar como recurso o Geogebra. Algumas das questões foram formuladas tendo em conta a sua presença, remetendo os alunos para a sua utilização.

Neste texto exemplificamos a análise recorrendo a duas das seis tarefas, "Qual o tarifário melhor? Eis a questão…" (tarefa 1) e "As informações dadas pelas funções do tipo y=mx+b" (tarefa 2), as quais se distinguem no que diz respeito ao contexto.

A tarefa "Qual o tarifário melhor? Eis a questão" teve por base a tarefa "Tou xim?" que consta no livro *Funções no 3.º Ciclo com tecnologia* (Grupo T3, 2002). A tarefa original sofreu adaptações tendo sido alterada a situação-problema com a consideração de três tarifários

reais de telemóvel, de operadoras distintas, com os quais os alunos lidam no seu quotidiano, tendo-se assim procurado criar uma situação mais próxima da realidade, minimizando artificialismos.

A tarefa "As informações dadas pelas funções do tipo y=mx+b" é adaptada de manuais escolares e com ela pretendeu-se que os alunos estudassem as propriedades das funções afim, num contexto puramente matemático, recorrendo à variação dos parâmetros m e b e à observação do efeitos dessa variação para cada um dos parâmetros.

Quanto à estruturação das tarefas, elas organizam-se como se ilustra nos quadros 2 e 3.

Quadro 2- Apresentação e categorização das questões da tarefa

TAREFA 1: Qual o tarifário melhor? ...

Quest. familiarização

O Pedro possui três telemóveis, porque efectua chamadas para todas as redes móveis. Em cada um dos telemóveis tem um tarifário diferente, como apresentado em seguida:

Telemóvel	Operadora	Tarifário	Preço	
1	**Vodafone**	Best Total Base	*Mensalidade*	*Preço/min.*
			15,27 €	0,153
2	**TMN**	+Perto	0,609 cênt /min	
3	**Optimus**	Total	0,00403 €/seg	

1.Cria um ficheiro no *Geogebra* com o nome *Tarefa 1*.

Questões de transição

2. Completa as seguintes tabelas, na folha de cálculo do *Geogebra*:

Tarifário da Vodafone					
Duração total de Chamadas (min.)	1	2	3	4	5
Preço (€)					

Tabela 1

Tarifário da TMN					
Duração total de Chamadas (min.)	1	2	3	4	5
Preço (€)					

Tabela 2

Tarifário da Optimus					
Duração total de Chamadas (min.)	1	2	3	4	5
Preço (€)					

Tabela 3

3. Para cada um dos tarifários escreve uma expressão algébrica que permita determinar o valor a pagar para qualquer duração de chamadas.
4. Num referencial cartesiano, faz um esboço dos gráficos que representam cada um dos tarifários.
5. Representa, na zona gráfica do *Geogebra*, os pontos referentes a cada um dos tarifários.

1-*Selecciona os dados referentes a cada um dos tarifários → 2- Clica com o botão direito do rato → 3- Seleciona a opção "Criar lista de pontos"*

6. Usando o comando *RegressãoLinear traça o* gráfico que representa cada um dos tarifários (Exemplo: RegressãoLinear[lista1]). Compara cada uma das expressões algébricas associadas a cada um dos gráficos com as que tu definiste na pergunta 2.

Quadro 3 - Apresentação e categorização das questões da tarefa 2

TAREFA 2: Uma função do tipo *y=mx+b*…

Quest famil.	1.Abre o ficheiro Parâmetros funções.ggb. (e movimenta os seletores de modo a observar a representação gráfica)
Questões de transição	2. Considera a função que tem como expressão algébrica: $y=3x+2$ a) Representa-a graficamente, através da manipulação dos seletores m e b b) O seletor "AbcissaA" permite fazer o registo na folha de cálculo de vários pontos pertencentes à função, activando a opção "enviar traço para a folha de cálculo". c) Completa a seguinte tabela: x | | $-\frac{2}{3}$ | | 1 | 2 y | -4 | | 2 | |
Questões de exploração	3. Para cada uma das seguintes questões apresenta a resposta e a indicação de qual foi a(s) representação a que recorreste para dar a resposta. a) Qual é a imagem do objeto 10? E de -6? b) Qual é o objeto que tem com imagem -10? E 17? c)Existe mais do que um objeto com a mesma imagem? d)Em que valores é que a função intersecta o eixo das abcissas e o das ordenadas? e)A função é crescente ou decrescente? Justifica a resposta. f)Recorrendo ao seletor m, indica para que valores de m é que a função é crescente, decrescente e constante? g)Qual a influência do parâmetro b numa função do tipo *y=mx+b*.
Questões de exploração	7. Analisa cada um dos tarifários, apresentando sempre uma justificação para as tuas respostas e indicando também a qual ou a quais das representações (tabela, expressão algébrica ou gráfico) recorreste para dar resposta: a) Tendo em conta que o Pedro, mensalmente, fala cerca de 120 minutos, qual dos tarifários é que o Pedro deverá escolher de forma a pagar menos? b) Se o Pedro só quiser gastar 25 euros, mensalmente, de entre os tarifários da Vodafone e da TMN, qual deverá escolher? c) Se o Pedro pagasse mensalmente a mais vantajosa? d) Se o Pedro pagasse mensalmente a representação gráfica chamada, qual dos tarifários seria o mais vantajoso? e) Se o Pedro quisesse ficar só com um telemóvel com qual dos telemóveis deveria ficar, na tua opinião?

Análise das respostas dos grupos às tarefas

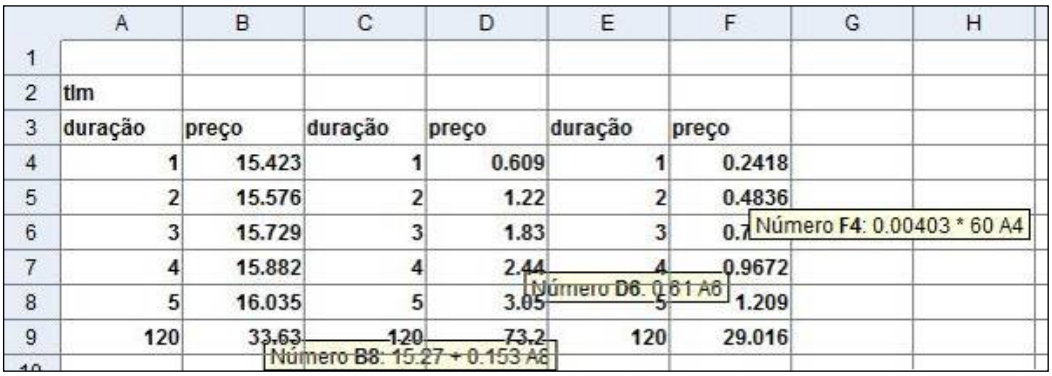
Apresentamos uma análise das resoluções das duas tarefas selecionadas que revela como os grupos de alunos usaram as representações das funções na resposta quer às questões de transição, quer às questões de exploração.

Tarefa 1: **Qual o tarifário melhor? ...**

Esta tarefa requereu dos alunos bastante interpretação do enunciado, sendo a familiarização com a situação-problema resultado da discussão na turma entre os alunos e a professora. Não foi nesta fase utilizada nenhuma representação específica das funções, a não ser a representação verbal, de forma implícita, na exemplificação de como funcionava cada um dos tarifários.

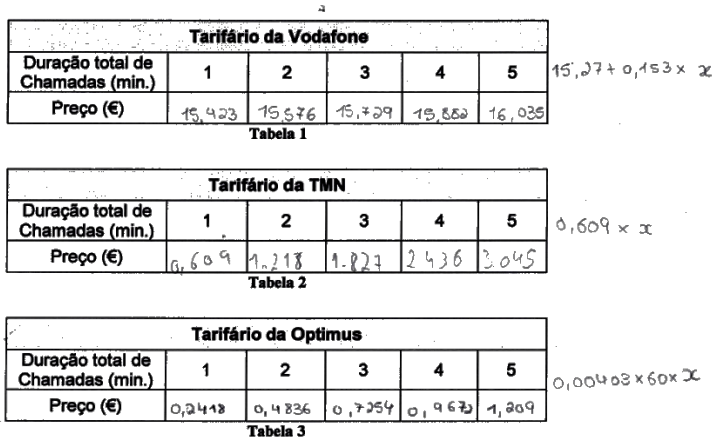
Nas questões de transição, todos os grupos efetuaram a sua representação na forma de tabela e, posteriormente, efetuaram a transição entre a representação tabular e a algébrica e a tabular e a gráfica, como solicitado. Destaca-se aqui a transição entre a representação tabular e a algébrica, enfatizando a importância do uso do Geogebra. Para criarem a representação tabular, os alunos recorreram à folha de cálculo do Geogebra, usando as referências das células como se ilustra na figura 1. Este processo mostrou ser uma mais-valia para a posterior obtenção da expressão algébrica, pois quando comparadas as expressões que os alunos

utilizaram para a obtenção da representação tabular e as expressões algébricas, verifica-se semelhanças entre elas, tendo os alunos procedido unicamente à substituição das referências das células pela variável *x* (fig. 2).



	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	tlm							
3	duração	preço	duração	preço	duração	preço		
4	1	15.423	1	0.609	1	0.2418		
5	2	15.576	2	1.22	2	0.4836		
6	3	15.729	3	1.83	3	0.7		
7	4	15.882	4	2.44	4	0.9672		
8	5	16.035	5	3.05	5	1.209		
9	120	33.63	120	73.2	120	29.016		

Figura 3- Processo utilizado pelo grupo 2 para preenchimento das tabelas



Tarifário da Vodafone

Duração total de Chamadas (min.)	1	2	3	4	5
Preço (€)	15,423	15,576	15,729	15,882	16,035

Tabela 1

15,27 + 0,153 × x

Tarifário da TMN

Duração total de Chamadas (min.)	1	2	3	4	5
Preço (€)	0,609	1,218	1,827	2,436	3,045

Tabela 2

0,609 × x

Tarifário da Optimus

Duração total de Chamadas (min.)	1	2	3	4	5
Preço (€)	0,2418	0,4836	0,7254	0,9672	1,209

Tabela 3

0,00403 × 60 × x

Figura 4 - Tabelas e expressões algébricas apresentadas pelo grupo 2

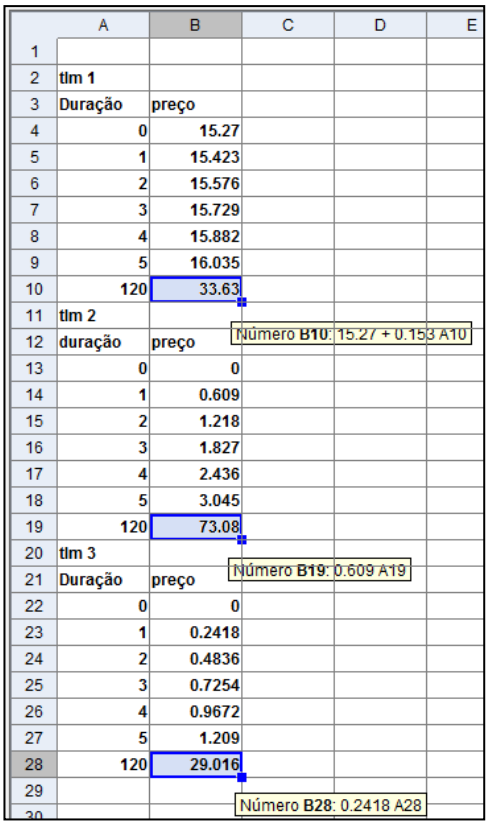
No que diz respeito às questões de exploração, o quadro 4 resume as representações utilizadas pelos grupos:

Quadro 4 - Representações usadas na resolução das questões de exploração da tarefa 1

	Questões de exploração		Grupos					Repres. Predominante
			1	2	3	4	5	
Tarefa 1	7	a)	Algébrica	Algébrica	Algébrica	Algébrica	Algébrica	Algébrica
		b)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Tabular	Gráfica
		c)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
		d)	Tabular	Tabular	Algébrica	Tabular	Tabular	Tabular
		e)	Gráfica	Gráfica	Gráfica/ Tabular	Gráfica	Gráfica	Gráfica

Verifica-se que os grupos recorreram a múltiplas representações para a obtenção das suas respostas.

As resoluções apresentadas à pergunta 7 a) são exemplo da forma como os alunos responderam quando se pretendia que determinassem a imagem dado o objeto. Nesta situação, os grupos recorreram maioritariamente à representação algébrica (fig. 3) principalmente quando eram solicitadas as imagens de objetos fora da janela representada:



	A	B	C	D	E
1					
2	tlm 1				
3	Duração	preço			
4	0	15.27			
5	1	15.423			
6	2	15.576			
7	3	15.729			
8	4	15.882			
9	5	16.035			
10	120	33.63			
11	tlm 2				
12	duração	preço			
13	0	0			
14	1	0.609			
15	2	1.218			
16	3	1.827			
17	4	2.436			
18	5	3.045			
19	120	73.08			
20	tlm 3				
21	Duração	preço			
22	0	0			
23	1	0.2418			
24	2	0.4836			
25	3	0.7254			
26	4	0.9672			
27	5	1.209			
28	120	29.016			
29					

Figura 5 - Processo usado pelos grupos para determinar o custo de 120 minutos em chamadas

As resoluções apresentadas para a questão 7 b) são também ilustrativas da forma geral como os alunos resolveram as questões em que se pretendia determinar o objeto dada a imagem. Nesta situação, os grupos recorreram maioritariamente à representação gráfica. Esta opção pode ser justificada por ser a forma mais imediata e fácil, evitando assim cálculos e procedimentos de manipulação e substituição de variáveis em que os alunos, por norma, manifestam pouco à-vontade. Na discussão coletiva, os alunos referiram estratégias usadas (fig. 4):

Jorge (grupo 2): Procurámos os 25 euros no eixo dos yy.

Marta (grupo 5): Traçava uma reta horizontal.

Mafalda (grupo 3): Nós mexemos a zona gráfica até encontrarmos os 25 euros e depois a reta que ficava mais abaixo era o melhor tarifário, que neste caso era o da Optimus.

Figura 4 - Resposta apresentada por diferentes grupos

Nesta tarefa foi também colocada uma questão em que se solicitava a comparação de funções, 7c), tendo os grupos respondido, preferencialmente, com recurso à representação gráfica. Esta opção pode ser justificada por esta forma de representação dar uma imagem geral e imediata das funções em estudo, como se pode ver no seguinte exemplo (fig. 5):

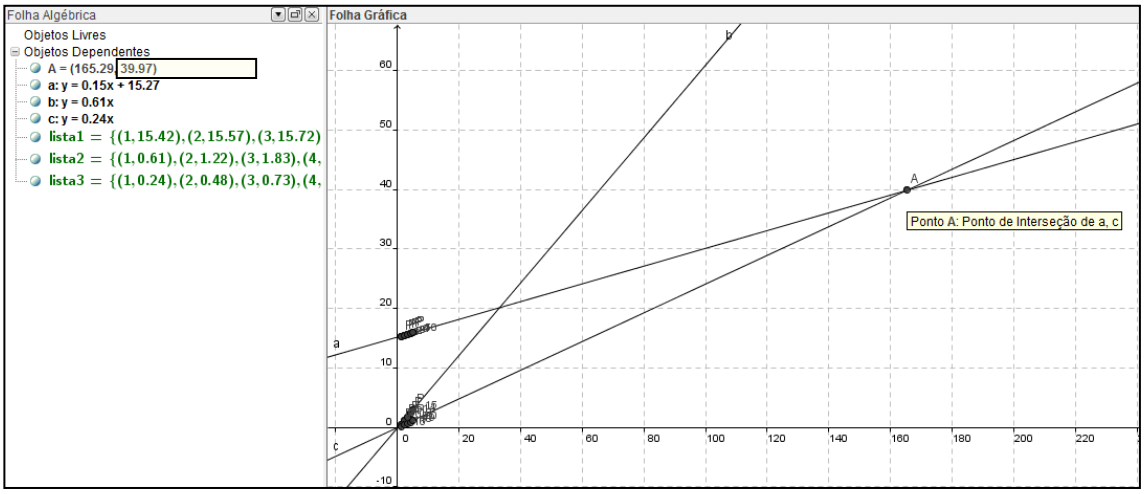


Figura 6 - Processo usado pelo grupo 3

Os alunos procederam à análise da representação gráfica, tendo incluído ainda o ponto de interseção para determinarem os valores para as variáveis em estudo, conseguindo desta forma obter uma resposta no contexto do problema (fig. 6):

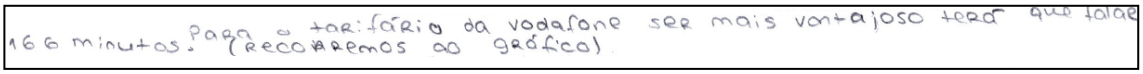


Figura 7 - Resposta apresentada pelo grupo 3

Tarefa 2: **Uma função do tipo *y=mx+b*…**

Nesta tarefa é dada a expressão algébrica de uma função afim. A familiarização com esta representação faz-se pela identificação pelos alunos dos parâmetros m e b da função para que, com recurso a seletores relativos a esses parâmetros criados no Geogebra, os alunos construam a representação gráfica da função em estudo. Assim, os grupos efetuaram a transição entre a representação algébrica e a gráfica. Posteriormente, solicitou-se a representação tabular, tendo os alunos conciliado as duas formas de representação que já possuíam (fig. 7):

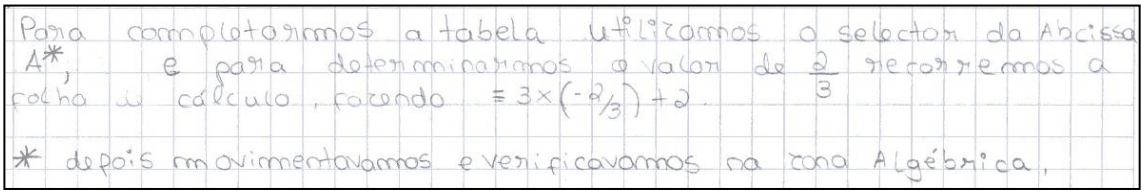


Figura 8 - Resposta do grupo 1

Esta estratégia permitiu-lhes então o preenchimento da seguinte tabela (fig. 8):

x	-2	$-\frac{2}{3}$	0	1	2
y	-4	0	2	5	8

Figura 9 - Tabela preenchida pelo grupo 1

Para determinar a imagem, os grupos sentiram a necessidade de conciliar a representação gráfica com a algébrica de forma a ultrapassar a limitação apresentada pela representação gráfica no que diz respeito ao rigor e exatidão.

Nas resoluções das questões de exploração, os alunos usaram múltiplas representações (quadro 5):

Quadro 5 - Representações usadas pelos grupos na resolução das questões de exploração da tarefa 2

	QUESTÕES DE EXPLORAÇÃO		GRUPOS					Repres. Predominante
			1	2	3	4	5	
TAREFA 2	3	a)	Algébrica/ Gráfica	Algébrica/ Gráfica	Gráfica	Algébrica/ Gráfica	Gráfica/ Tabular	Algébrica/ Gráfica
		b)	Algébrica/ Gráfica	Gráfica/ Tabular	Gráfica/ Tabular	Algébrica/ Gráfica	Gráfica/ Tabular	Gráfica/ Tabular
		c)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
		d)	Algébrica/ Gráfica	Gráfica/ Tabular	Gráfica	Algébrica/ Gráfica	Gráfica/ Tabular	Gráfica
		e)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
		f)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica
		g)	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica	Gráfica

O estudo da influência da variação dos parâmetros assumiu grande relevo. Na resolução das questões os alunos recorreram preferencialmente à representação gráfica, fazendo uso dos seletores definidos, como se pode confirmar nas respostas dos grupos (fig. 9 e fig. 10):

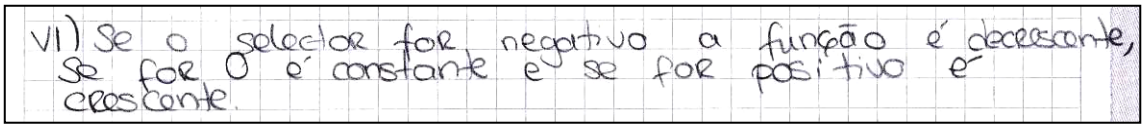


Figura 9 – Resposta apresentada pelo grupo 4 no estudo da influência do parâmetro m

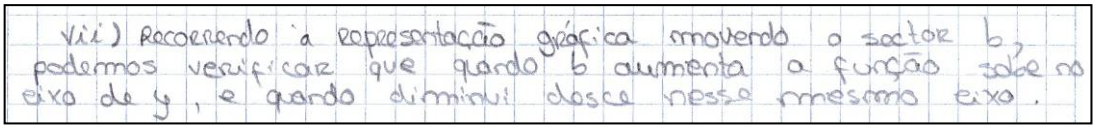


Figura 10 - Resposta apresentada pelo grupo 5 no estudo da influência do parâmetro b

No que diz respeito ao uso do Geogebra, os alunos assumem que o seu uso foi uma mais-valia, destacando a facilidade, rapidez e rigor que permite nas representações (fig. 11):

Rui (grupo 4): (…) porque é mais fácil e rápido do que se tivéssemos que fazer à mão.

Bárbara (grupo 3): É mais rápido porque não temos que estar a representar um a um e é mais rigoroso.

Figura 11 - Resposta apresentada por diversos grupos

Conclusão

As tarefas apresentadas neste texto foram adaptadas na expectativa de promoverem o uso flexível e eficaz de representações por parte dos alunos, tendo sido especialmente pensada a sua estrutura e os tipos de questões propostas aos alunos, bem como diversificado o seu contexto.

Nas questões de transição, os alunos efetuaram a transição entre quaisquer representações recorrendo às que já tinham construído antes. As transições mais frequentes foram entre a representação tabular e a algébrica e entre a gráfica e a tabular. Nesta última, os alunos tiraram partido duma funcionalidade do Geogebra que consiste na definição de um ponto sobre o gráfico da função e a deslocação do mesmo para a construção automática da tabela.

Nas questões de exploração, os alunos fizeram uso maioritário da representação gráfica, mas todas as outras representações foram usadas em algumas situações. A representação tabular foi essencialmente usada na análise da relação entre as variáveis e no estudo das funções em determinados valores do seu domínio, estando estes representados nas tabelas. A representação gráfica foi usada para responder às questões em que era solicitado o estudo comparativo de funções ou no estudo da influência da variação dos parâmetros, uma vez que esta forma de representação dá uma imagem clara e global das funções, mas não pormenorizada. A representação algébrica foi usada quando era solicitada a determinação da imagem dado o objeto, dispondo já da expressão algébrica, criada pelos próprios alunos ou não. Os grupos conseguiram sempre apontar qual ou quais as representações que usaram e isso poderá ter contribuído para tomarem consciência das potencialidades de cada uma.

Assim, podemos afirmar que a estrutura adotada para estas tarefas foi bem sucedida na promoção da utilização flexível e eficaz de representações múltiplas de funções por parte dos alunos, que revelaram capacidade de adotar representações adequadas e de conciliá-las de forma pertinente, tirando partido das vantagens de umas para suprir desvantagens de outras (Friedland & Tabach, 2001). Esta constatação é comum a todas as tarefas analisadas, quer com contexto de realidade ou puramente matemático.

Por fim importa sublinhar a importância do recurso ao Geogebra que foi decisivo no trabalho autónomo dos grupos. Este foi considerado pelos alunos como uma mais-valia na obtenção das diferentes representações, que lhe reconheceram facilidade, rapidez e rigor. Além disso, o Geogebra permitiu-lhes a simultaneidade de visualização no mesmo ecrã das diferentes representações, tornando mais direto o estabelecimento de conexões entre estas. Possibilitou ainda aos alunos formas criativas de lidar com as representações, com a transição entre elas e com a sua conciliação. Isto revela o desafio do *software* para lidar de novas formas com os conceitos e procedimentos matemáticos (Laborde, 2008).

Assim, este estudo vem reforçar a importância do papel do professor na adoção de tarefas criteriosamente pensadas para o ensino da Matemática, apoiadas por recursos que potenciem o seu desenvolvimento pelos alunos. A escolha de uma tarefa para a sala de aula é um aspeto decisivo da prática do professor e deve merecer por parte deste uma grande atenção. A identificação de tarefas que parecem interessante é um passo importante, mas é necessário perspetivar a sua utilização com os alunos em função dos propósitos matemáticos do ensino. Este estudo mostra como determinadas tarefas podem servir de inspiração ao professor, nomeadamente no que diz respeito à consideração do contexto e da situação-problema, mas beneficiam de um trabalho cuidadoso de adaptação das questões originais, na sua sequência e conteúdo.

Referências bibliográficas

Almiro, J. (2005). Materiais manipuláveis e tecnologia na aula de Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o Desenvolvimento Curricular*(pp. 275-316). Lisboa: APM.

APM (1998). Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática. Lisboa: APM.

Brown, S. A., & Mehilos, M. (2010). Using tables to bridge arithmetic and algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15(*9*), 532-538.

Friendland, A., & Tabach, M. (2001). Promothing multiple representation in algebra. In Cuoco (Ed), *The roles of representation in school mathematics*(pp. 173-185). Reston, VA: NCTM.

Gafanhoto, A. (2011). *Integração das diferentes representações das funções no contexto de utilização de um ambiente de geometria dinâmica* (*Geogebra*). Lisboa: APM.

Gafanhoto, A., & Canavarro, A. P. (2011). Utilização e conciliação de diversas representações das funções em sala de aula. In Nunes, C., Henriques, A. C., Caseiro, A., Silvestre, A. I., Pinto, H., Jacinto, H. , Ponte, J. P. (Orgs.), *Atas do Seminário de Investigação em Educação Matemática.* Lisboa: APM (Edição digital)

Goldin, G. A., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and development of mathematical concepts. In J. Cuoco (Ed.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1-22). Reston, VA: NCTM.

Kaput, J. (1992). Techonology and Mathematics Education. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 515-556). New York: Macmillan.

Laborde, C. (2008). Multiple dimensions involved in de design of tasks full advantage of dynamic interactive geometry. In A. P. Canavarro, D. Moreira & M. I. Rocha (Orgs), *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 36-50). Lisboa: SEM-SPCE.

ME/DEB (2001). *Currículo nacional do ensino básico: competências essenciais*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

NCTM (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em Matemática escolar*. Lisboa: APM e IIE.

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: APM e IIE.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão Curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o Desenvolvimento Curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Números e Álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & A. P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na Aprendizagem da Matemática e na Formação de Professores* (pp. 5-27). Porto: SEM/SPCE.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E., & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC.

Zbiek, R. M., Heid, M. K., Blume, G. W., & Dick, T. P. (2007). Research on technology in mathematics education: A perspective of constructs. In Frank K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A project of the NCTM* (Vol. II, pp. 1169-1207). Charlotte: Information Age Publishing.

TAREFAS EM CONTEXTOS SIGNIFICATIVOS NO DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO MULTIPLICATIVO

Hélia Pinto
Escola Superior de Educação e Ciências Sociais, Instituto Politécnico de Leiria
helia.pinto@ipleiria.pt

Resumo: Este artigo emana de um estudo que teve como objetivo perceber o desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais não negativos[1]. O estudo tem por base uma unidade de ensino realizada numa turma do 6.º ano de escolaridade, que contempla a exploração de tarefas, essencialmente compostas por problemas, em contextos significativos para os alunos. A metodologia adotada seguiu o paradigma interpretativo com *design* de estudo de caso múltiplo. Para a recolha de dados recorreu-se a técnicas como a observação participante com registos vídeo e áudio, análise documental e entrevistas em profundidade com registos áudio e documental. Os resultados sugerem que a exploração das referidas tarefas ajuda os alunos a progredirem na compreensão e formalização dos conceitos matemáticos. Neste artigo o foco recai sobre o ensino-aprendizagem da divisão como isomorfismo de medidas – medida, pelo que se apresenta a fundamentação teórica, a metodologia do estudo e alguns resultados ilustrativos da importância da exploração de tarefas em contextos reconhecíveis para os alunos, no desenvolvimento do seu raciocínio multiplicativo. Assim, tendo por base o trabalho realizado na unidade de ensino, são dados exemplos de produções dos alunos que evidenciam a importância da exploração daquelas tarefas no ensino-aprendizagem do referido significado da divisão. Por último, surgem algumas considerações finais.

Palavras-chave: tarefas, contextos significativos, matematizaçao, divisão como medida-medida, números racionais

Introdução

Na Educação Matemática Realista o processo de matematização é visto como progressivo, levando o conhecimento a tornar-se cada vez mais formal e abstrato. Para que os alunos possam progredir, do conhecimento informal[2] para o formal, devem ser explorados problemas em contextos reconhecíveis, que os estimulem à atividade de modelação recorrendo a desenhos, diagramas ou tabelas (Gravemeijer, 1994). Assim, e com o propósito de perceber como se desenvolve o sentido da multiplicação e da divisão de números racionais em alunos do 6.º ano de escolaridade, este estudo teve por base a realização de uma unidade de ensino que contemplou a exploração de tarefas envolvendo aqueles conceitos em contextos significativos.

Deste modo, considerou-se pertinente fundamentar a referida unidade nos princípios básicos da Educação Matemática Realista (Freudenthal, 1973, 1991; Gravemeijer, 1994, 1999; Streefland, 1986, 1991; Treffers, 1987, 1991; van den Heuvel-Panhuizen e Wijers, 2005) e na Teoria dos Campos Conceptuais (Vergnaud, 1983, 1988), principalmente no que respeita ao

[1] Ao longo deste artigo a referência aos números racionais restringe-se aos não negativos.

[2] Conhecimentos que os alunos possuem de determinado tópico antes do seu ensino-aprendizagem em sala de aula.

desenvolvimento das estruturas multiplicativas. Foram ainda tidas em conta, componentes consideradas essenciais no desenvolvimento do sentido das referidas operações (Huinker, 2002; McIntosh, Reys & Reys, 1992; Slavit, 1999), nomeadamente, familiaridade com diferentes significados e contextos das operações, flexibilidade no uso das propriedades das operações, razoabilidade na análise de processos e resultados e o recurso a símbolos e matemática formal de forma significativa.

Neste contexto, estudaram-se as trajetórias de aprendizagem de três alunos, com o objectivo de identificar e analisar o processo de desenvolvimento e uso significativo dos conceitos de multiplicação e divisão de números racionais de cada um deles. Concretamente, procurou identificar-se e analisar-se as estratégias adotadas pelos alunos e as dificuldades sentidas na resolução de tarefas de multiplicação e divisão de números racionais em contextos significativos, durante, no fim e seis meses depois da realização de uma unidade de ensino envolvendo estes conceitos. Naturalmente identificaram-se potencialidades e limitações da referida unidade de ensino ao longo da sua realização.

Neste artigo, depois do enquadramento teórico e referência às principais opções metodológicas do estudo, surgem exemplos de produções dos alunos que evidenciam a importância da exploração de tarefas em contextos significativos na progressão do seu conhecimento informal para um conhecimento formal, ou seja, no seu processo de matematização da divisão como isomorfismo de medidas - medida. Estes resultados têm por base o trabalho feito durante a realização da unidade de ensino que suporta o estudo.

Matematização

Segundo Gravemeijer (1994, 1999), van den Heuvel-Panhuizen e Wijers (2005), Strefland (1986, 1991) e Treffers (1987, 1991), a filosofia da Educação Matemática Realista (EMR) fundamenta-se em grande parte na conceção de Freudenthal (1973, 1991) da matemática como uma atividade humana. Nesta perspetiva a Matemática não é vista como um corpo de conhecimentos, mas como uma atividade de resolução de problemas quer em contextos quotidianos, quer em contextos matemáticos – atividade a que Freudenthal (1973, 1991) chama de "matematização", salientando que sem esta não existe Matemática. Segundo o autor, as estruturas matemáticas não são uma referência fixa, mas emergem da realidade e expandem-se continuamente em processos de aprendizagem individuais e coletivos. Por conseguinte, na EMR os alunos são participantes ativos no processo de aprendizagem que ocorre dentro do contexto social da sala de aula, dado que a Matemática aprende-se, fazendo. Por conseguinte, na perspetiva de Freudenthal (1973, 1991), a Matemática deve ser "reinventada" pelos alunos num processo de "matematização".

Treffers (1987, 1991) enuncia de forma precisa duas componentes intimamente relacionadas neste processo de matematização num contexto educacional – matematização "horizontal" e matematização "vertical", que Freudenthal (1991) adota interpretando matematização horizontal como o estabelecimento de ligações entre o mundo percecionado e o mundo dos símbolos e matematização vertical como o processo de reorganização dentro do mundo dos símbolos. Salienta que embora esta distinção pareça estar livre de ambiguidade, não significa que a diferença entre estes dois mundos seja bem definida. Refere ainda, que as fronteiras entre o que é matematização vertical e o que é matematização horizontal têm a ver com o que cada um de nós entende por realidade. O autor clarifica: "Prefiro aplicar o termo realidade àquilo que, a um certo nível, o senso comum sente como real" (p. 17). Enfatiza ainda que estas duas formas de matematização são de igual valor e que ambas ocorrem em diferentes níveis da compreensão. Assim, o processo de matematização é um processo progressivo onde o conhecimento se vai tornando cada vez mais formal e abstrato.

Freudenthal (1973, 1991), Gravemeijer (1994, 1999), Streefland (1986, 1991), Treffers (1987, 1991), van den Heuvel-Panhuizen e Wijers (2005) salientam que, na EMR, as estratégias informais usadas pelos alunos na resolução de problemas em contextos que reconhecem, são a base para o seu processo de desenvolvimento de conceitos e conexões entre conceitos, bem como para chegar a procedimentos formais por um processo gradual de esquematização, abreviação e generalização. Por conseguinte, enfatizam a necessidade de se proporcionarem situações de ensino-aprendizagem que estimulem os alunos à atividade de modelação, recorrendo a desenhos, diagramas, ou tabelas, já que é através dos modelos que eles progridem do conhecimento informal para o formal.

Estruturas multiplicativas

O campo conceptual das estruturas multiplicativas é, segundo Vergnaud (1983, 1988), o conjunto de situações que envolvem uma multiplicação, uma divisão, ou a combinação destas operações, sendo gerado por diferentes casos de proporção simples e de proporção múltipla que podem ser combinados de diferentes formas. Para o autor, a relação de multiplicação não constitui uma relação binária, mas quaternária que conduz a três classes de estruturas diferentes, no conjunto de situações das estruturas multiplicativas: (i) isomorfismo de medidas; (ii) produto de medidas; e (iii) proporção múltipla. Este estudo contemplou as estruturas multiplicativas: isomorfismo de medidas e produto de medidas. Dado o foco deste artigo segue-se uma breve explanação sobre a estrutura isomorfismo de medidas - divisão como medida.

Vergnaud (1983, 1988) refere o *isomorfismo de medidas* como uma estrutura que consiste numa proporção direta simples entre duas grandezas M_1 e M_2, por exemplo: pessoas e objetos, bens e custos, tempo e distância. Dentro desta estrutura distingue situações de multiplicação, divisão como partilha equitativa, divisão como medida e a regra de três, não considerada neste estudo.

O autor considera dois significados para a divisão no contexto de isomorfismo de medidas, a divisão como partilha equitativa e a divisão como medida. Na *divisão como medida*, o dividendo e o divisor são da mesma natureza. Pretende-se determinar o número de grupos, sabendo a dimensão de cada grupo. Por exemplo, "O Paulo tem 15 € para gastar na compra de carros miniaturas para a sua colecção. Cada carro custa 3 €, quantos carros pode comprar?", onde M_1 = número de carros e M_2 = euros pode ser representada por um esquema que Vergnaud (1983) considera representativo da referida operação (Figura 1).

M_1	M_2
1	$3 = f(1)$

Figura 1: Divisão como medida (Vergnaud, 1983)

Quanto aos procedimentos de resolução de situações com este significado da divisão, o autor considera que envolvem raciocínio multiplicativo: (i) a inversão do operador funcional, quando os alunos dividem os 15 € por grupos de 3 €; e (ii) a aplicação do operador escalar, quando os alunos procuram o número de vezes que o 3 cabe no 15, que evita raciocinar em termos de quocientes inversos das grandezas. Os procedimentos de adição ou subtração sucessivas são

considerados por Vergnaud (1983) sem caráter multiplicativo, dado que envolvem raciocínio aditivo e não multiplicativo.

Unidade de ensino

A unidade de ensino que serviu de base a este estudo teve como objetivo promover o desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais a alunos do 6.º ano do ensino básico. Para tal, na convicção de que isso potenciaria um ensino-aprendizagem significativo das operações a estudar, considerou-se pertinente fundamentar a referida unidade (i) nos princípios básicos da Educação Matemática Realista (Freudenthal, 1973, 1991; Gravemeijer, 1994, 1999; Streefland, 1986, 1991; Treffers, 1987, 1991; van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005); (ii) na Teoria dos Campos Conceptuais, principalmente no que concerne ao desenvolvimento das estruturas multiplicativas (Vergnaud, 1983, 1988); e (iii) nas componentes consideradas essenciais para o desenvolvimento do sentido da multiplicação e da divisão de números racionais (Huinker, 2002; McIntosh, Reys & Reys, 1992; Slavit, 1999). (Huinker, 2002; McIntosh, Reys & Reys, 1992; Slavit, 1999), nomeadamente familiaridade com diferentes significados e contextos das operações, flexibilidade no uso das propriedades das operações, razoabilidade na análise de processos e resultados e o recurso a símbolos e matemática formal de forma significativa.

Na perspetiva de Simon (1995), uma visão construtivista da aprendizagem requer que o ensino tenha em conta e se adapte às atuações dos alunos, pelo que não se pode limitar a planificação desse ensino, a uma ideia tradicional, que se baseia na procura de uns objetivos predeterminados e no desenho de umas tarefas para os alcançar. Assim, introduz a noção de trajetória hipotética[3] de aprendizagem que deve ser composta pelos objetivos para a aprendizagem dos alunos, as tarefas matemáticas que se usarão para promover a referida aprendizagem e as hipóteses acerca do processo de aprendizagem dos alunos. Deste modo, e visando o objetivo da unidade de ensino, foi concebida uma trajetória hipotética de aprendizagem da qual fazem parte:

(1) Os objetivos específicos de aprendizagem dos tópicos relativos à multiplicação e divisão de números racionais, constantes no Programa de Matemática do Ensino Básico (DGIDC, 2007), enfatizando-se ainda, o estudo das estruturas multiplicativas (Vergnaud, 1983, 1988), nomeadamente isomorfismo de medidas e produto de medidas;

(2) Um conjunto de tarefas consideradas pertinentes, essencialmente compostas por problemas de contexto (Freudenthal, 1973, 1991; Gravemeijer, 1994, 1999; Streefland, 1986, 1991; Treffers, 1987, 1991; van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005), que permitem uma grande diversidade de estratégias e procedimentos. Os problemas de contexto envolvem quer contextos do dia a dia, quer contextos matemáticos, o importante é que sejam significativos para os alunos, permitindo-lhes gerar e explorar ideias matemáticas que podem ser analisadas em diferentes níveis de aprendizagem, suportando o processo de ensino-aprendizagem. Assim, favorecem: (i) a formação de conceitos; (ii) a ligação, numa primeira fase, à matemática de modelos de forma intuitiva e motivadora; (iii) a aprendizagem das operações formais, dos procedimentos, das notações, das regras, fazendo-o em conjunto com outros modelos visuais, que desempenham funções importantes de apoio ao raciocínio; (iv) a aplicabilidade; e (v) a apresentação da realidade como fonte e domínio de aplicação, permitindo praticar capacidades aritméticas básicas em situações aplicadas. Estes problemas tornam o

[3] Denomina-se de hipotética, enquanto se carateriza por uma tendência prevista, dado que até ao momento em que os alunos começam a trabalhar não se sabe ao certo como irão construir novas interpretações, ideias e estratégias atendendo ao caminho a percorrer e ao resultado pretendido (Simon, 1995; Simon & Tzur, 2004).

conhecimento e as capacidades matemáticas aplicáveis e atribuem significado às operações formais, convertendo-se nos responsáveis pela possível criação de um sistema formal cheio de significado;

(3) Um processo hipotético de aprendizagem, ou seja, uma previsão do desenvolvimento das aprendizagens dos alunos no contexto da realização e exploração das tarefas planeadas. Para tal, houve necessidade de se optar por uma sequência de tarefas que ancorasse nos conhecimentos informais dos alunos e os transportasse para conhecimentos formais, permitindo a exploração dos conceitos mais simples para os mais complexos, e consequente desenvolvimento do raciocínio multiplicativo. A fim de contemplar o requisito relativo aos conceitos, optou-se pela sequência proposta por Vergnaud (1983, 1988) para o estudo das estruturas multiplicativas. Assim, começou-se por explorar tarefas onde a multiplicação surge como isomorfismo de medidas, seguindo-se as relativas à divisão nesta mesma estrutura. Posteriormente exploraram-se tarefas onde surge a multiplicação como produto de medidas, seguindo-se a divisão na referida estrutura.

Para a concretização da trajetória hipotética de aprendizagem, em sala de aula, optou-se por uma abordagem de ensino-aprendizagem fundamentada nos princípios da EMR, nomeadamente (i) valorização das construções e produções próprias dos alunos, que os conduzem dos métodos informais para os formais; (ii) oportunidade dada aos alunos de desenvolverem modelos de situação, esquemas e símbolos, com a exploração de problemas de contexto; (iii) caráter interativo do processo de ensino e aprendizagem; e (iv) interligação entre os diferentes tópicos matemáticos. Ao nível do processo de avaliação dos alunos, optou-se por uma avaliação essencialmente formativa (Santos, 2002).

Por conseguinte, a concretização da trajetória hipotética de aprendizagem (na turma onde estavam inseridos os alunos-caso deste estudo) e consequente reformulação, deu origem a uma trajetória de aprendizagem. Esta decorreu em 10 aulas de 90 minutos e 6 de 45 minutos, num período de cinco semanas (Tabela 1), já que a turma tinha semanalmente dois blocos de 90 minutos e um de 45 minutos de Matemática.

Tabela 1: Calendarização da trajetória de aprendizagem realizada pela turma

Trajetória de aprendizagem realizada pela turma

Tópicos	Tarefas	Metodologia	Tempo	Data	Avaliação
Multiplicação como isomorfismo de medidas/Propriedades/Reta numérica	Tarefa 1, THA[4]	Grupo	45' (1.ª)	02/04/08	Formativa coavaliação e autoavaliação
	Tarefas 2 e 3, THA	Grupo	90' (2.ª)	03/04/08	
	Tarefa 4 e 5, THA	Grupo	90' (3.ª)	04/04/08	
	Tarefa 6, THA	Grupo	45' (4.ª)	09/04/08	
Multiplicação como isomorfismo de medidas/Reta numérica/Elaborar enunciados/Potências de expoente natural	Tarefas 7 e 8, THA	Grupo Individual	90' (5.ª)	10/04/08	
Multiplicação como isomorfismo de medidas/Expressões numéricas/Inverso de um número/Propriedades	Tarefas 9 e 10, THA	Grupo Individual	90' (6.ª)	11/04/08	
Divisão como isomorfismo de medidas/Medida	Tarefa 11, THA	Grupo	45' (8.ª)	16/04/08	
	Tarefas 12 e 13, THA	Grupo	90' (9.ª)	17/04/08	
	Tarefas 14, 15 e 16, THA	Grupo	90'(10.ª)	18/04/08	
Divisão como isomorfismo de medidas/Partilha	Tarefas 17 e 18, THA	Grupo	90'(11.ª)	21/04/08	
	Tarefa 19, THA	Grupo	45'(12.ª)	23/04/08	
	Tarefas 20, 21 e 22, THA	Grupo Individual	90'(13.ª)	24/04/08	
Multiplicação como produto de medidas	Tarefas 23 e 24, THA	Grupo	90'(14.ª)	28/04/08	
Divisão como produto de medidas	Tarefa 25, THA	Grupo	45'(15.ª)	30/04/08	
	Tarefas 26 e 27, THA	Individual Grupo	90'(16.ª)	02/05/08	
Esclarecimento de dúvidas	Tarefas da THA e relatos escritos	Grupo	45'(17.ª)	07/05/08	

Assim, fazem parte da trajetória de aprendizagem 27 tarefas realizadas em pequenos grupos na sala de aula e, posteriormente, exploradas em plenário. Esta exploração era orientada pela professora que selecionava os grupos que deveriam apresentar os seus trabalhos, por norma,

[4] Tarefas que constam da trajetória hipotética de aprendizagem.

três grupos com diferentes estratégias de resolução e, ainda, o grupo que tivesse evidenciado mais dificuldades e o que tivesse evidenciado menos dificuldades. A ideia era proporcionar o confronto e a explicitação de diferentes estratégias de resolução e o ultrapassar de dificuldades. Assim, posteriormente cada aluno poderia optar pela estratégia que considerasse mais percetível. A professora também apresentava estratégias de resolução, sobretudo aquelas que envolviam o recurso a modelos estruturados e que, por norma, não emanam facilmente das produções informais dos alunos, como a tabela de razão.

Exemplo de uma tarefa da trajetória de aprendizagem realizada pela turma

Dados da investigação sugerem que o estudo da divisão como isomorfismo de medidas – medida (MIM-M) com números racionais, é mais intuitivo quando iniciado com a divisão de um número inteiro por uma fração unitária (Pinto & Monteiro, 2008; Siebert, 2002), já que permite relacionar de forma compreensiva, o raciocínio efetuado na resolução de situações de medida com o algoritmo multiplicar pelo inverso do divisor. Assim, o estudo da DIM-M teve início com a exploração da tarefa 11, cujas duas primeiras questões tinham como principal objetivo a identificação da DIM-M e a exploração de forma compreensiva do algoritmo multiplicar pelo inverso do divisor:

> *11.1."Na festa de aniversário da Ana havia 2 l de sumo de maçã. Quantos copos de $\frac{1}{3}$ l se poderiam encher com sumo de maçã?*
>
> *11.2. Só alguns amigos da Ana gostavam de sumo de maçã. Destes, cada um bebeu $\frac{2}{3}$ l do sumo de maçã que havia. Quantos eram os amigos da Ana que só gostavam de sumo de maçã?*"

Depois de apresentada à turma e explorada em pequenos grupos, foram discutidas em plenário diferentes estratégias de resolução das questões 11.1 e 11.2 da referida tarefa. Esta discussão teve início com a apresentação das produções de dois grupos, que recorreram a esquemas e à adição sucessiva (Figura 2 e 3). A maioria dos grupos recorreu a estas estratégias, conforme previsto, já que durante a realização dos pré-testes evidenciaram pouca familiaridade com este significado da divisão.

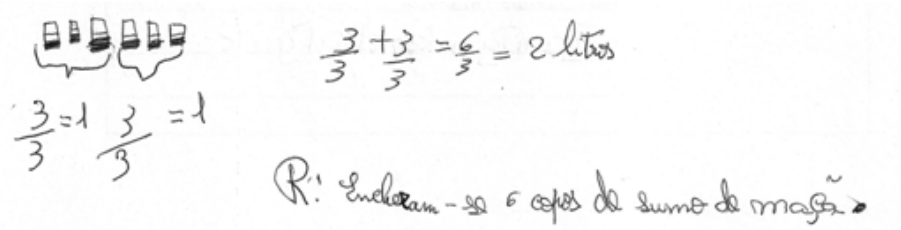


Figura 2: Produção do grupo de Lúcia para a resolução do problema 11.1



Figura 3: Produção do grupo de Francisco para a resolução do problema 11.2

O único grupo que recorreu à divisão para a resolução da questão 11.1. (Figura 4) e à multiplicação para a resolução da questão 11.2. (Figura 5), também foi ainda solicitado a apresentar as suas estratégias.

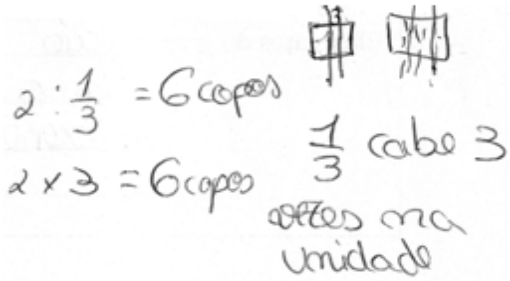


Figura 4: Produção do grupo de Jacinta para a resolução do problema 11.1

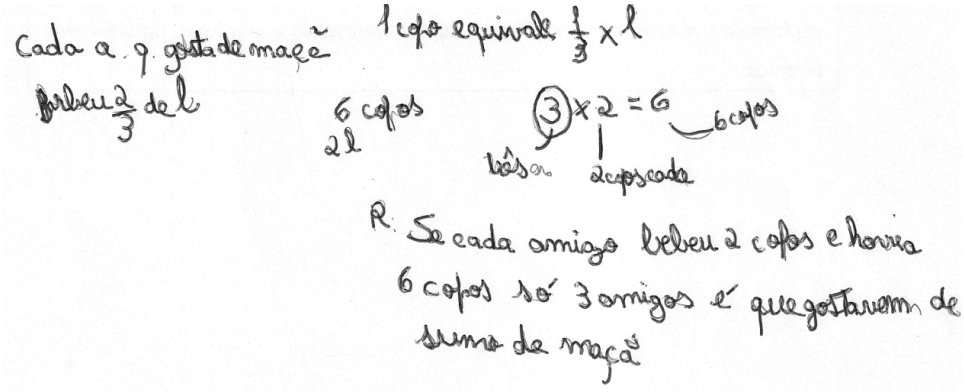


Figura 5: Produção do grupo de Jacinta para a resolução do problema 11.2

Durante a apresentação das diferentes estratégias de resolução da questão 11.1. e partindo das mesmas (Figuras 2 e 4), a professora orientou a discussão para o processo que se iniciou com a divisão de cada unidade (garrafa de sumo) em 3 partes iguais. Seguiu-se a identificação de 3 "um terço" em cada unidade e a conclusão de que em duas unidades cabem 6 "um terço", ou seja, = 2 × 3 = 6, pelo que, com 2 *l* de sumo se enchem 6 copos de *l*.

Já durante a apresentação das diferentes estratégias de resolução da questão 11.2 e partindo das mesmas (Figuras 3 e 5), a professora deu continuidade ao raciocínio realizado com a resolução da questão anterior. Assim, orientou a discussão no sentido de que se cabe 6 vezes em 2 unidades, então cabe metade das vezes. Pelo que, em 2 unidades há de 6, ou seja, 3 "dois terços". Os alunos foram ainda orientados para o algoritmo multiplicar pelo inverso do

divisor, ao serem confrontados com o facto de que dividir por é equivalente a multiplicar por 3 e depois por, ou seja, que é o mesmo que multiplicar pelo inverso de.

Metodologia de investigação

A metodologia adotada para o estudo seguiu o paradigma interpretativo (Erickson (1986), com *design* de estudo de caso múltiplo (Ponte, 2006), realizando-se três estudos de caso. Para a recolha de dados recorreu-se a técnicas como a observação com registos vídeo e áudio, à análise documental, a testes e a entrevistas em profundidade com registos áudio e documental (Yin, 2003).

No estudo, para além da investigadora, participou uma professora do 2.º ciclo do ensino básico, que realizou a unidade de ensino numa das suas turmas do 6.º ano de escolaridade. A trajetória hipotética de aprendizagem foi pensada e elaborada pela professora e pela investigadora, em sessões de trabalho antes da sua concretização em sala de aula, e reformulada ao longo da mesma.

Os alunos-caso do estudo integravam a referida turma e foram selecionados a partir dos desempenhos apresentados na realização de pré-testes, que tiveram como objetivo diagnosticar o sentido da multiplicação e divisão de números racionais (apenas na sua representação decimal), bem como o sentido de número racional e, por conseguinte, o nível de desenvolvimento do raciocínio multiplicativo dos alunos. Assim, foi selecionado um aluno que obteve bom desempenho (Jacinta) nos referidos testes, outro que obteve médio desempenho (Francisco) e um terceiro que obteve fraco desempenho (Lúcia). Para perceber melhor os desempenhos que apresentaram nos pré-testes, estes alunos foram ainda solicitados a realizar três entrevistas que visavam os assuntos dos pré-testes.

Com o objetivo de perceber o processo de desenvolvimento do sentido da multiplicação e divisão de números racionais de cada um dos alunos caso, estes foram sendo entrevistados sempre que terminava a exploração de cada um dos tópicos estudados no âmbito da realização da unidade de ensino, que obedeceram à seguinte sequência: (i) multiplicação como isomorfismo de medidas; (ii) divisão como isomorfismo de medidas – medida; (iii) divisão como isomorfismo de medidas – partilha e (iv) multiplicação e divisão como produto de medidas. No fim e seis meses depois da realização da unidade de ensino e com o intuito de perceber o nível, respectivamente de interiorização e retenção do sentido da multiplicação e divisão de números racionais dos referidos alunos, estes foram novamente solicitados a realizar entrevistas sobre os referidos tópicos explorados na unidade de ensino.

Divisão como isomorfismo de medidas – medida

Antes da realização da unidade de ensino, por exemplo, perante a tarefa "*Um grupo de 27 amigos resolveu fazer um piquenique no campo e para se deslocarem levaram carros. Cada carro levava 5 pessoas. Quantos carros foram necessários para transportar os 27 amigos? Descreve o processo que usares para responder à questão*", do pré-teste, apenas Jacinta identificou e usou a divisão como estratégia de resolução, mas só depois de modelar a situação com um esquema que parece fundamentado num procedimento de adição sucessiva (Figura 6). Francisco não apresentou qualquer estratégia de resolução correta e Lúcia apresentou um esquema que também parece fundamentado num procedimento aditivo, porém não identificou a divisão (Figura 7). Por conseguinte, apenas Jacinta conseguiu identificar a divisão e usá-la como estratégia de resolução, mas só após a modelação da tarefa

com recurso a esquemas baseados em procedimentos aditivos e, portanto, sem caráter multiplicativo.

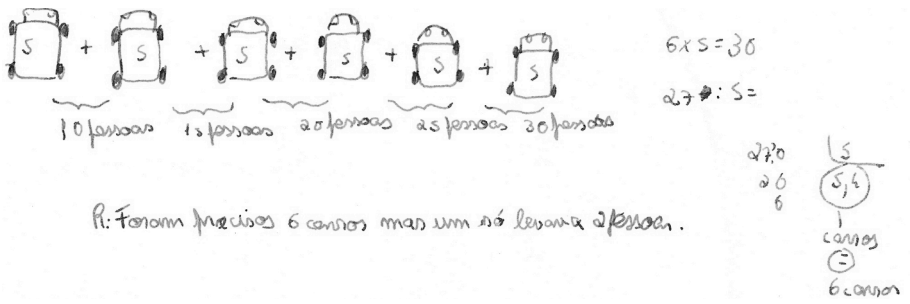


Figura 6: Produção de Jacinta antes da realização da unidade de ensino

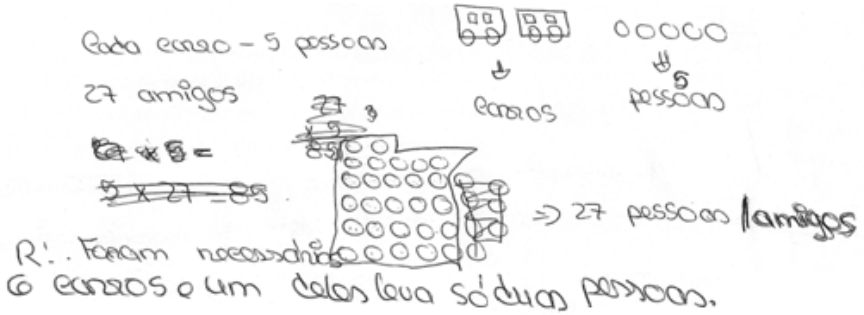


Figura 7: Produção de Lúcia antes da realização da unidade de ensino

Assim, qualquer um dos alunos evidenciou raciocínio aditivo perante uma tarefa que requer raciocínio multiplicativo. Deste modo, não pareciam familiarizados com este significado da divisão de números racionais (apenas na sua representação decimal) e, por consequência, denotaram dificuldades ao nível do raciocínio multiplicativo.

Durante a realização da unidade de ensino, por exemplo, perante a tarefa "*O pai do Tiago comprou 5 litros de azeite e quer guardá-lo em garrafas de meio litro. Quantas garrafas serão necessárias?*", Jacinta explicitou:

> J: Então, tenho que dividir 5 por! Dividir por metade é igual a multiplicar por dois! Porque cada litro dá 2 garrafas, é igual a multiplicar por 2!

Já Francisco depois de registar explicitou:

> F: Uma garrafa leva meio litro, duas garrafas levam um litro! 5×2=10 garrafas!

Lúcia também identificou a operação e justificou a sua produção (Figura 8):

> I: Mas, começaste por dividir e depois multiplicaste cinco por dois. Porquê?
>
> L: Porque fiz o inverso! Multipliquei pelo inverso de 12!
>
> I: Não percebi! Mas tens 5 litros a dividir por garrafas de 12 litro!
>
> L: Pois! Mas, são precisas duas garrafas de meio litro para levar 1 litro, por isso, são cinco vezes duas!

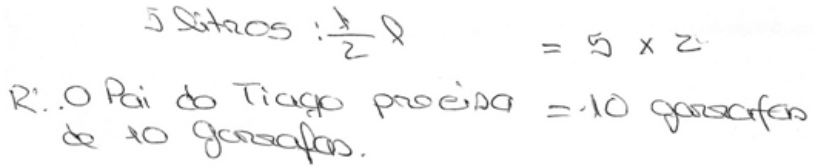


Figura 8: Produção de Lúcia durante a realização da unidade de ensino

Por conseguinte, qualquer um dos alunos identificou a divisão e usou-a como estratégia de resolução em situações DIM-M, evidenciando conhecimento significativo desta. Deste modo, parecem ter ultrapassado as dificuldades que evidenciaram nos seus desempenhos antes da realização da unidade de ensino com a DIM-M.

No fim da realização da unidade de ensino, por exemplo, perante o problema "*Mantendo a mesma velocidade, a mãe do Pedro percorre km por minuto. Quantos minutos precisa para percorrer km?*", qualquer um dos alunos-caso identificou a divisão e usou-a como estratégia de resolução (Figura 9). Assim, qualquer um dos referidos alunos parece ter formalizado este significado da divisão, na medida em que passaram a modelar as situações que o envolviam, apenas com a divisão, ou seja, a estratégia mais eficiente de resolução.

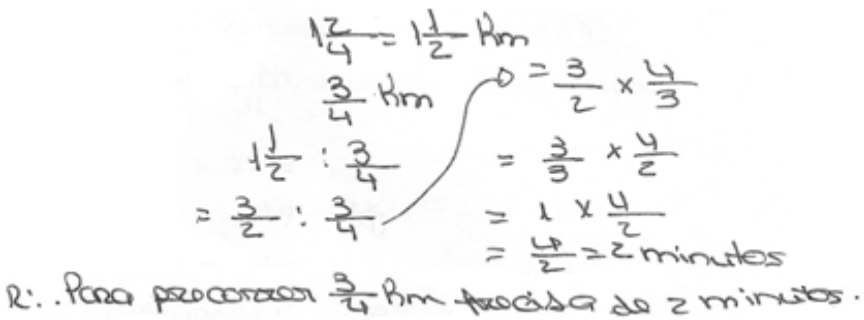


Figura 9: Produção de Lúcia no fim da realização da unidade de ensino

Estes resultados mantiveram-se seis meses depois da realização da unidade de ensino. Por exemplo, perante o problema "*O seu irmão André leu do mesmo livro. Quantas vezes mais leu o Tiago* [que leu] *do que o André?*", qualquer um dos alunos-caso voltou a identificar e a usar a divisão como estratégia de resolução (Figura 10).

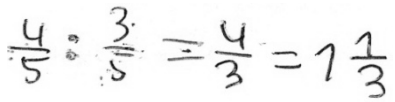


Figura 10: Produção de Francisco seis meses depois da realização da unidade de ensino

Deste modo, os alunos-caso parecem ter retido as aprendizagens que fizeram sobre a DIM-M, durante a realização da unidade de ensino, e que manifestaram no fim da mesma.

Considerações finais

Dados relativos aos desempenhos apresentados pelos alunos antes da realização da unidade de ensino, revelam o recurso a esquemas informais para a modelação de problemas que envolvem a DIM-M, bem como a procedimentos aditivos e, por conseguinte, pouca

familiaridade com este significado da divisão. Já durante a realização da unidade de ensino os alunos evidenciaram conhecimento significativo da DIM-M. Nos desempenhos que apresentaram no fim da realização da unidade de ensino, parecem ter formalizado a DIM-M, dado que identificaram e usaram sempre a divisão como estratégia de resolução, evidenciando assim, e de acordo com Vergnaud (1983, 1988), apenas procedimentos de caráter multiplicativo. Estes resultados mantiveram-se seis meses depois da realização da unidade de ensino, pelo que os alunos parecem ter realizado aprendizagens significativas da DIM-M.

O facto de durante a realização da unidade de ensino se ter: (i) contemplado a exploração de tarefas que envolvem a DIM-M, essencialmente compostas por problemas de contexto e, por conseguinte, promotores da atividade de modelação; e (ii) valorizado as produções próprias dos alunos, as conexões matemáticas e o caráter interativo do ensino-aprendizagem; parece ter contribuído para uma ligação entre o conhecimento informal e formal dos alunos, já que estes afiguraram ter formalizado este significado da divisão e, por consequência, desenvolvido raciocínio multiplicativo.

Assim, uma das potencialidades da unidade de ensino parece ter sido a exploração de tarefas em contextos significativos para os alunos, já que estimulam a atividade de modelação e, por consequência, promovem a formalização da DIM-M, significado com o qual os alunos não pareciam familiarizados antes da realização da unidade de ensino.

Estes resultados corroboram as ideias de vários investigadores (Freudenthal, 1973, 1991; Gravemeijer, 1994, 1999; Strefland, 1986, 1991; Treffers, 1987, 1991; van den Heuvel-Panhuizen & Wijers, 2005), que salientam a importância da resolução de problemas de contextos reconhecíveis para os alunos, já que estimulam a atividade de modelação, recorrendo a desenhos, diagramas, ou tabelas e, por conseguinte, a progressão do conhecimento informal para o formal, ou seja, o processo de matematização.

Referências

DGIDC (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação/Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Org.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). NY:Macmillan.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: D. Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*: *China lectures*. Dordrecht: Kluwer.

Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht: CD-ß Press / Freudenthal Institute.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning, 1*(2), 155-177.

Huinker, D. (2002). Examining dimensions of fractions operation sense. In B. Litwiller & G. Bright (Org.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 Yearbook* (pp. 72-78). Reston, VA: NCTM.

McIntosh, A., Reys, B. J. e Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 2-8 e 44.

Pinto, H & Monteiro, C. (2008). A divisão de números racionais. In J. Brocardo, L, Serrazina, & I. Rocha (Ed), O sentido do número: reflexões que entrecruzam teoria e prática (pp. 201-219). Lisboa: Escolar Editora.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, *25*, 105-132.

Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: porquê, o quê e como? In Paulo Abrantes e Filomena Araújo (Org.), *Avaliação das Aprendizagens. Das concepções às práticas* (pp. 75-84). Lisboa: Ministério da educação, Departamento do Ensino Básico.

Siebert, D. (2002). Connecting informal thinking and algorithms: the case of division of fractions. In B. Litwiller, & G. Bright (Org.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions: 2002 Yearbook* (pp. 247-256). Reston: NCTM.

Simon, M. A., (1995). Constructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*, 114-145.

Simon, M. & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: An elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*, 91-104.

Slavit, D. (1999). The role of operation sense in transitions from arithmetic to algebraic thought. *Educational Studies in Mathematics, 37* (3), 251-274.

Streefland, L. (1986). Rational analysis of realistic mathematics education as a theoretical source for psychology: Fractions as a paradigm*. European Journal of Psychology of Education*, *1*(2), 67-82.

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education: A paradigm of developmental research*. Dordrecht: Kluwer.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions. A model of goal and theory description in mathematics instruction: The Wiskobas Project*. Dordrecht: D. Reidel.

Treffers, A. (1991). Realistic mathematics education in the Netherlands 1980-1990. In L. Streefland (Org.), *Realistic Mathematics Education in primary school* (pp. 11-20). Utrecht: CD-ß Press/Freudenthal Institute, Utrecht University.

van den Heuvel-Panhuizen, M., & Wijers, M. M. (2005). Mathematics standards and curricula in the Netherlands. *Zentrallblatt fur Didaktik der Mathematik, 37*(4), 287-307.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Org.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp.127-174). New York, NY: Academic Press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In J. Hilbert & M. Behr (Org.), *Number concepts and operations in the middle grades* VII (pp. 141-161). Reston, VA: NCTM & Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Yin, R. K. (2003). *Case study research: Design and methods* (3.ª ed.). Thousand Oaks/London: SAGE.

UM PERCURSO DIDÁTICO DE ESTRUTURAÇÃO ESPACIAL E GEOMÉTRICA

Cristina Loureiro
ESE de Lisboa, CIED
cristina@eselx.ipl.pt

Resumo: A experiência de realização de tarefas organizadas pode permitir compreender modos de orientar o ensino da Geometria e Medida geométrica, tema ainda tão frágil ao nível da educação básica, e obter assim materiais de trabalho consistentes, úteis para a formação inicial e contínua de professores. Este foi o ponto de partida para a realização de uma investigação, no âmbito de um projeto de doutoramento, em que o objeto de estudo são percursos didáticos em Geometria e Medida geométrica. Estes percursos didáticos fundamentam-se em níveis gerais de estruturação do raciocínio geométrico (Battista, 2008) e, por isso, embora sendo experimentados no 1.º ciclo do Ensino Básico, podem abrir horizontes para compreender a caraterização destes níveis e as suas implicações na aprendizagem da Geometria e Medida geométrica em todo o ensino básico. Neste texto apresenta-se um estudo de caso enquadrado na investigação ainda em curso.

Palavras chave: percursos didáticos, estruturação espacial, estruturação geométrica.

Introdução

Este trabalho faz parte de uma investigação mais ampla que está a ser desenvolvida no âmbito de um projeto de doutoramento na área da Didática da Matemática. Esta apresentação diz respeito a uma parte do trabalho já realizado, foca-se apenas num estudo de caso e justifica-se pelo facto da investigação ainda não ter terminado e pelo interesse de apresentar e discutir alguns aspetos da investigação. A apresentação contempla o enquadramento e a caraterização do objeto de estudo, os seus fundamentos, aspetos mais significativos da metodologia de investigação utilizada e exemplos de um dos casos que a integram.

Enquadramento

A investigação de base deste trabalho tem como objeto de estudo um conjunto de tarefas experimentadas em várias turmas diferentes, em momentos distintos, e em que a ligação entre as tarefas também faz parte do objeto de estudo. O propósito global da investigação é estudar o ensino e a aprendizagem da Geometria e Medida geométrica nos primeiros anos da escolaridade, orientado por um grande objetivo: Conceber, experimentar e caraterizar percursos didáticos em Geometria e Medida geométrica, passíveis de utilização no 1.º ciclo do ensino básico.

Concorrem para a clarificação deste objetivo de investigação duas conjeturas: (1) A experiência de realização em sala de aula de tarefas intencional e explicitamente organizadas permite identificar aspetos relevantes do raciocínio geométrico, visualização e representação envolvidos na sua resolução pelos alunos, bem como as relações entre eles e o seu papel na aprendizagem da Geometria e Medida geométrica ao nível elementar. (2) Estas experiências permitem evidenciar os aspetos críticos do conhecimento matemático inerentes às exigências

de ensino, bem como delinear ações que ajudem os professores a ultrapassá-los e a aumentar com consistência o seu conhecimento matemático específico para ensinar.

O interesse deste trabalho está justificado pela necessidade de investigação sobre o ensino da Geometria na educação básica (Battista, 2007). Para além do contributo que poderá ser dado a esse nível, espera-se que venha ajudar a Geometria a ter um lugar mais relevante no ensino da Matemática nos primeiros anos e que sejam obtidos instrumentos de trabalho eficazes e fundamentados para a formação inicial e contínua de professores.

O objeto de estudo — os percursos didáticos

O conceito de percurso didático tem na sua génese uma abordagem didática construtivista. Este conceito envolve a ideia de sequência de atividades que conduza à construção de estruturas matemáticas (Confrey & Kazak, 2006), a preocupação de eficácia dependente do conhecimento do professor (Cobb, Wood, Yackel, Nicholls, Wheatley, Trigatti & Perlwitz, 1991), a perspetiva de hierarquia no conhecimento conceptual (Sarama & Clements, 2009) e os conceitos de trajetória hipotética de aprendizagem (Brocardo, Serrazina & Rocha, 2008; Clements & Sarama, 2007; Gravemeijer, 1998; Kraemer, 2008; Serrazina & Oliveira, 2010; Simon, 1995, 2004; Steffe, 1991) e de ciclo de ensino (Simon,1995).

Simon (1995), ao afirmar que o objetivo de aprendizagem do professor proporciona uma direção para uma trajetória hipotética de aprendizagem refere-se tanto à expectativa do professor como ao caminho a seguir pela aprendizagem do aluno. A trajetória é hipotética porque não pode ser previamente conhecida, ela representa uma tendência esperada que proporciona ao professor um fundamento para delinear um plano de ensino. Simon defende que há três componentes a considerar numa trajetória de aprendizagem: os objetivos, um conjunto de tarefas e a progressão de desenvolvimento. Neste modelo, o investigador liga a ideia de trajetória com caminho, itinerário ou percurso, introduzindo o caráter dinâmico desta metáfora do viajante em que "*o percurso percorrido é a trajetória, o percurso planeado em cada momento da viagem é a trajetória hipotética*" (p. 137). De certa forma as trajetórias de aprendizagem constituem um mapa dinâmico e interativo de que o professor dispõe para realizar uma viagem. À medida que o professor avança nessa viagem, as trajetórias do guia evoluem, de tal modo que o mapa original e o mapa final podem não coincidir.

Uma experiência de realização de um conjunto de tarefas estruturadas, uma cadeia de tarefas, está intimamente ligada com a ação do professor. Uma cadeia de tarefas deve ter subjacente uma trajetória hipotética de aprendizagem que define uma orientação, um caminho viável a percorrer. A designação de "cadeia" pode ser considerada mais forte do que a de "sequência" pois, para além da explicitação de uma ordem ou hierarquia, reforça a existência de elos, ligações entre as tarefas que a constituem. Quanto mais explícitos forem estes elos, maior consistência poderá ter a cadeia. Quanto mais consistente for a cadeia de tarefas, mais eficaz e robusto poderá ser o percurso de aprendizagem em causa. No entanto, é impensável desligar da ação do professor a trajetória de aprendizagem realizada.

Importa também referir a ideia de ciclo de aprendizagem como unidade de ensino (Simon, 1995). Simon destaca quatro pontos fundamentais num ciclo de aprendizagem: (1) a compreensão do raciocínio dos alunos; (2) a evolução do conhecimento do professor em paralelo com o crescimento do conhecimento dos alunos; (3) a importância do estabelecimento de hipóteses na planificação do ensino; (4) as implicações da mudança continuada do professor na evolução do ensino. Estes aspetos evidenciam a necessidade de associar os termos "aprendizagem" e "ensino" quando se estrutura um conjunto de tarefas, com base em trajetórias hipotéticas de aprendizagem. É desta associação que advém a

designação "didática", escolhida a partir da perspetiva desenvolvida por Ruthven, Laborde, Leach e Tiberghien (2009), em que a associação do termo "didático" permite "*idealizar sequências de ensino que, para além de serem passíveis de difundir para utilização em salas de aula comuns, são suficientemente compreensíveis e robustas para conseguirem promover os seus propósitos com alguma segurança*" (p. 329).

Nesta investigação utiliza-se a designação de "percurso didático" para identificar um conjunto de tarefas explicitamente estruturadas, com base em trajetórias hipotéticas de aprendizagem, sujeitas a uma utilização experimental em sala de aula. De certa forma, um percurso didático pode ser considerado como um filme de um percurso bem definido de aprendizagem e ensino já realizado.

A focalização desta investigação em tópicos de Geometria e Medida geométrica tem-se constituído como bastante promissora pois estes constituem uma área da matemática carente de trabalhos desta natureza ao nível elementar, em que é limitada a investigação sobre a natureza precisa das tarefas que desenvolvem a visualização espacial e as competências de visualização (Sarama & Clements, 2009).

Importa ainda apresentar outras características significativas escolhidas para o objeto de estudo: (1) As tarefas que os integram são o ponto de partida para a aprendizagem, são de natureza aberta e proporcionam discussões coletivas que têm por base as produções dos alunos. As tarefas são de muito fácil adesão pelos alunos pois a sua compreensão é muito simples e envolve-o na atividade, em que pode raciocinar e agir de modo pessoal significativo (Gravemeijer & Cobb, 2006). (2) As tarefas adaptam-se às ideias dos alunos, porém a sua resolução envolve obstáculos – barreiras críticas – e as ações realizadas para os ultrapassar podem conduzir à construção de estruturas matemáticas. (3) Ao serem experimentadas são conhecidos os efeitos das tarefas, são identificados os aspetos críticos dessa experiência e são obtidas soluções para lidar com esses aspetos críticos e ultrapassá-los. Esta experiência origina a produção de materiais de apoio que facilitam a sua utilização futura por outros professores.

Estruturação espacial e estruturação geométrica

Os fundamentos desta investigação situam-se na estruturação do raciocínio geométrico com base em ideias diversas, nomeadamente estruturação dos objetos matemáticos (Freudenthal,1991), matematização horizontal e vertical (Freudenthal (1991), oportunidades para matematizar (Gravemeijer 1998), estruturação como um processo de dependência e de estabelecimento de ligações (Skemp, 1993), construção de *schema* como uma estrutura conceptual que terá o valor de uma ferramenta para posteriores aprendizagens (Skemp, 1993), possibilidade de coexistência de vários esquemas conceptuais (Wilder-Johnston e Mason, 2005), e necessidade de criar um currículo de geometria com uma forte perspetiva ao nível do concreto e descritivo (Gravemeijer, 1998),

Para Freudenthal (1991), a estruturação horizontal leva-nos do mundo em que vivemos e agimos para um mundo simbólico, a estruturação vertical ocorre na progressão dos processos mais elementares para os mais sofisticados. Este trabalho que tenho vindo a realizar leva-me a colocar a hipótese de que as entradas para a estruturação não serão apenas horizontais ou verticais, nem haverá uma hierarquia de orientação única. A estruturação do conhecimento matemático poderá ser uma espécie de edifício totalmente aberto horizontal e verticalmente, uma rede (fig. 1), no qual, em todos os seus níveis por mais sofisticados que sejam, haverá sempre entradas horizontais que partem do mundo em que vivemos para o mundo simbólico da matemática.

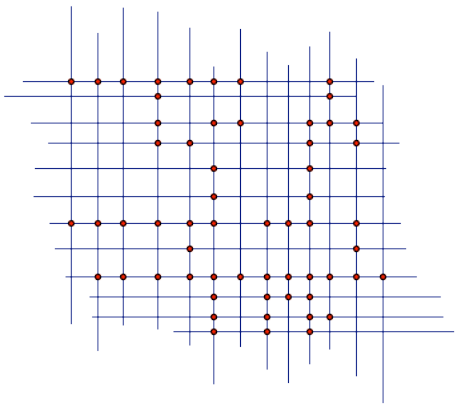


Figura 1 — Representação de uma rede de estruturação horizontal e vertical

Esta imagem de estruturação a vários níveis, liga-se à ideia de mapa para representar esquemas conceptuais e as suas ligações (Wilder-Johnston & Mason, 2005), sendo aqueles representados por pontos e estas por linhas. Quanto mais linhas tiver o mapa, mais ligações existem, e por isso mais rica poderá ser a compreensão matemática. A perspetiva, de que aprender estruturalmente é vantajoso no momento de criação da estrutura conceptual, vantajoso mais tarde na reutilização da estrutura que, assim, também se consolida e pode ampliar, é um aspeto importante a reter quando se estudam trajetórias de aprendizagem, passíveis de se constituírem como percursos didáticos consistentes e robustos.

Esta perspetiva estruturalista tem-se verificado muito adequada à geometria. Battista, Clements, Arnoff, Battista e Borrow (1998) afirmam que toda a geometria é em essência, uma maneira de estruturar o espaço e de estudar as consequências dessa estruturação e reconhecem que estudar os processos através dos quais os alunos estruturam o espaço oferece-nos uma nova e poderosa perspetiva para investigar a construção da geometria e das ideias espaciais pelas crianças.

Estruturar espacialmente um objeto determina a sua natureza, ou forma, pela identificação das suas componentes espaciais, pela combinação das componentes em composições espaciais, e pelo estabelecimento de inter-relações entre as componentes e os compostos. Por exemplo, um geoplano é um instrumento de estruturação espacial através de uma malha quadriculada de linhas perpendiculares, uma estrutura ortogonal isométrica. Ao utilizá-lo para representar retângulos estamos a estruturar espacialmente o retângulo. Se os lados do retângulo coincidem com as linhas da malha quadriculada a estruturação é imediata. Se o retângulo está numa posição inclinada, a sua estruturação espacial exige outro tipo de recurso. Por exemplo, o destaque de ângulos retos, como componentes do retângulo, pode ser uma maneira de estruturar esta figura e identificá-la em qualquer posição.

Ao analisar um conjunto de retângulos diferentes, identificando como invariante a existência de quatro ângulos retos, estamos perante uma estruturação geométrica desta figura. De certa forma, libertamo-nos dos protótipos de retângulo que temos em presença para construir um modelo de retângulo. Este esquema conceptual permitir-nos-á reconhecer se um dado quadrilátero é ou não um retângulo. E é desejável que neste esquema conceptual o quadrado seja reconhecido como um retângulo, um retângulo especial como dá jeito e é recomendável que as crianças o considerem.

Battista (2008) desenvolve a ideia de que a aprendizagem da geometria pode ser encarada como envolvendo três tipos de estruturação:

> (a) Estruturação espacial, que constrói a organização espacial ou forma de um objeto ou de um conjunto de objetos. Ela determina a perceção/conceção da natureza de um objeto ou forma, através da identificação de componentes do objeto espacial, combinando

> componentes em compósitos, e estabelecendo relações entre componentes e compósitos.
>
> (b) Estruturação geométrica, que descreve a estruturação espacial em termos de conceitos de geometria formal. Isto é, na estruturação geométrica de uma situação espacial, o sujeito usa os conceitos de geometria como ângulos, declive, paralelismo, comprimento, retângulo, sistemas de coordenadas, e transformações geométricas para conceptualizar e operar sobre uma dada situação. Para que a estruturação geométrica faça sentido para alguém, ela terá que evocar uma estruturação espacial adequada.
>
> (c) Estruturação lógico formal, que organiza os conceitos geométricos (isto é, as estruturas geométricas) num sistema e que especifica as relações que podem ser descritas e estabelecidas através de raciocínio lógico. Para chegar à estrutura lógica, o indivíduo deve organizar logicamente conjuntos de propriedades.
>
> (pp. 138-139)

Este terceiro tipo de estruturação corresponde a níveis mais avançados de escolaridade, no entanto, é importante referir que o desenvolvimento de uma boa estruturação lógico formal depende de uma boa estruturação geométrica, assim como, o desenvolvimento de uma boa estruturação geométrica depende da qualidade da estruturação espacial. A relação entre estes tipos de estruturação não deve ser encarada como uma hierarquia fechada, de sentido único. Estas organizações são muito úteis para o entendimento de trajetórias hipotéticas de aprendizagem e para o planeamento de cadeias de tarefas e consequente obtenção de percursos didáticos.

Uma das questões que se coloca nas estruturações espacial e geométrica é a do lugar relativo das figuras 2D e 3D. Deverão estas ser encaradas primeiro que as outras, pelo facto dos objetos tridimensionais serem mais familiares para as crianças? Wilder-Johnston e Mason (2005) respondem a esta questão ao defenderem que tanto a geometria sólida como a plana devem ser ensinadas de modo integrado. O que é importante, é que o foco seja o raciocínio geométrico e este exige tarefas que envolvam os alunos em manipulações apropriadas, que proporcionem oportunidades para dar sentido às relações e para ver essas propriedades como invariantes, independentes de uma situação particular, e passar a raciocinar com base nessas propriedades.

Metodologia

Do ponto de vista metodológico esta investigação constitui um *educational design research*. Segundo Van den Akker, Gravemeijer, McKenney e Nieveen (2006), uma investigação desta natureza caracteriza-se por ser: (1) Interventiva, (2) Iterativa, (3) Orientada para os processos — são evitados modelos de medição de entrada e saída, o foco é a compreensão e melhoria das intervenções; (4) Orientada para a utilidade — o mérito do design é medido, em parte, pela sua utilidade prática para outros utilizadores em contextos reais; (5) Orientada para a teoria — o design, ou parte dele, baseia-se em afirmações teóricas e o campo de investigação do design contribui para o campo teórico em que se inscreve.

Os aspetos referidos apontam naturalmente o caráter qualitativo e interpretativo da investigação, constituída por quatro percursos didáticos, experimentados com a presença da investigadora em todas as aulas. A conclusão da componente empírica está prevista para o mês de maio de 2012. Nesta texto apresenta-se apenas um dos percursos.

Embora este trabalho não seja uma experiência de ensino no sentido comum, é uma experiência intencional de ensino, que procura respeitar a cultura de cada sala de aula,

condição necessária a um *design experiment,* e em que o investigador é também um dos agentes de ensino. Destaca-se a importância de situar num contexto natural a experiência sobre percursos didáticos, bem como a intervenção da investigadora nas salas de aula. O Quadro 1 mostra as fases da investigação, bem como a ligação às turmas e às professoras nela envolvidas. Este quadro cronológico evidencia o campo alargado de intervenção, que foi sendo construído ao longo de dois anos letivos em que as professoras participaram no Programa formação contínua de Matemática, para depois ser assumido como campo de investigação já totalmente organizado num terceiro ano de formação comum para as professoras T1, T2, T3 e T4. As células sombreadas identificam as turmas e os anos de escolaridade em que foram experimentadas atividades de Geometria e de Medida geométrica com a participação da investigadora, depois de planeadas em conjunto com as professoras.

Quadro 1 — Cronologia do campo de investigação

	Fase exploratória	**1.ª Fase**		**2.ª Fase**	
Professoras	**2007-08**	**2008-09**	**2009-10**	**2010-11**	**2011-12**
T1	—	2º ano	3º ano	4º ano	1º ano
T2	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano	1º ano
T3	3º ano	4º ano	1º ano	2º ano	3º ano
T4	—	1º ano	2º ano	3º ano	4º ano
R	2º ano	—	—	—	—
S	—	4º ano	—	—	—
	Sequências de Tarefas (7)			**Percursos Didáticos (4)**	

O campo empírico constituído por estas turmas permitiu incorporar a revisão e repetição de ciclos de ensino, (Cobb & Gravemeijer, 2008; Gravemeijer & Cobb, 2006; Simon, 1995), conferindo por isso um caráter iterativo a esta investigação. As sequências de tarefas experimentadas na fase exploratória e na 1.ª fase da investigação evoluíram para os percursos didáticos que integram a 2.ª fase. Nesta fase, foram introduzidas alterações substanciais nas sequências de tarefas que permitem afirmar que este caráter iterativo ajuda a ligar de forma mais completa a aprendizagem dos alunos com a compreensão do conhecimento profissional para ensinar. A relação entre a experiência das sequências e a experiência dos percursos tem ajudado a consolidar as tarefas que os constituem, bem como as ligações entre elas e a aprendizagem que promovem. A sua consistência foi sendo determinada pelas trajetórias de aprendizagem dos alunos.

No final da investigação terão sido realizados quatro estudos de caso, quatro percursos didáticos — Per 1, Per 2, Per 3 e Per 4, cuja designação numérica é cronológica. Cada percurso funciona como um ciclo de aprendizagem (Simon, 1995) e o desenvolvimento da investigação constitui-se ele próprio como um processo cíclico cumulativo, em que a interpretação de um percurso proporciona mais valias para o planeamento, experiência, reflexão e interpretação dos ciclos seguintes. Esta ideia de processo cíclico cumulativo é relevante e ajuda a reforçar a importância de ligar o trabalho, não pelos aspetos cronológicos, mas pela aprendizagem que vamos fazendo em cada percurso experimentado. O estabelecimento de objetivos bem focados para as tarefas, a organização do ambiente de aprendizagem, a evolução dos processos de matematização e visualização dos alunos, a compreensão de trajetórias de aprendizagem dos alunos, o recurso a estratégias de representação são aspetos transversais aos percursos que ajudam a entender a coerência deles entre si. Um dos aspetos a evidenciar,

ancorado na opção metodológica seguida, é a ligação entre a ação e a reflexão, aliada ao duplo papel assumido da investigadora como professora nas aulas em que são experimentadas as tarefas. Este duplo papel, desempenhado na 2.ª fase da investigação, espelha-se na intensidade de intervenção e parceria nas salas de aula, que vem sendo crescente, e tem-se revelado como uma mais valia, tanto para conhecer trajetórias de aprendizagem dos alunos, como para evidenciar o conhecimento profissional inerente às situações de ensino experimentadas e aprofundar a relação com as quatro professoras envolvidas neste trabalho.

Segundo Gravemeijer e Cobb (2006), na 1.ª fase de um *design research* desenvolvem-se conjeturas de teorias locais que depois, na 2.ª fase, são testadas e melhoradas. Na 1.ª fase desta investigação foram experimentadas sete sequências de tarefas cuja experiência permitiu identificar vários aspetos importantes sobre as trajetórias de aprendizagem dos alunos e estabelecer ligações entre essas trajetórias e outros aspetos da aprendizagem. Valoriza-se assim esta fase como uma experiência indispensável e decisiva para a realização da 2.ª fase, coerente com a ideia de que o propósito de um *design experiment* é testar e melhorar uma teoria local de ensino, elaborada numa fase anterior, e desenvolver a compreensão de como ela funciona.

Uma das características de um *educational design research* é a profusão de dados gerados e a permanente articulação entre os dados recolhidos e a sua análise. Gravemeijer e Cobb (2006) consideram que a geração de dados deve permitir ao investigador responder aos objetivos a que se propôs no início da investigação. Além disso, a geração de dados envolve a manutenção de um sistema comunicante de ida e volta de interpretações, conjeturas e decisões. Estes apontamentos mostram a necessidade do investigador explicitar as suas opções de recolha de dados, a evolução da recolha ao longo do desenvolvimento da experiência e a relação com a interpretação decorrente. Nesta investigação os instrumentos de recolha de dados foram de natureza muito diversa: gravações áudio das sessões de trabalho com as professoras; gravações vídeo de aulas; fotografias de aulas; notas de campo das sessões de trabalho com as professoras e das aulas; trabalhos dos alunos; documentos produzidos pelas professoras; descrições reflexivas dos percursos didáticos elaborados pela investigadora (DRPD), (Loureiro, 2012).

Para a elaboração dos estudos de caso foi construído um referencial a partir dos dois elementos chave referidos por Gravemeijer e Cobb (2006): (1) um referencial de caraterização do ambiente de aprendizagem na aula; (2) um referencial de caraterização dos raciocínios matemáticos dos alunos e do ensino da matemática. A primeira versão do referencial elaborado, Quadro 2, tem três componentes, cada uma delas com vários indicadores.

Quadro 2 — Primeira versão da estrutura dos estudos de caso

Referenciais	Indicadores
Referencial de caraterização do ambiente de aprendizagem	Perspetiva social
	Perspetiva individual
Referencial de caraterização dos raciocínios matemáticos dos alunos	Natureza das tarefas.
	Estruturas matemáticas trabalhadas no percurso didático.
	Processos de matematização. Matematização horizontal e vertical e nós de ligação.
	Processos de visualização.

Referencial de caraterização do ensino	Transformação das sequências de tarefas num percurso didático. Relação entre trajetórias hipotéticas e trajetórias realizadas.
	Necessidades identificadas e ações de ensino identificadas.

Um exemplo de estruturação espacial e geométrica

Este percurso resulta da evolução de três sequências de tarefas e constitui o percurso que integra tarefas experimentadas mais vezes em salas de aula diferentes, as tarefas 1 a 4 (Quadro 3). Nas experiências anteriores os aspetos mais débeis que tinham ficado em aberto foram: clarificação dos objetivos de cada tarefa; realização de discussões coletivas após a realização das tarefas 1 a 4; melhoria da utilização dos produtos dos alunos para alimentar as discussões coletivas; definição dos objetivos para as discussões coletivas; possibilidades de desenvolvimento após a tarefa 4. Nesta nova experiência estava subjacente o interesse em melhorar, consolidar e desenvolver estes pontos fracos.

Este percurso de estruturação espacial e geométrica é constituído por seis tarefas, todas de natureza aberta e de muito fácil adesão pelos alunos. O envolvimento foi sempre muito simples e rápido, proporcionando a cada aluno um modo de agir pessoal e significativo. Todas as tarefas introduzem novos obstáculos, que designamos por barreiras críticas, distintos dos da tarefa anterior mas com ligação entre si. A expetativa é que as ações realizadas para os ultrapassar possam conduzir à construção de estruturas matemáticas.

Quadro 3 — Tarefas integrantes do percurso

	Descrição sumária da tarefa	Barreiras críticas
1	Construir quadrados num geoplano de 5 por 5.	Reconhecimento de quadrados em posições não “direitas”. Necessidade de recorrer a ângulos retos e de introduzir um instrumento de medida, o “detetor de ângulos retos”.
2	Construir retângulos num geoplano de 5 por 5.	Utilização do “detetor de ângulos retos”. Reconhecimento de retângulos em posições não “direitas”. Inclusão do quadrado como retângulo especial. Introdução de figuras que são contra-exemplos.
3	Construir quadriláteros com pelo menos um ângulo reto num geoplano de 5 por 5.	Construção de figuras que respeitam simultaneamente duas condições.
4	Identificar em quadriláteros construídos, ângulos agudos e obtusos.	Reconhecimento e comparação de ângulos. Aparecimento de um ângulo que gera quadriláteros não convexos, o ângulo maior que um raso.

5	Descobrir ângulos retos, agudos, obtusos e superobtusos em polígonos dados em papel branco.	Ausência da estrutura quadriculada do geoplano. O ângulo como elemento fundamental de um polígono. Relações que envolvem ângulos e lados .
6	Construir, em papel branco, triângulos com: (1) um ângulo reto, (2) um ângulo obtuso, (3) nenhum ângulo reto e nenhum ângulo obtuso.	Estruturação espacial em papel branco. Impossibilidades de construção. Triângulos: retângulos, obtusângulos e acutângulos. Relações que envolvem ângulos num triângulo.

Tendo por base o referencial, ainda em construção, para descrever cada percurso, apresentam-se algumas ideias, ainda incompletas, sobre o desenvolvimento deste percurso.

Referencial de caraterização do ambiente de aprendizagem

Todas as tarefas seguiram a mesma dinâmica de trabalho: apresentação da tarefa aos alunos, tempo de trabalho individual seguido de discussão coletiva. Uma das dificuldades de gestão dos diferentes ritmos dos alunos é a passagem do trabalho individual para o momento de discussão coletiva. Neste percurso foi sempre sugerido aos alunos mais rápidos que obtivessem mais exemplos das figuras pedidas. Para os momentos coletivos de discussão foram expostos trabalhos de todos os alunos, estabelecendo-se assim uma boa relação entre o individual e social.

Todas as tarefas foram resolvidas individualmente pelos alunos. Esta opção, que tem sido seguida em muitas das tarefas experimentadas, permitiu identificar neste percurso algumas mais valias que lhe estão inerentes: autonomia e ritmo de cada aluno; confronto e avaliação do próprio trabalho; diálogo individual com o professor com base no trabalho do aluno.

Os trabalhos usados como suporte para os momentos coletivos são escolhidos por razões diversas: diversidade de situações; repetições provocadoras de discussão; erros comuns que promovem discussão. A disposição das figuras produzidas é intencional. A discussão em grande grupo procura envolver os alunos levando-os a analisar as figuras produzidas e a atuar sobre a sua disposição. As fotografias da figura 2 mostram uma evolução da exposição dos trabalhos dos alunos.

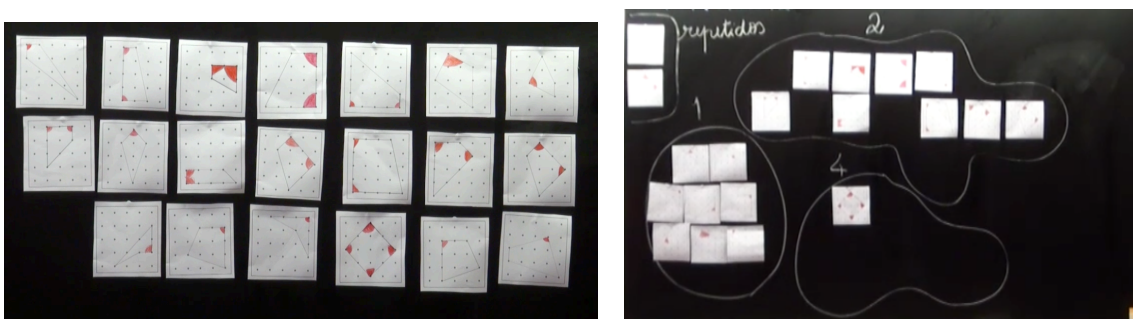


Figura 2 — Exposição dos trabalhos dos alunos no início e no fim da discussão coletiva (tarefa 3)

Referencial de caraterização dos raciocínios matemáticos dos alunos

No que respeita aos processos de visualização, destacam-se: a utilização de um objeto para destacar os ângulos, o detetor de ângulos retos; o recurso a objetos lineares para destacar lados do ângulo e permitir obter uma visão dinâmica de variação entre ângulo reto, agudo e obtuso (fig. 3); o recurso a cores para destacar os ângulos num polígono.

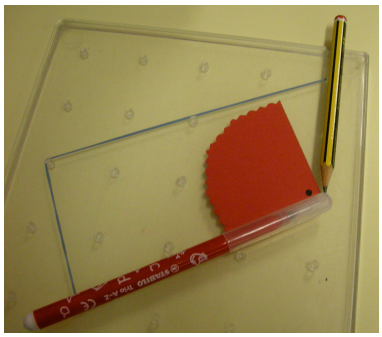


Figura 3 — Identificação de ângulos com referência ao ângulo reto (tarefa 4)

Destaca-se também a identificação de raciocínios visuais quando foi pedido aos alunos que ordenassem as figuras da tarefa 4 e dois deles organizaram um filme com as figuras em sequência, introduzindo uma nova figura. Estes alunos usaram a visualização para estabelecer uma relação entre um conjunto de figuras tendo em conta a variação de ângulos (fig. 4).

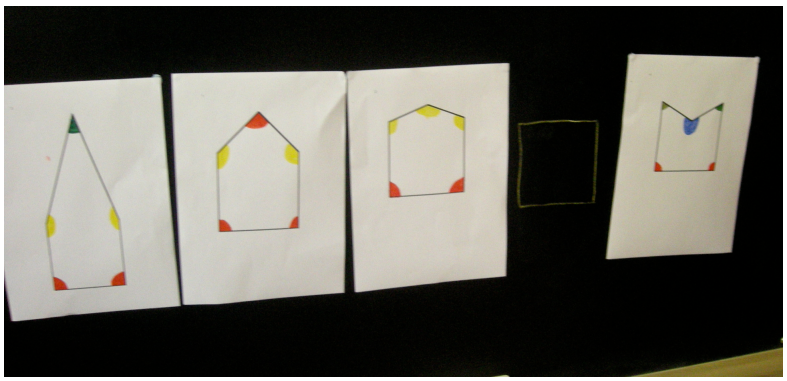


Figura 4 — Reorganização das figuras da proposta de trabalho (tarefa 4)

Esta sequência incide articuladamente sobre a estruturação espacial e a geométrica. A primeira parte do percurso orienta-se para a estruturação espacial, procurando libertar os alunos do suporte do geoplano e do papel ponteado correspondente, para a utilização de papel branco. A identificação de ângulos, com recurso à utilização do detetor de ângulos retos, ajuda a destacar os ângulos como elementos dos polígonos. Neste percurso, os lados, como elementos constituintes dos polígonos, foram pouco significativos pois apenas tiveram alguma atenção na discussão coletiva após as duas tarefas de construção dos retângulos, quadrados ou não (tarefas 1 e 2), nas tarefas 3 e 5, apenas como contagem. A estruturação geométrica começa por ocorrer na discussão coletiva no fim da tarefa 2, com a introdução de figuras que são contra-exemplos e com a inclusão do quadrado como retângulo especial. A tarefa 3 inscreve-se também neste domínio.

A estruturação geométrica, está patente em verbalizações do tipo: “aqueles todos são paralelogramos”, “um triângulo não pode ter mais do que um ângulo reto” ou “se tivesse dois ângulos retos tinha que ter mais um lado”. Este tipo de verbalizações ocorre nas discussões coletivas, quase sempre feitas pelos alunos que se destacam na turma. Constituem evidências de que há alunos que nos apontam para a possibilidade de uma trajetória hipotética de

aprendizagem mais avançada. No entanto, e porque estamos a trabalhar com toda a turma, não podem ser estes alunos o único farol dessa orientação da trajetória.

Referencial de caraterização do ensino

Este percurso resultou da experiência de três sequências na 1.ª fase da investigação. Nessa experiência a trajetória hipotética de aprendizagem orientava-se para a classificação de quadriláteros. Nessas primeiras experiências fomos percebendo que faltava conhecimento na estruturação geométrica dos quadriláteros no que respeita ao seus elementos, ângulos e lados, e às relações entre eles. Assim, decidimos re-orientar a trajetória para a estruturação geométrica dos polígonos, incidindo neste caso apenas nos ângulos e procurando uma estruturação espacial adequada no que respeita ao ângulo como elemento de um polígono.

A identificação das figuras, independentemente da sua posição no plano, e o reconhecimento visual dos ângulos como parte das figuras são exemplos de estruturação espacial dos quadriláteros, dos triângulos e dos outros polígonos. Como afirma Battista (2008), a configuração visual é uma forma de estruturar espacialmente.

Para além do aspeto crítico de decisão sobre se as tarefas se orientam para a estruturação espacial, para a estruturação geométrica ou, ainda, se combinam e como combinam estas duas orientações, outra questão pertinente é como obter tarefas, desafiantes e capazes de criar obstáculos promotores de aprendizagem, focadas principalmente na estruturação espacial. Sabendo que é muito fácil e tentador cair numa exigência de estruturação geométrica sem que os alunos tenham ainda desenvolvido uma adequada estruturação espacial.

Embora o trabalho de campo da investigação ainda não tenha terminado e os casos ainda não estejam totalmente completos, é importante evidenciar a utilidade dos níveis de estruturação (Battista, 2008) e da matematização horizontal e vertical (Freudenthal, 1991) para a conceção das tarefas, para a idealização das trajetórias e para a análise e caraterização dos percursos didáticos.

Referências

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. K. Lester, Jr. (Eds.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning, (pp. 843-908). NCTM.

Battista, M. T. (2008). Development of the shape makers geometry world. In Glendon W. Blume & M. Kathleen Heid (Eds.), Research on technology and the teaching and learning of Mathematics: Volume 2 - Cases and Perspectives, (pp. 131-156). NCTM & IAP.

Battista, M., Clements, D., Arnoff, J., Battista, K. & Borrow, C. (1998) Students' Spatial Structuring of 2D Arrays of Squares. JRME, 1998, 29(5), 503-532.

Brocardo, J., Serrazina, L., & Rocha, I. (2008). O sentido do número: reflexões que entrecruzam teoria e prática. Lisboa: Escolar Editora.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2007). Early childhood mathematics learning. In Frank K. Lester, Jr. (Eds.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning, (pp. 463-555). NCTM.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., Nicholls, J. Wheatley, G., Trigatti, B., & Perlwitz, M. (1991). Assessment of a problem-centered second-grade mathematics Project. Journal for Research in Mathematics Education, 22, 3-29.

Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to Support and Understand Learning Process. In A. E. Kelly, R. A. Lesh, & J. Y. Baek (Eds.), Handbook of Design Research Methodes in Education, (pp. 68-95). New York: Routledge.

Confrey, J., & Kazak, S. (2006). A thirty-year reflection on constructivism in mathematics education in PME. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future, (pp. 305-345). Rotterdam: Sense Publishers.

Freudenthal, Hans (1991). Revisiting Mathematics Education – China Lectures. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K. P. (1998). From a different perspetive: building on students' informal knowledge. In R. Lehrer, & D. Chazan (Eds.) Designing learning environments for developing understanding of geometry and space, (pp. 45-66). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspetive. In J. Van Den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Eds.), Educational Design Research, (pp. 17-51). New York and London: Routledge.

Kraemer, J. M. (2008). Desenvolvendo o sentido do número: cinco princípios para planificar. In J. Brocardo, L. Serrazina, & I. Rocha (Eds), O sentido do número: reflexões que entrecruzam teoria e prática, (pp. 3-28). Lisboa: Escolar Editora.

Loureiro, C. (2012). Percursos didáticos em Geometria e Medida geométrica – aspetos metodológicos. In Atas do V Encontro do CIED (no prelo).

Ruthven, K., Laborde, C., Leach, J., & Tiberghien, A. (2009). Design tools in didactical research: instrumenting the epistemological and cognitive aspects of the design of teaching sequences. Educational Researcher, 38(5), 329-342.

Sarama, J., & Clements, D. H. (2009). Early childhood mathematics education research: learning trajectories for young children. New York and London: Routledge.

Serrazina, L., & Oliveira, I. (2010). Trajetórias de aprendizagem e ensinar para a compreensão. In GTI - Grupo de Trabalho de Investigação (Eds.) O professor e o programa de Matemática do Ensino Básico (pp. 43-59). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspetive. Journal for Research in Mathematics Education, 26(2), 114-145.

Simon, M. A. (2004). Raising issues of quality in mathematics education research. Journal for Research in Mathematics Education, 35(3), 157-163.

Skemp, Richard R. (1993). The Psychology of Learning Mathematics. London: Penguin Books.

Steffe, L. (1991). The constructivist teaching experiment: Illustrations and implications. In E. von Glasersfeld (Ed.) Radical constructivism in mathematics education (pp. 177-194). Dordrecht: Kluwer.

Van Den Akker, J., Gravemeijer, K., McKenney, S., & Cobb, P. (2006). Introducing educational design research. In J. Van Den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Eds.), Educational design research (pp. 3-7). London and New York: Routledge.

Wilder-Johnston, Sue & Mason, John (Eds.) (2005). Developing Thinking in Geometry. London: The Open University.

UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO BASEADA NUMA ABORDAGEM PARALELA DAS VÁRIAS REPRESENTAÇÕES DOS NÚMEROS RACIONAIS E NO USO DO MODELO DA BARRA[1]

Hélia Ventura
Escola EB 2,3 Prof. João Fernandes Pratas – Samora Correia
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
helialopes@gmail.com

Hélia Oliveira
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ul.pt

Resumo: Este texto decorre de uma experiência de ensino (EE) desenvolvida numa turma do 5.º ano de escolaridade, centrada no tema Números Racionais, onde se procurou favorecer o estabelecimento de conexões entre as várias representações dos números racionais, em diferentes significados, através de tarefas com contextos significativos e do uso de modelos, principalmente a barra numérica. O seu objetivo principal foi o de proporcionar o desenvolvimento do sentido de número racional nos alunos. O presente estudo procura evidenciar, a partir da atividade de um grupo de alunos, como a integração da barra numérica nas tarefas propostas, como *modelo de* se transformou num *modelo para* raciocinar, contribuindo para alcançar os objetivos da EE, em especial no que diz respeito à flexibilidade do uso das várias representações de um número racional e de unidades de referência. A recolha de dados incidiu sobre as gravações vídeo e áudio do trabalho do grupo escolhido, os momentos de discussão em grande grupo e as resoluções escritas do grupo.

Palavras-chave: Números Racionais; Representações; Modelos; Experiência de Ensino.

Introdução

Este estudo surgiu num momento de mudança relativamente ao ensino dos números racionais, uma vez que o atual Programa de Matemática do Ensino Básico preconiza uma abordagem paralela das várias representações dos números racionais, abrangendo os vários significados dos números racionais ao longo dos primeiros anos de escolaridade (ME, 2007). As orientações curriculares do NCTM (2007) referem, igualmente, que é importante encorajar os alunos a trabalhar as diversas representações destes números, e que devem ser-lhes dadas oportunidades para estabelecerem conexões entre elas. Procurando ir ao encontro destas orientações, foi delineada uma EE com uma turma do 5.º ano, em relação à qual se procura analisar, no presente texto, o seu contributo para o desenvolvimento do sentido de número racional dos alunos, em particular, no que diz respeito ao papel do modelo da barra numérica cuja utilização foi fortemente incentivada pela professora e pelos contextos das tarefas propostas.

[1] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do *Projeto Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

Aprendizagem dos Números Racionais

O Sentido de Número Racional

O conceito de número racional é fundamental no desenvolvimento matemático dos alunos no ensino básico, sendo a sua importância visível no avolumar de estudos centrados no ensino e aprendizagem dos racionais, nas últimas décadas (Lamon, 2007). A investigação na área dos números racionais tem grande relevância no panorama da educação matemática e tem tido diversas incidências: nas operações, nos erros, nas dificuldades, nas várias representações e significados, entre outras.

A complexidade associada ao conceito de número racional decorre, principalmente: a) dos diferentes significados (medida, quociente, razão, operador e relação parte-todo), que necessitam de ser compreendidos de uma forma individual e em relação às representações que estes números podem assumir; b) da comparação de quantidades através das diferentes representações; e c) do facto de frequentemente este tema não ser desenvolvido com os alunos segundo um modelo adequado (Moss, 2005). A introdução deste conceito não é trivial quer do ponto de vista da aprendizagem quer do ensino, sendo particularmente difícil aos alunos relacionarem frações, decimais e percentagens (Sweeney & Quinn, 2000). No entanto, tanto as orientações curriculares (ME, 2007), como a vasta investigação empírica sobre os racionais (Lamon, 2007), tem mostrado não só a importância de se trabalharem em paralelo as várias representações, como também a importância de serem dadas oportunidades aos alunos para procurarem estabelecer conexões entre elas (ME, 2007). Além disso, como defende Martinie (2007), os alunos só conseguem resolver tarefas que envolvam os diversos significados dos números racionais se perceberem um conjunto de pré-requisitos, entre os quais se encontram as noções de partição[2]; *unitizing*[3]; densidade; valor de posição; equivalência e ordenação.

Segundo Lamon (2006), também é importante que os alunos aprendam a trabalhar com vários tipos de unidades. A autora identifica três tipos de grandezas: as contínuas, as discretas e as compostas (uma caixa com seis ovos pode ser interpretada como uma caixa ou como um conjunto de objetos discretos, onde cada ovo é uma unidade simples).

O desenvolvimento do sentido de número racional além de englobar a destreza com os números (McIntosh, Reys & Reys, 1992), também abarca a diversidade de significados e de representações dos racionais (Lamon 2007; Martinie, 2007). Com base no modelo de McIntosh *et al*. (1992), propõe-se um novo modelo (Quadro 1) para caracterizar o sentido de número racional, que engloba estes aspetos. Assim sendo, o desenvolvimento do sentido do número racional pressupõe que os alunos revelem: a) familiaridade com os vários significados dos números racionais; b) familiaridade com as representações destes números; c) flexibilidade em identificar e trabalhar com vários tipos de unidades, em contextos reconhecidos pelos alunos (um princípio fundamental da educação matemática realista); e d) noção de densidade e do valor de posição dos números, fatores tão importantes para a comparação e ordenação de números racionais.

[2] O conceito de partição é definido como a divisão de uma quantidade contínua em partes iguais (Martinie, 2007).

[3] Este conceito é amplo e refere-se não só à identificação da unidade como também ao conceito flexível que se tem da mesma (Martinie, 2007). Esta flexibilidade envolve a capacidade para a decompor e recompor (Baturo, 2004) e que, de acordo com Charalambous e Pitta-Pantazi (2006) permite ao aluno reconstruir o todo a partir das suas partes e rearranjar o todo (*reunitizing*) que já se encontra previamente fracionado (construir ou identificar 3/8 a partir de um conjunto fracionado em quartos, ou identificar 3/4 num conjunto que está fracionado em oitavos).

Quadro 1 – Modelo de caracterização do sentido de número racional.

Componentes	Capacidades a desenvolver
Familiaridade com os diferentes significados dos números racionais.	☆ Resolver problemas contextualizados envolvendo os diferentes significados dos números racionais (parte-todo, quociente, medida, operador e razão), em grandezas discretas e contínuas.
Flexibilidade com as diferentes representações.	☆ Reconhecer formas equivalentes de representar um número.
	☆ Estabelecer conexões entre as diferentes representações (fração, decimal e percentagem).
Flexibilidade com as unidades de referência.	☆ Trabalhar com a unidade de referência (*unitizing, reunitizing*), em grandezas discretas e contínuas.
	☆ Reconstruir a unidade de referência, em grandezas discretas e contínuas (*reversing*).
Familiaridade com a densidade dos números e o seu valor de posição.	☆ Representar números na linha numérica.
	☆ Comparar e ordenar números racionais.
	☆ Reconhecer a existência de números entre dois racionais.
Destreza com os números em situações de cálculo.	☆ Escolher números eficientes.
	☆ Utilizar vários métodos de cálculo (mental, calculadora, papel e lápis).

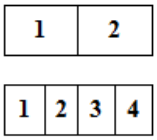
Apesar de as operações não estarem referidas neste quadro, estas constituem uma importante componente que integra o sentido de número racional, no entanto, uma vez que estas não foram contempladas pelo presente estudo, optou-se por não as incluir aqui.

Modelo da Barra

Sabendo que a compreensão dos alunos das conexões entre as várias representações dos racionais é favorecida pelo recurso a imagens ou esquemas (Behr, Harel, Post & Lesh, 1992), é importante que os conceitos matemáticos sejam, sempre que possível, introduzidos através de modelos[4]. O modelo da barra numérica é uma representação matemática que facilita a abordagem dos números racionais, podendo surgir como uma extensão de materiais que os alunos já utilizam, mas que podem ser desenvolvidos de forma a abranger situações mais complexas (Middleton, Van den Heuvel-Panhuizen & Shew, 1998). Os alunos facilmente lidam com a divisão de objetos do quotidiano e de outros modelos lineares (objetos reais), sendo que, numa fase posterior, as figuras são transformadas numa representação semelhante, por exemplo a barra numérica (Middleton *et al*., 1998), havendo uma substituição do objeto real (Quadro 2).

[4] Na Educação Matemática Realista os modelos são vistos como representações de situações problemáticas, que refletem aspetos essenciais de conceitos matemáticos e podem manifestar-se de várias formas - materiais manipulativos, desenhos, esquemas e símbolos (van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Quadro 2 – A barra como modelo de uma situação de partilha equitativa (adaptado de Middleton *et al*., 1998).

Problema	Representação	Modelo
O Nicolau e a Luana querem partilhar as suas tabletes de chocolate com os seus. A Luana partiu a sua tablete em duas partes iguais e o Nicolau em quatro partes iguais. Com quem preferias partilhar a tablete?	Objetos Reais	
	Substituição do Objeto Real	

Os alunos podem caracterizar qualquer situação de partilha na barra sendo esta facilmente dividida pelos mesmos em partes iguais que representam frações como ½ e ¼, uma vez que podem identificá-las em contextos onde compreendem intuitivamente o seu significado, tais como a partilha de certo tipo de alimentos (fruta, piza, sanduíches) (Ball, 1993).

O modelo da barra pode ser usado de forma flexível para diferentes significados de números racionais e permite estabelecer relações entre números racionais e quantidades, assim como conexões entre as suas várias representações (van Galen, Feijs, Figueiredo, Gravemeijer, Herpen & Keijer, 2008). Além de ser importante na comparação e ordenação de números racionais, uma vez que o comprimento da barra representa uma extensão da unidade (Bright, Behr, Post & Wachsmuth, 1988) e, simultaneamente, de todas as suas subdivisões, ela também pode ser reduzida a uma dupla linha numérica, através de uma alteração física (van den Heuvel-Panhuizen, 2003).

Os primeiros modelos que os alunos utilizam são geralmente representações das suas ações e são muito semelhantes às situações de contexto, isto é, são representações das suas interações com o objeto (Fosnot & Dolk, 2002), os *modelos de,* que gradualmente se transformam em modelos mais generalizados, isto é, em *modelos para* raciocinar matematicamente (Van Galen *et al*., 2008). De acordo com Gravemeijer (2005), a "mudança de um *modelo de* para um *modelo para* corresponde a uma alteração na forma de pensar do aluno, (…) [sobre a] situação do contexto modelizado para um enfoque nas relações matemáticas" (p. 95).

Experiência de ensino

Muitas abordagens recentes no campo do desenvolvimento de currículos inovadores de matemática e, também, de investigação no ensino e aprendizagem da matemática, têm tido por base a construção de trajetórias de aprendizagem (Clements & Sarama, 2004). De acordo com os autores, para que se consiga uma trajetória de aprendizagem dos alunos, é necessário implementar uma sequência de tarefas que não é fixa nem única, mas sim hipotética, pois é apenas uma hipótese a perseguir, em que a contínua transformação é fundamental.

De acordo com Kraemer (2008), a construção de uma trajetória hipotética de aprendizagem deve ter em conta três aspetos muito importantes:

> (i) determinar o que os alunos podem aprender num determinado momento, a partir do que já sabem e fazem (conteúdos matemáticos a aprender);

> (ii) selecionar e/ou criar problemas e encadeá-los uns nos outros de tal maneira que os alunos possam atingir os objetivos estabelecidos;
>
> (iii) explicitar aquilo que os alunos vão descobrir/aprender nestas condições e como o vão fazer (aspeto teórico e metodológico da planificação). (p. 5)

Partindo destas três características de trajetória hipotética de aprendizagem foi delineada uma EE, constituída por uma sequência de tarefas, no tema dos Números Racionais, que aposta no estabelecimento de conexões entre as várias representações destes números, bem como no uso de modelos, e que proporciona um trabalho em torno dos vários significados de número racional. Esta EE baseia-se na conceção de que os alunos desenvolvem a compreensão do conceito de número racional se trabalharem com tarefas de natureza exploratória, em contextos familiares propícios à utilização do modelo da barra, que envolvam: a) as várias representações dos números racionais (frações, decimais e percentagens), bem como as suas conexões – sendo-lhes dadas oportunidades de escolher que representação usam, b) os seus vários significados, e c) os diferentes tipos de grandezas.

A partir dos dados obtidos num teste inicial[5], delineou-se uma EE, onde foi criado um contexto para todas as tarefas, com alguma continuidade entre si, de forma que os alunos as interpretassem como possíveis situações reais e, desse modo, pudessem mobilizar o seu conhecimento informal na resolução das mesmas. Tendo em conta que a turma participante se encontrava no processo de experimentação do atual Programa de Matemática, pela primeira vez neste ano letivo, a planificação da sequência de tarefas procurou seguir as orientações programáticas e estabelecer alguma articulação com os objetivos da brochura de materiais de apoio ao professor (Menezes, Rodrigues, Tavares & Gomes, 2008), com as devidas adaptações.

A EE aposta numa sequência de tarefas (Quadro 3) que, para além de percorrer os diversos significados de número racional e de promover as conexões entre as várias representações dos racionais, visa desenvolver diversas capacidades como observação, confronto de resultados, discussão de estratégias e formalização de conceitos e representações matemáticas.

[5] Os resultados do teste inicial mostram que os alunos possuíam conhecimentos muito limitados no campo das frações e das percentagens, restringindo-se estes à noção de metade (também reconhecida como sendo 50%) e uma noção de fração como operador para casos muito simples, como um meio ou um quarto (este último com o sentido de "quarta parte de").

Quadro 3 – Tarefas da EE.

Tarefa	Objetivos	Significados Envolvidos
Tarefa 1 *Partilha de Chocolate*	- Identificar a metade, a quarta parte e a oitava parte de uma grandeza contínua, e representá-la na forma de fração, decimal e percentagem. - Comparar quantidades resultantes de uma situação de partilha equitativa.	Quociente Parte-todo
Tarefa 2 *Adereços Nos Bastidores*	- Identificar partes de uma grandeza discreta. - Utilizar as várias representações dos números racionais. - Reconstruir a unidade a partir das suas partes.	Operador Parte-todo
Tarefa 3 *Eventos no Cineteatro*	- Representar números racionais não negativos na barra. - Determinar uma parte da unidade.	Operador Medida
Tarefa 4 *Cenário de Espelhos*	- Resolver problemas envolvendo a representação decimal. - Localizar números racionais não negativos na reta numérica.	Medida Parte-todo
Tarefa 5 *Tarde Nas Piscinas Municipais*	- Comparar e ordenar racionais representados de várias formas. - Posicionar frações na barra numérica.	Parte-todo Operador Medida
Tarefa 6 *Lanche no Cineteatro*	- Distribuir equitativamente grandezas contínuas e discretas. - Comparar e ordenar números racionais não negativos.	Quociente
Tarefa 7 *Estacionamento no Cineteatro*	- Representar relações (parte-todo; parte-parte) sob a forma de fração, percentagem e decimal. - Localizar na barra numérica um número racional não negativo.	Parte-todo Razão
Tarefa 8 *Depósito de Gasolina*	- Identificar racionais por meio de várias representações uma relação parte-todo. - Resolver problemas envolvendo numerais mistos.	Parte-todo
Tarefa 9 *O Pintor Pedro e as Vitaminas*	- Representar relações parte-parte. - Comparar racionais não negativos.	Razão
Tarefa 10 *Coleção de Bilhetes*	- Reconstruir a unidade a partir das suas partes. - Representar relações parte-todo na dupla linha sob a forma de frações e percentagens.	Parte-todo Medida Operador
Tarefa 11 *Compras na Bit-@-byte*	- Relacionar diferentes formas de representar uma percentagem. - Calcular e usar percentagens. - Traduzir uma fração por uma percentagem.	Parte-todo Operador
Tarefa 12 *Descobrindo Comprimentos e Quantidades*	- Reconstruir a unidade a partir das suas partes. - Resolver problemas que envolvam números racionais não negativos.	Parte-todo Medida

A construção desta sequência de tarefas foi feita por etapas, tendo surgindo em grupos de quatro, após discussão com a professora da turma. Isto é, numa primeira fase foram construídas e implementadas as primeiras quatro tarefas. Enquanto os alunos iam trabalhando nestas quatro tarefas, foi-se pensando em mais quatro, e assim sucessivamente.

É de salientar que o significado de razão foi o último a ser contemplado e também aquele onde foi colocada menor ênfase, uma vez que é um objetivo essencialmente do 6.º ano de escolaridade. Por esse motivo, este significado não é contemplado no presente texto.

Numa primeira fase, as tarefas eram apresentadas pela professora e interpretadas pelos alunos, seguindo-se o trabalho desenvolvido em pequenos grupos, com posterior discussão/reflexão final no grupo turma, dinamizada pela professora, seguindo-se uma síntese com orientação da mesma. A promoção da discussão oral foi valorizada uma vez que é através

destes momentos em que os alunos partilham e confrontam as suas estratégias de resolução, explicam as suas ideias e ouvem as dos seus pares, que podem "construir um reportório de estratégias" (ME, 2007, p. 10), de forma a decidirem quais as mais apropriadas e proveitosas para a resolução de determinada tarefa. A EE decorreu durante 6 semanas. Por cada aula (1 bloco de 90 minutos) trabalhou-se, em geral, apenas uma tarefa, excetuando a tarefa 3 e 4 que foram realizadas na mesma aula. As tarefas 5, 8 e 10 foram realizadas nas aulas de Estudo Acompanhado.

Perante uma determinada tarefa, existem várias estratégias de resolução a que os alunos podem recorrer: a) o cálculo/algoritmo; b) a representação simbólica (fração, decimal e percentagens); c) a representação gráfica – por exemplo, a barra, e d) estratégias flexíveis, as quais resultam de uma combinação de duas ou mais das estratégias anteriores (Verschaffel, Luwel, Torbeyns & Dooren, 2009).

Metodologia

O *design* escolhido para esta investigação foi uma EE, realizada com uma turma do 5.º ano, no contexto da qual se recorreu à construção de um estudo de caso coletivo, uma vez que o objetivo principal é analisar o percurso de aprendizagem de um grupo de quatro alunos (Stake, 2007).

Este estudo de caso é constituído por quatro alunos (Aida, Cristiano, Dinorah, Mariana) cuja seleção teve em conta a diversidade relativamente: a) aos níveis obtidos no teste inicial aplicado a toda a turma; b) ao género; c) aos níveis obtidos no final do 1.º período (Aida – nível 5; Cristiano – nível 3; Dinorah – nível 4; Mariana – nível 4). Além disso, pretendíamos que no grupo de alunos existisse boa comunicação, partilha de ideias e que não se antevisse a existência de conflitos entre os seus elementos. A primeira autora deste texto realizou a recolha de dados e teve uma interação privilegiada com o grupo estudo de caso.

Procedeu-se à gravação vídeo do trabalho do grupo escolhido e dos momentos de interação da professora com toda a turma, da totalidade das aulas da EE. Foram também analisadas as resoluções escritas destes alunos. Estes dois métodos de recolha deram origem a dados que foram analisados qualitativamente, tendo sido também realizada uma análise quantitativa dos resultados dos dois testes aplicados à totalidade da turma (no início e no final da EE) que não é contemplada no presente texto.

Concretização da experiência de ensino

O desenvolvimento da EE iniciou-se com o apoio de materiais manipulativos (tiras de papel), uma vez que estes podem facilitar a compreensão concetual das frações e dos decimais (Sweeney & Quinn, 2000; Scaptura, Suh & Mahaffey, 2007). É neste contexto que as tiras de papel (que os alunos posteriormente interiorizam como barras numéricas) são utilizadas na primeira tarefa, que retrata uma situação de partilha equitativa de chocolates. As tarefas percorreram todos os significados dos números racionais (Quadro 3), promovendo amiúde a utilização das suas várias representações em simultâneo, e procurando que os alunos se fossem apoiando no modelo que foi inicialmente introduzido, evoluindo de um *modelo de* uma situação para um *modelo para* pensar sobre os números racionais. Neste âmbito, as

intervenções da professora[6] Inês foram fundamentais para a apropriação da barra pelos alunos. A exploração que fez da tira de papel na primeira tarefa revelou aos alunos a sua importância. A professora Inês terá mencionado que a tira (que os alunos representaram no papel como uma barra) pode servir para representar um objeto que não se tem fisicamente e assim facilitar o raciocínio. Além disso, nos momentos de trabalho em pequeno grupo, nas tarefas iniciais (1 e 2), a professora Inês, sempre que se apercebia da existência de dificuldades, sugeria que os alunos recorressem à barra.

Nesta secção descreve-se a atividade do grupo estudo de caso em três tarefas (4, 11 e 12), evidenciando-se as estratégias que adotaram e as dificuldades que enfrentaram. As tarefas aqui analisadas abrangem, no seu conjunto, diversos significados dos números racionais, permitindo perceber que o desenvolvimento de sentido de número racional é apoiado no uso do modelo da barra.

Tarefa 4 – Cenário de Espelhos

Nesta tarefa está subjacente o significado de medida contextualizado numa situação que se refere a uma montagem de um cenário do teatro, onde o fundo do palco tinha de ficar tapado com espelhos, sendo dadas as medidas do comprimento do palco e de cada espelho. Como a medida do comprimento do palco (7m) não era um múltiplo da de cada espelho (1,2m), a tarefa levava os alunos a identificarem que parte do comprimento de um espelho teria de ser cortado.

Depois de concluírem que necessitam de cinco espelhos inteiros e parte de um sexto (1m), Aida sugere que recorram à barra para encontrarem uma forma de representar a parte do sexto espelho que é utilizada (Fig. 1).

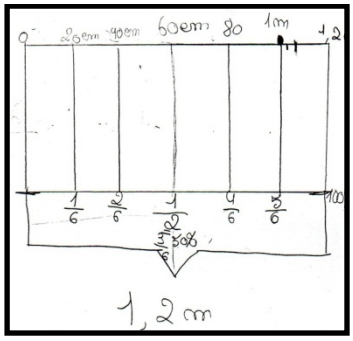


Figura 1 – Divisão do sexto espelho pelo grupo.

Os alunos desenham a barra, que dividem em seis partes iguais, e utilizam as várias representações (percentagem, decimal e fração) da mesma porção de uma unidade, na mesma barra. Além disso, utilizam a barra com bastante rigor de representação, uma vez que fazem claramente a separação entre a representação das medidas na parte superior da barra e das frações e percentagens correspondentes em baixo. É visível a flexibilidade no manuseio da barra, uma vez que os alunos aceitam a coexistência das várias representações no modelo, sem que isso os confunda.

Professora (I): Porque dividiram a barra em seis partes?

Aida: Primeiro dividimos a barra ao meio, que era 50% e 60cm!

Professora (I): Ok! No fim então era …

Cristiano: 100% e 120cm!

[6] A Professora Inês está identificada com a letra (I), a Professora-investigadora está identificada com a letra (H).

Mariana: Nós precisávamos de um metro do sexto espelho! Depois de sabermos quanto era metade do espelho, fomos ver quanto é que lhe faltava para chegar aos 100!

Professora (I): E como raciocinaram para dividir cada metade em três?

Mariana: Vimos que do 60 para chegar a 100 faltava 40! E do 100 para chegar ao 120 faltava 20! Como só queríamos 40cm, dava-nos jeito que cada bocadinho valesse 20cm!

Aida: Então ficámos com uma marca nos 100cm, que corresponde a 5/6!

Dinorah: Que é a parte do sexto espelho que se utiliza!

Como é ilustrado pelo desenho (Fig. 1) e pela explicação dada no diálogo anterior, os alunos tomaram o espelho como unidade (120cm) e foram usar uma fração ou percentagem de referência (um meio ou 50%, respetivamente) para tentar estabelecer uma relação da parte (100cm) que queriam relacionar com o todo. De seguida, ao fazerem a diferença entre 100 e 60cm e entre 120 e 100 cm, verificam que a segunda é metade da primeira e apercebem-se que a metade da barra, entre os 60 e os 120 cm, pode ser dividida em três secções iguais.Na sua totalidade, a barra pode ser dividida em seis partes iguais, correspondendo cada uma a 20cm. Estas medidas são assinaladas na parte superior da barra, às quais fazem corresponder as respetivas frações na parte inferior da barra.

Tarefa 11 – Compras na Bite-@-byte

A questão 1 desta tarefa aborda os significados de operador e de parte-todo dos números racionais, surgindo contextualizados num problema de descontos: solicitava-se aos alunos que verificassem se uma promoção de 20% sobre um artigo que custava 30€, seguida de um desconto de 40% seria equivalente a uma promoção de 60% sobre o valor inicial. Embora não fosse esperado que os alunos recorressem à barra nesta situação de desconto, usam-na, por exemplo, para ajudar um dos elementos do grupo a encarar a percentagem como um valor relativo a uma unidade.

Apesar de identificarem facilmente o valor do desconto, os alunos manifestaram algumas dificuldades em interpretá-lo, pois referiam que era esse o valor a pagar. Como estratégia para responderem à questão os alunos recorrem à barra, que dividem em cinco partes iguais e assinalam, na sua parte superior, as percentagens, às quais fazem corresponder as respetivas frações e quantia monetária.

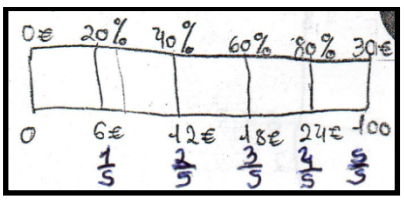


Figura 2 – Estratégia do grupo para determinar 20% de 30€.

No entanto, Cristiano comete um erro muito frequente e que é uma das causas das dificuldades que os alunos apresentam quando trabalham com percentagens:

Cristiano: Então 40% de desconto é 12€!

Professora (H): Como sabes que é 12€?

Cristiano: Está aqui na barra! (Figura 2)

Professora (H): Atenção! O desconto de 40% é sobre o valor já com o desconto de 20%!

Cristiano: Mas não é igual?

Uma vez que a percentagem está associada a uma relação, torna-se de difícil compreensão para os alunos porque tendem a compará-las sem ter em conta uma referência (Van Den Heuvel-Panhuizen, 2003). De acordo com as palavras do Cristiano, 40% representa sempre o mesmo valor. Contudo, os colegas explicam-lhe que o seu raciocínio não está correto:

Aida: Não! Um desconto de 20% é 6€, 30€ – 6€ dá 24€! E agora se o MP3 tem outro desconto, …

Mariana: Já não é com os 30€, é com os 24€ que é o novo preço!

Cristiano: Então faz-se 24€ menos 12€!

Mariana: Não podes fazer isso! 12€ é 40% de 30€! Mas nós queremos 40% de 24€!

Cristiano: E não é igual?!

Mariana: Claro que não!

Aida: Olha, vamos fazer outra barra!

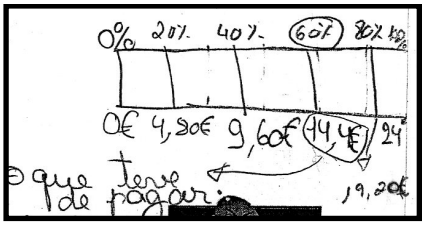


Figura 3 – Estratégia do grupo para determinar 40% de 24€.

Apesar de as colegas tentarem explicar ao Cristiano que à noção de percentagem está subjacente uma relação com a unidade, o aluno não se mostra muito convencido, pelo que Aida sugere que recorram a uma nova barra (Figura 3), que também dividem em cinco e onde associam percentagens a valores monetários. É através da leitura da nova barra que Cristiano se apercebe que estava errado.

Cristiano: Agora aqui 40% é 9,60€!

Mariana: Vês que não é a mesma coisa!

Cristiano: Pois não!

Cristiano não consegue reconhecer a grandeza relativa das percentagens, uma vez que interpreta 40% como sendo um número absoluto ao qual corresponde sempre o mesmo valor, independentemente da unidade em questão. Somente depois de recorrer à barra, por sugestão de Aida, é que ele fica convencido que de facto 40% representa números diferentes, dependendo do valor de referência presente na situação.

Mariana: Esperem lá! Aquela conta que fizeram à bocado (30€ – 6€), não era preciso fazer!

Aida: Então?!

Mariana: 100% menos 20% dá 80%! Que é o que se paga! Assim basta vermos quantos € correspondem aos 80%!

Mariana alerta os colegas para uma estratégia mais rápida e menos trabalhosa de determinarem o preço a pagar. Os alunos chegam à conclusão de que o que falta numa percentagem de desconto é a percentagem a pagar. Por isso, se a percentagem de desconto é

20%, como "*100% menos 20% dá 80%*", então 80% é a percentagem "*que se paga*". Tendo em conta esta estratégia e recorrendo à barra, onde os alunos expressaram uma correspondência entre as percentagens e os valores monetários, eles conseguem identificar de imediato o valor que se paga numa situação de desconto. Além disso, concluem de forma direta, por meio da observação das barras a que recorreram, qual a situação de desconto mais favorável.

Tarefa 12 – Descobrindo Comprimentos e Quantidades

Uma das questões desta tarefa solicitava aos alunos a reconstrução da unidade, sendo-lhes dada uma medida de um comprimento (1,6m) que correspondia a uma parte (0,8) de uma certa unidade. Os alunos do grupo recorrem à representação na linha numérica que dividem em dez partes, onde marcam o comprimento conhecido, ao qual fazem corresponder 0,8.

Aida: Fazemos uma linha e dividimos em 10 partes iguais!

Professora (I): Em dez partes? Porquê?

Aida: Porque o enunciado diz que 1,60m são oito décimos!

Professora (I): E …?

Mariana: Décimos, vem de dez!

Aida: Sim! Oito em dez!

Os alunos do grupo compreendem o decimal que lhes é facultado pelo enunciado, como a oitava parte da unidade, pois reconhecem que ele representa "*oito em dez*". Deste modo, optam por recorrer à linha e dividi-la em dez partes iguais, como estratégia para responderem à questão, começando por marcar na oitava marca o comprimento conhecido (1,60m), conforme mostra a figura 4.

Posteriormente, os alunos fazem corresponder uma décima a cada intervalo e a sua respetiva medida, que obtêm através do algoritmo da divisão:

Mariana: Fazemos 1,60 : 8!

Aida: Mas a dividir dá menos! Dá 0,2!

Mariana: Calma! Isso é quanto vale uma parte! (referindo-se a 1/8 de 1,60)

Aida: Ah! Pois é! Isto é o que vale uma décima!

Mariana: Cada espaço vale 20cm, que foi o que eu disse!

Aida: Agora quanto é que falta aqui?

Dinorah: Faltam dois bocados.

Cristiano: O comboio do Jorge mede 2m!

Os alunos do grupo identificam a unidade dividida em dez partes (*unitizing*), e determinam a medida de comprimento correspondente à fração unitária (1/8 de 1,60). Após esta fase, os alunos repetem essa medida, as vezes necessárias, neste caso duas vezes, de forma a reconstruírem a unidade, que corresponde, nesta situação, a dez partes (Figura 4).

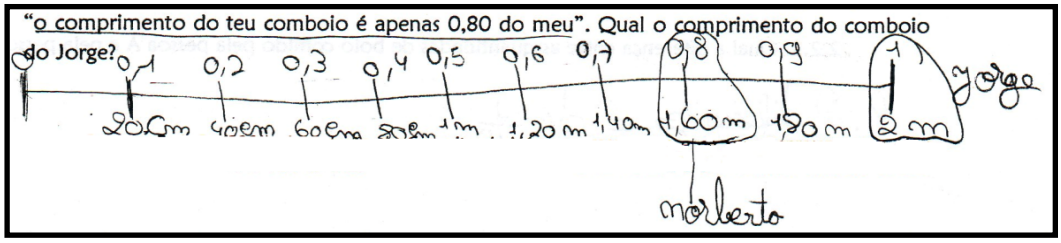


Figura 4 – Resposta do grupo à questão

Destaca-se aqui o facto de os alunos já não utilizarem a barra numérica, mas sim uma linha numérica com a indicação dos números racionais e das medidas que lhes correspondem. A primeira sofreu uma alteração física e deu lugar à segunda.

Considerações finais

No conjunto das tarefas analisadas evidencia-se a utilização da barra numérica, como um *modelo para* pensar, uma vez que os alunos a utilizam como suporte ao seu raciocínio (tarefa 4 e 11) e recorrem a ela amiúde e espontaneamente para resolver os problemas que lhe são propostos durante a EE. Esta evidência decorre do facto de nas três primeiras tarefas da EE, a barra ter sido facultada como apoio para representarem as situações expressas nos problemas. É também notória a evolução da barra para uma outra forma de representação, a linha numérica (tarefa 12).

Na tarefa quatro, embora trate de uma situação de medida e em que a forma geométrica do espelho facilmente remete para a forma da barra, o uso eficiente da mesma, permite-nos afirmar que aquela que começou como modelo de uma situação na primeira tarefa proposta (Van den Heuvel-Panhuizen, 2003), foi apropriada pelos alunos como uma ferramenta útil, evoluindo para um modelo para pensar, e através do qual fazem uso das várias representações dos números racionais.

Na tarefa onze, a barra numérica foi fundamental para resolverem um problema com números racionais, envolvendo o cálculo de percentagens. Os alunos usam a barra numérica com grande rigor de representação, uma vez que fazem claramente a separação entre a representação das medidas na parte superior da barra e das frações e percentagens correspondentes em baixo (tarefa 4 e 11). Esta utilização da barra indicia uma relativa facilidade na transição para o trabalho com outro modelo semelhante, através de uma alteração física, a linha numérica. Tal facto torna-se evidente quando na tarefa 12, perante uma questão que envolve o conceito de *reversing*, os alunos recorrem à linha numérica para resolver um problema, e já não necessitam de desenhar a barra.

A utilização das várias representações dos números racionais (frações e percentagens) na barra de forma flexível evidencia o reconhecimento da relação entre as respetivas unidades (tarefa 11 – Figura 2). Globalmente, os resultados apontam no sentido do que Van Galen *et al.* (2008) advogam como sendo o papel do raciocínio numérico a partir da barra, ou seja, o reforço da compreensão das relações entre as várias representações dos números racionais.

Após a presente análise, pode afirmar-se que os alunos deste estudo conseguem resolver com sucesso os problemas propostos, revelando familiaridade com os significados dos números racionais trabalhados. Além disso, conseguem não só representar números numa linha numérica (tarefa 12), evidenciando familiaridade com o valor de posição dos números, como também identificam a unidade (*unitizing*) – tarefa 4, 11 e 12 – e a conseguem reconstruir (*reversing*) – tarefa 12 –, demonstrando flexibilidade com as unidades de referência. Ao

compreenderem a noção de reconstrução da unidade, de acordo com Martinie (2007), os alunos do grupo possuem um dos pré-requisitos importantes que os auxiliam na compreensão dos significados dos números racionais.

Nesta situação evidencia-se que os alunos conseguem utilizar as representações de um número racional de forma flexível, optando pela representação que lhes é mais favorável (fração, decimal ou percentagem) num determinado contexto, revelando assim, uma boa compreensão destes números (NCTM, 2007). A flexibilidade com que os alunos, na tarefa 11, estabelecem conexões entre frações e percentagens, revela que aceitam frações e percentagens como formas equivalentes de representar a mesma quantidade, e flexibilidade com as diferentes representações.

Estes resultados apresentados decorrem do modo como os alunos trabalharam, em sala de aula, o conceito de número racional, suportando a ideia de que uma abordagem paralela das várias representações dos números racionais, que percorra os seus vários significados, apoiando-se fortemente no modelo da barra, é promotora do desenvolvimento do sentido do número racional. A ênfase que foi atribuída, no início da EE, ao uso de um modelo físico, assim como a escolha de contextos para as tarefas que estimulavam o uso do modelo da barra numérica, foram escolhas fundamentais para levarem os alunos a desenvolver um modelo para raciocinarem com os números racionais em várias situações.

Referências

Ball, D. L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *Elementary School Journal*, *93*, 373-397.

Baturo, A. R. (2004). Empowering Andrea to help Year 5 students construct fraction understanding. In M. J. Hoines, & A. B. Fuglestad (Eds.). *Proceedings of the 28th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics* (vol. 2, pp. 95-102). Bergen: Norway.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296-333). New York: Macmillan.

Bright, G., Behr, M., Post, T., & Wachsmuth, I. (1988). Identifying fractions on number lines. *Journal for Research in Mathematics Education, 19(3)*, 215-232.

Charalambous C. Y., & Pitta-Pantazi D. (2006). Drawing on a theoretical model to study students' understanding of fractions. *Educational Studies in Mathematics, 64(3)*, 293-316.

Clements, D. H., & Sarama, J. (2004). Learning trajectories in mathematics education. *Mathematical Thinking and Learning, 6(2)*, 81-89.

Fosnot, C., & Dolk. M. (2002). *Young mathematician at work: constructing fractions, decimals and percents*. Portswouth NH:Hiemann.

Gravemeijer, K. P. E. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Eds). *Educação Matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83-101). Lisboa: APM.

Kraemer, J. M. (2008). Desenvolvendo o sentido do número: cinco princípios para planificar. In J. Brocardo, L. Serrazina, & I. Rocha (Eds). *O sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 3-33). Lisboa: Escolar Editora.

Lamon, S. J. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (2.ª ed.). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Association.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F. K. Lester (Jr. Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age Publishing, NCTM.

Martinie, S. (2007). *Middle school of rational numbers knowledge*. Abstract of Dissertation. Kansas State University: Manhattan, Kansas.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, *12*(3), 2-8.

Menezes, L., Rodrigues, C., Tavares, F., & Gomes, H. (2008). *Números racionais não negativos: tarefas para o 5º Ano*. Lisboa: DGIDC, Ministério da Educação.

Middleton, J. A., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Shew, J. A. (1998). Using bar representations as a model for connecting concepts of rational number. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3(4)*, 302–311.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC, Ministério da Educação.

Moss, J. (2005). Pipes, tubes, and beakers: rational-number system new approaches to teaching the rational-number system. *National Academy of Sciences* (http://books.nap.edu/catalog/10126.html).

National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Curriculum focal points for prekindergarten through Grade 8 mathematics: A quest for coherence*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Scaptura, C., Suh, J., & Mahaffey, G. (2007). Materpieces to Mathematics: using art to teach fraction, decimal, and percent equivalents. *Mathematics Teaching in The Middle School,13(1)*, 24-28.

Stake, R. (2007). *A arte da investigação com estudos de caso.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Sweeney, E., & Quinn, R. J. (2000). Connecting fractions, decimals & percents. *Mathematics Teaching in The Middle School, 5(5)*, 324–328.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in Realistic Mathematics Education: an example from longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics, 54(1)*, 9-35.

Van Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., Herpen, E., & Keijer, R. (2008). *Fractions, percentages and proportions*. Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Verschaffel, L., Luwel, K., Torbeyns, J., & Van Dooren, W. (2009). Conceptualizing, investigating, and enhancing adaptive expertise in elementary mathematics education. *European Journal of Psychology of Education, 24(3)*, 335-359.

PRÁTICAS DE SELEÇÃO E CONSTRUÇÃO DE TAREFAS QUE VISAM O DESENVOLVIMENTO DO SENTIDO DE NÚMERO: O CASO DO PROFESSOR MANUEL

Catarina Delgado[1]
IPS-ESE Setúbal
catarina.delgado@ese.ips.pt

Joana Brocardo
IPS-ESE Setúbal
joana.brocardo@ese.ips.pt

Hélia Oliveira
IE-Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ul.pt

Resumo. A primeira autora deste texto desenvolveu um projeto colaborativo de desenvolvimento curricular com dois professores do 1.º Ciclo e realizou um estudo focado na caracterização das práticas destes professores. Neste texto analisam-se as práticas de um dos professores, Manuel, na seleção e construção de tarefas que visam o desenvolvimento do sentido de número dos alunos. A metodologia do estudo, de natureza qualitativa e interpretativa, segue a modalidade de estudo de caso e a recolha dos dados foi realizada através de entrevistas, observação de sessões de trabalho conjunto, observação de aulas e análise documental.

Os resultados indicam que na seleção e construção de tarefas que visam o desenvolvimento do sentido de número, Manuel valoriza a relação entre o seu contexto e os cálculos a efetuar, a possibilidade de as tarefas poderem suscitar o uso de métodos e números eficazes e de proporcionarem o uso de diversas estratégias.

Palavras-chave: Práticas do professor; tarefas numéricas; desenvolvimento do sentido de número.

Introdução

O Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), recentemente implementado em Portugal, preconiza o trabalho em torno do tema Números e Operações numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número. A abordagem tradicional a este tema, caraterizada por "dar os números" e "fazer contas" (Delgado, 2010) e por uma forte valorização da aprendizagem dos algoritmos (Brocardo, Serrazina & Kraemer, 2003), dá lugar a 'novos' propósitos de ensino relativos a este tema, nomeadamente "desenvolver nos alunos o sentido de número, a compreensão dos números e das operações e a capacidade de cálculo mental e escrito, bem como a de utilizar estes conhecimentos e capacidades para resolver problemas em contextos diversos" (ME, 2007, p. 13).

[1] Esta autora tem o apoio de uma bolsa atribuída pelo PROTEC (FRH/PROTEC/50231/2009).

Vários autores estabelecem a relação entre as caraterísticas das tarefas propostas aos alunos e a aprendizagem da Matemática. Efetivamente, na sala de aula, as tarefas transformam-se no objeto da atividade dos alunos e, em conjunto com as ações do professor, constituem a forma como a Matemática lhes é apresentada (Christiansen & Walther, 1986). Por exemplo, as tarefas que levam os alunos a pensar sobre os conceitos matemáticos e os incentivam a estabelecer conexões constituem oportunidades que suscitam um determinado tipo de pensamento, diferente das que apelam à memorização de procedimentos de uma forma rotineira (Stein & Smith, 1998). Para além do modo como os alunos aprendem a pensar matematicamente, as tarefas podem também suscitar diferentes níveis de pensamento – se pretendemos que os alunos desenvolvam a capacidade de pensar, raciocinar e de resolver problemas, é necessário propor tarefas de nível de exigência cognitiva elevado (Stein, Smith, Henningsen & Silver, 2009).

Tendo por base a participação de um professor do 1.º ciclo, nas atividades de seleção/construção de tarefas que visam o desenvolvimento do sentido de número, realizadas no âmbito de um projeto colaborativo de desenvolvimento curricular, neste texto discutem-se os aspetos que este professor valoriza e os desafios com que se depara quando se envolve neste tipo de trabalho.

A prática de seleção/construção de tarefas que visam o desenvolvimento do sentido de número (DSN)

Reconhecendo o papel fundamental que as tarefas assumem na aprendizagem dos alunos, o NCTM (1991/1994) apresenta três áreas de preocupação que devem orientar as decisões do professor na seleção/construção de tarefas: "o conteúdo matemático, os alunos e as suas formas de aprendizagem da matemática" (p. 28). Ter em conta o conteúdo matemático passa por pensar se a tarefa representa de forma apropriada os conceitos e os processos matemáticos que se pretendem desenvolver, se permite o desenvolvimento de aptidões e automatismos adequados e se o tipo de mensagem que transmite aos alunos acerca do que é fazer matemática é apropriada. Pensar nos alunos a quem a tarefa se destina, inclui considerar o que já sabem, o que precisam de trabalhar, os seus interesses e experiências anteriores. Atender a estes aspetos na escolha das tarefas, não só estimula os alunos a ir mais além em termos das suas aprendizagens, como também proporciona ao professor "a oportunidade para conhecer melhor o pensamento e a compreensão dos seus alunos" (p. 29), aspeto que, como veremos, deve fazer parte do trabalho do professor na preparação de tarefas. Por fim, o professor deve ter em conta formas de aprendizagem da Matemática, na medida em que, o tipo de raciocínio requerido pela tarefa e o modo como esta conduz os alunos na exploração dos conteúdos, influencia as suas oportunidades de aprendizagem (NCTM, 1991/1994).

Esta última recomendação liga-se diretamente ao tipo de tarefas que o professor seleciona/constrói (investigações, problemas, explorações e exercícios), sendo importante conseguir uma espécie de equilíbrio na diversidade destas propostas por constituírem diferentes oportunidades para os alunos pensarem (Stein & Smith, 1998; Ponte, 2005) e por contribuírem para atingir determinados objetivos curriculares (Brocardo, 2001; Ponte, 2005). Por exemplo, os exercícios e os problemas, que são tarefas que apresentam uma natureza mais fechada, exigem que os alunos relacionem os dados e os resultados, contribuindo para o desenvolvimento de aspetos importantes do raciocínio matemático. Já as tarefas de natureza aberta, como as explorações e investigações, são fundamentais para o desenvolvimento da sua autonomia e da sua capacidade para darem resposta a situações complexas (Ponte, 2005). As tarefas com um elevado grau de desafio, nas quais se incluem as investigações e os problemas, proporcionam aos alunos uma efetiva experiência matemática e as tarefas com um grau de

desafio mais baixo, como os exercícios e explorações, possibilitam aos alunos experimentar situações com um grau de sucesso considerável, o que lhes permite desenvolver a sua autoconfiança relativa à Matemática (Ponte, 2005).

Outros autores salientam a importância do professor ter como base a análise do nível de exigência cognitiva das tarefas matemáticas quando as seleciona/constrói (Boston & Smith, 2009; Stein *et al*., 2009). O principal argumento destes autores relaciona-se com o papel que atribuem ao professor no momento da escolha das tarefas – o de facilitar a compreensão conceptual dos alunos. É importante que nesta escolha o professor atenda às idades dos alunos, aos níveis de aprendizagem em que se encontram, aos seus conhecimentos e às suas experiências anteriores. Por exemplo, uma mesma tarefa poderá ser considerada rotineira e de nível de exigência mais baixo para alguns alunos, enquanto para outros poderá constituir uma tarefa de nível de exigência mais elevado (Stein *et al*., 2009).

Relacionado de uma forma transversal com as três áreas de preocupação assinaladas pelo NCTM (1991/1994), surge a escolha dos contextos das tarefas, cuja importância tem sido salientada por diversos autores que se debruçam sobre o seu impacto na aprendizagem dos alunos. Seguindo as ideias preconizadas por Freudenthal (1968), que defende que a aprendizagem da Matemática deve, sobretudo, constituir um processo de matematização da realidade, Fosnot, Dolk, Zolkower, Hersch e Seignoret (2006) consideram que ao selecionar/construir tarefas, o professor deve escolher contextos associados a situações que permitam ser matematizadas pelos alunos. Ou seja, devem proporcionar aos alunos desenvolver atividades de interpretação, organização e construção de significados das situações, modelando-as matematicamente.

Para além de permitir o uso de modelos, é importante que as situações associadas aos contextos façam sentido para os alunos, sejam elas reais ou imaginárias (Fosnot & Dolk 2001). Só compreendendo o contexto da tarefa e atribuindo-lhe sentido, é que os alunos conseguem 'agir' sobre esse contexto, analisar a razoabilidade das suas ações e dos resultados. Por fim, os contextos das tarefas devem criar surpresa aos alunos, motivá-los para a sua exploração e suscitar a formulação de questões do tipo: *Porque é que isto acontece? E o que acontece se…?* (Fosnot & Dolk, 2001).

Ao enunciar o Princípio do Ensino, o NCTM (2000/2007) enfatiza a escolha adequada de tarefas como forma de despertar a curiosidade dos alunos e de os envolver na Matemática, salientando a importância da diversificação dos contextos. Na sua perspetiva as "tarefas poderão relacionar-se com experiências da realidade dos alunos, ou poderão surgir em contextos puramente matemáticos" (p. 19). Também Ponte (2005) chama a atenção para a importância de o professor atender a uma certa diversificação dos contextos das tarefas, tendo em conta o seu grau de proximidade com a realidade. Por exemplo, a realização de tarefas formuladas em contextos matemáticos (investigações, problemas, explorações) podem constituir um desafio para os alunos e ajudá-los a "perceber como se desenvolve a actividade matemática dos matemáticos profissionais" (p. 26).

Um outro aspeto considerado fundamental na seleção/construção de tarefas é compreender como os alunos pensam, sendo necessário que o professor se coloque no lugar do aluno e tente antecipar formas de resolução das tarefas ou das questões que as compõem (Simon, 1995). Esta ideia, para além de ser veiculada por documentos de referência sobre o ensino da Matemática como os Princípios e Normas para a matemática escolar (NCTM, 2000/2007), tem constituído a base de alguns projetos de investigação que valorizam as práticas de seleção/construção e condução de tarefas, como foi o caso do projeto Desenvolvendo o Sentido do Número (Equipa do projeto DSN, 2006), realizado recentemente em Portugal. Quando os professores têm em conta o pensamento matemático dos alunos, demonstram mais tendência em centrar neles o ensino, desenvolvem uma maior compreensão acerca

deles, evidenciam uma atitude positiva face à Matemática e mostram mais aptidão para selecionar/construir tarefas matemáticas (Chamberlin, 2005). Para além destes aspetos, mostram-se mais capacitados para colocar questões apropriadas na exploração das tarefas na aula (Sowder, 2007).

Todas as ideias até agora referidas neste texto relacionam-se com aspetos gerais que devem ser tidos em conta pelo professor na sua prática de seleção/construção de tarefas que visam a aprendizagem da Matemática. Em particular, quando pensamos no sentido de número dos alunos, importa compreender que preocupações específicas deve ter o professor quando seleciona/constrói tarefas que visem o seu desenvolvimento. Ora, selecionar/construir tarefas com este objetivo tem de estar articulado com o entendimento do que significa sentido de número. Neste estudo adota-se a perspetiva global de McIntosh, Reys e Reys (1992) que considera que:

> O sentido de número refere-se a uma compreensão geral do indivíduo sobre os números e as operações juntamente com a capacidade e predisposição para usar essa compreensão de modo flexível para fazer juízos matemáticos e para desenvolver estratégias úteis na manipulação dos números e das operações. Reflete uma capacidade e uma predisposição para usar os números e os métodos de cálculo como um meio de comunicação, processamento e tratamento de informação. (p. 3)

Esta conceção geral é concretizada por estes autores num quadro de referência que diferencia três áreas: conhecimento e destreza com os números, conhecimento e destreza com as operações e aplicação do conhecimento e destreza com os números e as operações em situações de cálculo. Cada uma destas áreas subdivide-se em componentes específicas.

Tendo em conta que este estudo se foca no trabalho do professor optou-se por considerar a reorganização das categorias de McIntosh *et al*. (1992) proposta por Mendes (2012) (ver quadro 1), uma vez que esta parte da categoria relacionada com a aplicação do conhecimento e destreza com os números e as operações em situações de cálculo, aspeto que se relaciona diretamente com o trabalho de seleção/construção de tarefas. De facto, ao pensar numa tarefa, o professor está centrado na aplicação de conhecimento e de destrezas dos alunos a partir do modo como estes compreendem os números e as operações. A tarefa é, em primeiro lugar, um meio de aplicação de conhecimentos e de destrezas e, por isso, a categoria de partida para o trabalho do professor é a que se relaciona globalmente com a terceira grande categoria considerada por aqueles autores.

Na compreensão para relacionar o contexto de um problema e os cálculos necessários integram-se todas as práticas de seleção/construção de tarefas em que o professor foca a articulação entre o contexto da tarefa e os cálculos a efetuar. Tem por isso presente as potencialidades do contexto para promover um determinado tipo de pensamento e/ou operação que quer desenvolver e a necessidade de poder optar, ou não, por um cálculo aproximado ou exato. Todas estas opções são operacionalizadas a partir do conhecimento que o professor espera que os alunos tenham relativamente ao sentido da ordenação dos números, múltiplas representações dos números, sentido da grandeza absoluta e relativa dos números e sistemas de valores de referência.

Na consciencialização da existência de múltiplas estratégias integram-se todas as práticas do professor que incidem na identificação das estratégias que os alunos podem usar. Ao selecionar/construir tarefas o professor pode prever que os alunos sejam capazes de inventar estratégias, usar várias estratégias diferentes e como incentivar os alunos a analisar a eficácia dessas estratégia. Subjacente a esta análise das tarefas do ponto de vista das estratégias que os alunos podem vir a usar, o professor considera o domínio que os alunos têm do sentido da ordenação dos números, das múltiplas representações dos números, do sentido da grandeza

absoluta e relativa dos números, dos sistemas de valores de referência e a compreensão do efeito das operações, das suas propriedades e das relações entre as operações.

Quadro 1 – Quadro de referência para examinar o sentido de número reajustado de McIntosh *et al*. (1992), proposto por Mendes (2012).

Aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações em situações de cálculo	Compreensão para relacionar o contexto de um problema e os cálculos necessários	Reconhecer dados como exatos e aproximados Noção que as soluções podem ser exatas ou aproximadas	Sentido da ordenação dos números Múltiplas representações dos números Sentido da grandeza absoluta e relativa dos números Sistemas de valores de referência
	Consciencialização da existência de múltiplas estratégias	Capacidade de inventar estratégias Capacidade de aplicar estratégias diferentes Capacidade de selecionar uma estratégia eficaz	Sentido da ordenação dos números Múltiplas representações dos números Sentido da grandeza absoluta e relativa dos números Sistemas de valores de referência Compreensão do efeito das operações Compreensão das propriedades das operações Compreensão das relações entre as operações
	Inclinação para usar uma representação e/ou um método eficaz	Facilidade com vários métodos Facilidade em escolher números eficazes	Sentido da ordenação dos números Múltiplas representações dos números Sentido da grandeza absoluta e relativa dos números Sistemas de valores de referência Compreensão do efeito das operações Compreensão das propriedades das operações Compreensão da relação entre as operações
	Inclinação para rever os dados e a razoabilidade do resultado	Reconhecer a razoabilidade dos dados Reconhecer a razoabilidade do resultado	Sentido da ordenação dos números Múltiplas representações dos números Sentido da grandeza absoluta e relativa dos números Sistemas de valores de referência Compreender o efeito das operações

Na construção/seleção de tarefas o professor considera a inclinação para usar uma representação e/ou um método eficaz tendo em conta o conhecimento que tem dos alunos ao nível do uso de vários métodos (mentais, calculadora e papel e lápis) e a facilidade em escolher números eficazes. Nesta análise tem igualmente em conta os alunos, pensando no seu sentido da ordenação dos números, nas múltiplas representações dos números que conhecem, no sentido que têm da grandeza absoluta e relativa dos números, dos sistemas de valores de referência que possuem e na sua compreensão do efeito das operações, das suas propriedades e das relações entre elas.

A inclinação para rever os dados e a razoabilidade do resultado, embora sendo um aspeto importante e podendo estar presente quando o professor seleciona/constrói tarefas, tem uma expressão mais significativa na fase de exploração das tarefas na aula, pelo que não será aqui considerada.

Metodologia

Contexto do estudo. Este estudo decorre no âmbito do trabalho realizado num projeto colaborativo, cuja equipa foi constituída por dois professores do 1.º ciclo que lecionavam o 3.º ano de escolaridade e pela primeira autora deste texto. O objetivo deste projeto é aprofundar modos de promover o DSN nos alunos através da seleção/construção de tarefas que tenham por base esse propósito e da reflexão sobre a sua exploração na sala de aula. Ao criar um contexto de trabalho que envolva os professores na seleção/construção de tarefas e na problematização das suas práticas de condução dessas tarefas, este projeto assume-se simultaneamente, como um projeto de investigação sobre a prática profissional e de

desenvolvimento curricular. A sua conceção inspira-se no ciclo de ensino de Simon (1995) que se baseia em duas ideias fundamentais no que respeita ao trabalho do professor: (i) a constante ligação entre a planificação das aulas e a avaliação das aprendizagens dos alunos e (ii) a articulação entre as tarefas.

A opção pelo desenvolvimento de um projeto colaborativo prende-se com o reconhecimento das vantagens deste tipo de contexto para este estudo, na medida em que pode contribuir para uma reflexão mais aprofundada sobre ideias ou acontecimentos, para o acréscimo de segurança em mudar ou inovar e para o aumento das possibilidades de aprendizagem de cada um dos elementos que nela participam (Boavida & Ponte, 2002).

Opções metodológicas. Ao pretender-se caracterizar as práticas do professor quando seleciona/constrói tarefas que visam o DSN dos alunos, considerou-se importante observar as suas ações quando se envolve neste tipo de trabalho e perceber o modo como ele próprio interpreta essas ações ao refletir sobre elas. Assim, esta investigação enquadra-se num paradigma interpretativo, seguindo uma abordagem qualitativa (Erickson, 1986; Patton, 2002). A seguinte opção recaiu na realização de estudos de caso como modalidade de investigação, sendo um dos dois casos realizados no estudo focado neste texto.

A recolha dos dados teve a duração de cerca de um ano e incluiu a observação das sessões de trabalho conjunto, onde um dos objetivos era a seleção/construção de tarefas, e a observação das aulas, onde os professores exploraram essas tarefas. Foram também realizadas duas entrevistas semiestruturadas (uma no início do projeto e outra no final) e recolhidos documentos de natureza diversa (produções dos alunos, manual escolar adotado e outros materiais utilizados pelos professores nas aulas e na sua preparação).

A seleção/construção de tarefas durante o projeto

A seleção/construção de tarefas durante o projeto integra-se num processo de construção de sequências de tarefas, tendo sido concebidas sete sequências que agrupam 30 tarefas. Após a escolha dos tópicos a serem trabalhados com os alunos e a identificação dos objetivos da sequência de tarefas, a equipa (a investigadora e os dois professores) procurava tarefas em diversos materiais didáticos e/ou partilhava ideias sobre eventuais tarefas a construir. Tendo em conta os tópicos e os objetivos definidos, os alunos a que se destinam e as particularidades do trabalho já realizado, a equipa envolvia-se na conceção das tarefas e na preparação da sua exploração que incluía a antecipação dos possíveis caminhos a seguir por eles, os materiais necessários e a discussão sobre o modo como iria ser explorada. Estes aspetos da preparação da tarefa iam também surgindo ao longo da sua conceção, no entanto, a equipa quase sempre sentiu a necessidade de os completar e/ou recordar na sessão anterior à aula em que iria ser realizada pelos alunos.

Manuel

Quando iniciámos o projeto colaborativo Manuel tinha 35 anos, tendo terminado o curso de Licenciatura de professores do Ensino Básico na Variante de Matemática e Ciências, na Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal, em 1997. Antes de aceitar participar neste projeto, coloca várias questões que lhe permitem avaliar a disponibilidade necessária, a capacidade de resposta às exigências do trabalho previsto e o grau de liberdade que terá nas decisões relativamente às tarefas que irá propor aos seus alunos. Destaca como principais motivos que o levaram a participar neste projeto a vontade de melhor compreender o novo

Programa de Matemática do Ensino Básico e a possibilidade de problematizar a sua prática de sala de aula. Durante a sua realização, envolve-se com empenho e interesse nas atividades da equipa, dando sugestões, questionando e tentando ultrapassar os desafios com que se vai deparando. Assim, traçar um breve retrato de Manuel enquanto professor e elemento da equipa deste projeto leva a salientar três características: interesse em aprender, empenho nas atividades em que se envolve e sentido de responsabilidade nas opções que toma.

A seleção/construção do contexto tendo em conta os cálculos a efetuar. Numa fase ainda muito inicial do desenvolvimento do projeto, Manuel revela sensibilidade para relacionar o contexto das tarefas e o pensamento e/ou operação que poderão suscitar nos alunos, aspeto que se reflete no modo como as analisa. Por exemplo, no âmbito de uma discussão da equipa acerca do que poderão constituir tarefas que permitem desenvolver estratégias de cálculo mental, Manuel mostra distinguir as que têm este objetivo das que simplesmente conduzem ao uso de cálculos, afirmando que são tarefas em que "estamos a dar ferramentas aos alunos para eles desenvolverem e poderem aplicar [o cálculo mental]" (S2, p.4). A tarefa que seleciona e que considera adequada para este fim (fig. 1), encontra-se muito próxima das ideias subjacentes à proposta de cadeias numéricas, que só mais tarde viriam a ser introduzidas e discutidas na equipa. Ao justificar a sua escolha, refere-se às características do contexto, nomeadamente ao modo como este se articula com o tipo de cálculos a efetuar pelos alunos, afirmando que "Partindo desta situação, eles percebem que então para 8 é só subtrair 2, para 98 é a mesma coisa vou subtrair no final 2..." (S2, p. 4). Mostra também reconhecer a importância de permitir o recurso a sistemas de valores de referência numa situação de cálculo quando acrescenta "Porque é mais fácil eles trabalharem com o 10, com o 100 e com o 1000" (S2, p. 4).

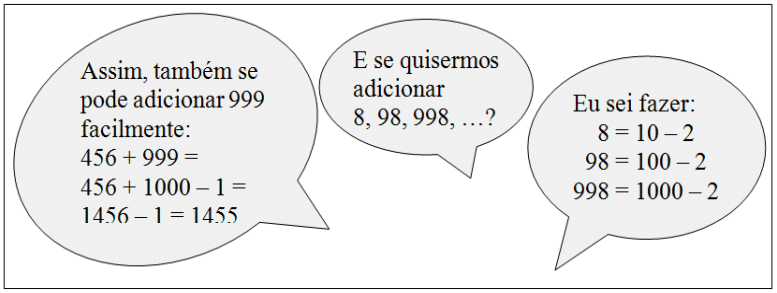


Figura 1 – Situação que segundo de Manuel permite o desenvolvimento de estratégias de cálculo mental[2].

No final do projeto, ao tentar caraterizar o que constitui uma 'boa tarefa' que vise o DSN dos alunos, Manuel apresenta como um dos exemplos a tarefa 'O homem mais alto do mundo', cujo contexto conduz à comparação entre dois números representados na sua representação decimal. Referindo-se a esta tarefa, salienta o seu contexto, as relações que os alunos conseguiram estabelecer entre as medidas de comprimento e o facto de estes terem acabado por compreender qual era o "homem mais alto", tendo em conta a particularidade dos números envolvidos.

> [os alunos] construíram e estiveram diretamente envolvidos na construção do conhecimento, das medidas de comprimentos. (…) foram construindo passo-a-passo as relações entre o metro, entre o centímetro, entre o decímetro (…) Isto tudo partindo de uma situação problemática! (…) e, depois, no final, então, resolverem o dito enigma. Perceberem quem era o homem mais alto e… um tinha 3 algarismos à direita, o outro tinha só 2… (…) foi realmente uma tarefa muito, muito interessante! (E2, p. 9 e 10)

[2] Retirado de Landeiro, A., Gonçalves, H. & Pereira, A. (2010). A Grande Aventura – Matemática 3.º ano (manual escolar), p. 50. Lisboa: Texto Editores Lda.

A perceção de Manuel acerca da relação entre o contexto das tarefas e o pensamento/cálculos a efetuar pelos alunos, parece contribuir para uma valorização deste aspeto quando seleciona/constrói tarefas e quando após a sua exploração reflete sobre as suas potencialidade no DSN dos alunos. Contudo, esta perceção leva-o também a simplificar alguns contextos, propondo que se diminua a grandeza dos números envolvidos ou que não se alargue esse universo. Por exemplo, na reflexão sobre a exploração de um problema que envolvia o número 192 e em que se pretendia que os alunos determinassem o número de grupos com 6 elementos, perante as dificuldades manifestadas, Manuel afirma "Acho que fazemos mais uma tarefa destas e não passar muito deste número [aponta para o 192]. O facto de ser um número muito grande… eles andam ali um pouco por tentativa erro. (…) Acho que devíamos continuar aqui dentro deste universo" (S23, p. 6).

A simplificação dos contextos das tarefas através de uma diminuição/repetição da grandeza dos números envolvidos liga-se ao receio de desmotivação dos alunos. Na seleção/preparação das tarefas Manuel mostra preocupação com o 'excesso' de dificuldades que os alunos poderiam vir a manifestar na sua realização, por poder vir a provocar desmotivação e falta de envolvimento na tarefa.

O valor atribuído ao uso de representações e/ou métodos eficazes de cálculo. Ao longo do projeto, a ideia de valorizar o uso de representações e/ou métodos eficazes de cálculo foi sendo reforçada pelo trabalho que a equipa de trabalho colaborativo foi desenvolvendo. Nomeadamente, quando o grupo se debruçava sobre o modo como os alunos poderiam resolver determinada tarefa ou a tinham resolvido, tentando elencar os possíveis caminhos que poderiam seguir ou analisar os que tinham seguido. Por exemplo, na construção da tarefa "Quantas bolas de Natal?" Manuel salienta a importância da disposição das latas para fazer surgir a propriedade distributiva, afirmando que: "O facto de eles [os alunos] não conhecerem a tabuada do 7 vão ter de o desmontar para utilizar os produtos que já sabem. (…) e desenvolvem a propriedade distributiva" (S12, p. 1). Também ao analisar as produções de um par de alunos na resolução desta tarefa (fig. 3), Manuel, não só revela compreender a estratégia utilizada por eles, como também, mostra sensibilidade relativamente às suas possíveis intenções:

> Neste caso eles não sabiam quanto era 7x7 e a partir daí eles tentaram arranjar uma estratégia para chegar lá (…) É engraçado, aqui, como não sabiam, recorreram à decomposição e recorreram à imagem. (S13, p.2)

Manuel refere que é usada a decomposição do número 7 sugerida pela disposição das latas na imagem. Embora não o refira explicitamente neste momento, Manuel parece reforçar o valor que atribui a esta tarefa por proporcionar o uso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e por sugerir o uso de produtos já conhecidos para efetuarem os cálculos.

Consciencialização da existência de vários possíveis caminhos a seguir na resolução das tarefas. Um dos aspetos que Manuel valoriza nas tarefas é a possibilidade de fazerem surgir várias estratégias. Por exemplo, na resolução da questão 1 da tarefa "Vamos colocar azulejos", em que se pedia aos alunos para determinarem o número de azulejos colocados na parede (fig. 4), surgiram diversas estratégias, como mostram os exemplos das produções dos alunos (fig. 5).

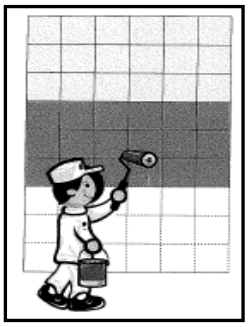


Figura 4 – Imagem da tarefa "Vamos colocar azulejos".

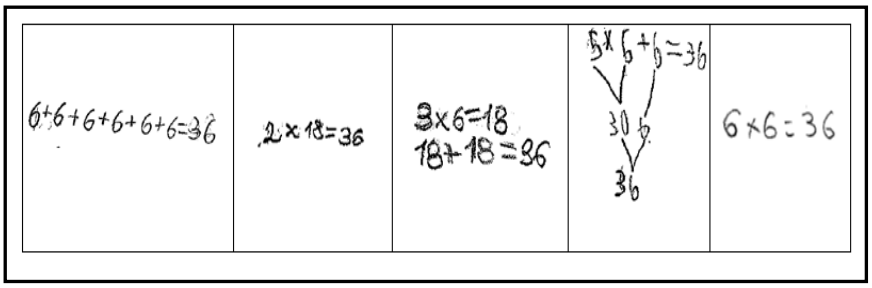


Figura 5 – Diferentes estratégias usadas pelos alunos na tarefa "Vamos colocar azulejos".

Ao analisar as produções dos alunos, Manuel refere o recurso à operação adição e salienta a relação que alguns alunos conseguiram estabelecer com a multiplicação, parecendo reconhecer o recurso a esta operação como uma estratégia mais eficaz na resolução da tarefa. Este aspeto é valorizado por Manuel dado que lhe atribui precisamente esse objetivo:

> Sendo o objetivo da tarefa que eles utilizassem diferentes estratégias de cálculo associadas à multiplicação. Eu penso que de uma forma geral, eles utilizaram diferentes estratégias. Uns começaram pela adição e rapidamente transformaram na multiplicação. (S10, p.4)

Quando no final do projeto se refere às características do que será uma boa tarefa para desenvolver o sentido de número, Manuel relembra esta tarefa, reforçando o valor que lhe atribui por ter suscitado o uso de diferentes estratégias: "(…) foi uma tarefa muito interessante para eles. Eles utilizaram diferentes estratégias de cálculo, isso foi muito importante" (E2, p. 9).

Em algumas situações, ao pensar nos vários caminhos a seguir pelos alunos na resolução das tarefas ou ao observar os que efetivamente seguiram, Manuel revela alguma tensão resultante da tendência dos seus alunos usarem o algoritmo da multiplicação já aprendido no ano letivo anterior. Por exemplo, ao analisar os procedimentos representados na figura 3, termina dizendo: "Mas não deixam de tentar usar o algoritmo!" (S13, p.2). Esta constatação mantém-se durante grande parte do desenvolvimento do projeto e Manuel vai revelando os motivos que estão na base do seu uso frequente, afirmando que:

> (…) vai ser difícil, de um momento para o outro (…) utilizarem outro tipo de estratégias. No entanto, eu também não posso dizer: "Não utilizem o algoritmo!". Porque foi, durante muito tempo, a estratégia que eles sempre utilizaram, é aquela com que se sentem mais à vontade e, portanto, fazem mais facilmente o cálculo utilizando o algoritmo. (S19, p. 1)

Manuel parece assim manter algum receio de, mesmo propondo tarefas que suscitem a invenção e aplicação de diferentes estratégias de cálculo, os seus alunos recorram ao algoritmo - estratégia que usam com alguma eficácia.

Reflexão final

Ao selecionar/construir tarefas, Manuel foi revelando perspetivas sobre as características das tarefas que considera importantes no desenvolvimento do sentido de número dos alunos. Apesar de esta expressão estar omissa no seu discurso, quando se envolve na análise das tarefas sobressaem aspetos que valoriza e que se relacionam com elementos que, no

entendimento de McIntosh *et al*. (1992) e de Mendes (2012), caracterizam o sentido de número.

Efetivamente, Manuel mostra reconhecer a relação entre o contexto da tarefa e os cálculos que os alunos poderão efetuar. Esta sensibilidade traduz-se na importância que atribui à utilização de números de referência e à perceção que revela quanto ao efeito da grandeza dos números envolvidos e da própria situação associada ao contexto no pensamento dos alunos. O receio de os seus alunos manifestarem dificuldades na resolução das tarefas, leva-o a propor uma simplificação dos contextos, tanto no que se refere à grandeza dos números envolvidos, como da situação em si.

Ao longo do desenvolvimento do projeto Manuel foi revelando uma crescente sensibilidade para valorizar nas tarefas a possibilidade destas contribuírem para o uso de uma representação e/ou um método eficaz. Salienta-se o valor que Manuel atribui à possibilidade das tarefas conduzirem os alunos ao uso de propriedades das operações, destacando a importância do modo como os objectos se encontram organizados, nas imagens que integram as tarefas.

Por fim, Manuel revela valorizar tarefas que suscitem o uso de diversas estratégias por parte dos alunos. Esta perspetiva é diferente da sua experiência anterior de ensino da Matemática, focada nos algoritmos. A tendência que observa nos seus alunos de recorrerem aos algoritmos para efetuarem os cálculos, fruto das suas experiências anteriores, parece ser um elemento de tensão para Manuel pois considera que os inibe de tentarem inventar e aplicar estratégias diferentes.

Os aspetos valorizados e os desafios manifestados por Manuel relativos às tarefas que foram selecionadas/construídas no âmbito do projeto, eram mais facilmente verbalizados no momento em que a equipa refletia sobre os efeitos da tarefa na aprendizagem dos alunos. A análise das suas produções parece ter-se mostrado fundamental para que Manuel desenvolvesse, não só uma maior sensibilidade acerca do modo como os alunos pensam, como também, para relacionar essas produções com as características das tarefas.

Referências

Delgado, C. (2009). Os números e as operações no novo Programa de Matemática do Ensino Básico. *Educação e Matemática, 105,*17-21.

Boavida, A. M., & Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Ed.), *Reflectir e Investigar sobre a Prática Profissional* (pp. 43-55). Lisboa: APM e GTI.

Boston, M. D., & Smith, M. S. (2009). Transforming secondary mathematics teaching: Increasing the cognitive demands of instructional tasks used in teachers' classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(2), 119 – 156.

Brocardo, J. (2001). *As Investigações na Aula de Matemática: Um Projecto Curricular no 8º Ano* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa). Colecção Teses. Lisboa: APM.

Brocardo, J., Serrazina, L., & Kraemer, J. (2003). Algoritmos e sentido do número. *Educação e Matemática , 75*, 11-15.

Chamberlin, M. T. (2005). Teachers' discussions of students' thinking: meeting the challenge of attending to students' thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education , 8* (3), 141-170.

Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.

Equipa do projecto DSN. (2006). *Desenvolvendo o Sentido do Número: Perspectivas e Exigências Curriculares. Materiais para Professores e Educadores.* Lisboa: APM.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock, *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). Nova Iorque: MacMillan.

Fosnot, C., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: constructing multiplication and division.* Portsmouth, The Netterlands: Heinemann.

Fosnot, C. T., Dolk, M., Zolkower, B., Hersch, S., & Seignoret, H. (2006). *Mathematics in the City: Measuring Teacher Change in Facilitating Mathematizing*. Obtido em 15 de Outubro de 2010, de http://www.curriculum.org/LNS/coaching/files/pdf/Mathematics_City.pdf

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics , 12(3)*, 2-8 & 44.

Mendes, M. F. (2012). *A aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento de sentido de número: Um estudo com alunos do 1.º ciclo* (Tese de Doutoramento, em preparação).

Ministério da Educação. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Obtido em 6 de outubro de 2009, de http://www.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf

NCTM. (1991/1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática.* Lisboa: APM e IIE. (Documento original em Inglês, publicado em 1991).

NCTM. (2000/2007). *Princípios e normas para a matemática escolar.* Lisboa: APM. (Documento original em Inglês, publicado em 2000).

Patton, M. Q. (2002). *Qualitative research & evaluation methods.* California: Sage Publications, Lda.

Ponte, J. P. (2005). Gestão Curricular em matemática. In GTI (Ed), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education* , 26, 114-145.

Sowder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (Vol. I, pp. 157-223). Charlotte: Information Age Publishing.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3(4)*, 268-275.

Stein, M. k., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2009). *Implementing standards – based mathematics instruction: A casebook for professional development.* New York: Teachers College.

A MEDIAÇÃO DO PROFESSOR E A EXPLORAÇÃO DE UMA ATIVIDADE DE MODELAÇÃO MATEMÁTICA NO ENSINO DA ÁLGEBRA LINEAR

Ricardo Gonçalves
Instituto Politécnico do Cávado e do Ave
rgoncalves@ipca.pt

Cecília Costa[1]
Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro
CIDMA - Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações da Universidade de Aveiro
mcosta@utad.pt

Resumo: Mais recentemente, o interesse da investigação no campo da didática da álgebra linear tem incidido sobre a perspetiva do ensino. Com base em duas sugestões de possíveis sequências de ensino para integrar nas aulas de álgebra linear, enquadradas teoricamente na teoria de educação matemática de modelos e modelação, propõe-se um olhar sobre a integração de uma atividade de modelação em aulas de álgebra linear, mais concretamente como elemento veiculador da introdução do método de eliminação de Gauss e da aproximação à resolução de problemas envolvendo a resolução de sistemas de equações lineares. Adotando como metodologia de análise as narrações multimodais, são apresentados dois ciclos de trabalho, dos quais emerge o papel de mediação do professor, procurando-se dimensionar novos ambientes de ensino com base no recurso a atividades desta natureza.

Palavras-chave: Álgebra linear, educação matemática, modelação, sistemas de equações lineares, mediação.

Introdução

Uma chamada de atenção sobre o problema do ensino e aprendizagem da álgebra linear aparece em Carlson (1993), usando-se a metáfora do nevoeiro, atendendo às dificuldades persistentemente observadas nos alunos. O interesse de investigação canalizou-se para este campo e daí resultou a identificação de algumas dessas dificuldades. Segundo Dorier (1998), as dificuldades sentidas pelos alunos emergem do formalismo subjacente à álgebra linear, tal como da grande quantidade de novas definições e do afastamento dos novos conceitos com o conhecimento anterior dos alunos. Outro constrangimento à aprendizagem deriva das diferentes linguagens e múltiplas representações dos conceitos de álgebra linear (Dorier, 2000).

O foco inicial da investigação sobre a aprendizagem da álgebra linear tem dado lugar, mais recentemente, à atenção sobre a perspetiva do ensino. Numa dimensão, este pressuposto é concomitante com a observação de Niss (1999), onde as preocupações e os avanços na investigação em didática da matemática, num nível superior, aparecem para contrariar o pressuposto de *"o problema"* não se centrar no professor, mas inteiramente no aluno. E ainda, dos sucessos e fracassos da inteira responsabilidade do aluno evoluiu-se, nas últimas décadas,

[1] Membro colaborador do CM-UTAD.

para a repartição com as responsabilidades do professor em todo o processo de ensino e aprendizagem. Noutra dimensão, Dubinsky (1997) aponta uma direção para a investigação em didática da álgebra linear: da análise epistemológica das dificuldades dos alunos, deve-se passar à investigação sobre as construções mentais adstritas à compreensão dos conceitos, com o fim de se estabelecerem hipotéticos desenhos de ensino.

Quadro teórico

Investigações anteriores sugerem que se usem situações problemáticas em sala de aula, para além de exercícios. Os alunos tendem a limitar as leituras a exemplos e exercícios, mas, em vez de se ignorar ou combater esta realidade, deve-se, segundo Sierpinska (2000), atender ao conhecimento prático que estes facilmente alcançam como ponto de partida para a conceptualização de conceitos. Sierpinska (2000) lança ainda o repto para uma álgebra linear segundo aplicações, onde os conceitos não serão introduzidos explicitamente segundo definições, mas implicitamente como ferramentas para a resolução de situações problemáticas, em contextos diversos.

A possibilidade do ensino de conceitos matemáticos em cursos do ensino superior, baseados no uso de modelos e de modelação matemática de situações concretas, foi o problema de investigação considerado em (Possani, Trigueros, Preciado & Lozano, 2010) e (Trigueros & Possani, 2011). Estes autores pretendiam dar um contributo para a possibilidade de se introduzirem conceitos de álgebra linear segundo o uso de situações de modelação matemática, para a possibilidade de se delinearem estratégias de ensino baseadas em teorias de educação matemática que sustentem a aprendizagem de conceitos de álgebra linear e sobre as manifestações de aprendizagem que se podem relacionar com a adoção de tais estratégias de ensino.

Em (Possani *et al*, 2010) delineou-se uma sequência de ensino, em torno da resolução de sistemas de equações lineares, a partir de uma situação de modelação de fluxo de tráfego. Por sua vez, em (Trigueros & Possani, 2011) usou-se um problema de economia relacionado com a produção de um conjunto de indústrias, o qual foi considerado para eliciar a aplicação dos conceitos de combinação linear e dependência e independência linear. Em ambos os casos, a teoria de modelos e modelação (Lesh & English, 2005) é uma das teorias de educação matemática que fundamenta teoricamente a investigação desenvolvida.

A teoria do uso de modelos e de modelação, de princípios construtivistas, assenta no recurso a atividades de modelação, visando a construção de conceitos e o desenvolvimento do pensamento matemático em contextos reais e mais significativos para os alunos (Lesh & Doerr, 2003; Lesh & English, 2005). O desenvolvimento de tais atividades é realizado em ciclos de trabalho, onde estes constroem ferramentas conceptuais para "dar sentido" ao problema em questão, com vista à obtenção de uma resposta. Nestes ciclos de trabalho, há ainda espaço para a reflexão e autoavaliação feita pelos alunos sobre as produções entretanto realizadas e podem constituir-se como móbil para a introdução de novos conceitos (Lesh & English, 2005).

Segundo Lesh e Doerr (2003, como citado em Possani *et al*, 2010) as tarefas de modelação matemática passíveis de serem introduzidas na sala de aula devem respeitar seis princípios: *princípio da realidade* – o contexto é suficientemente realístico para motivar os alunos e o problema contém os elementos matemáticos suficientes para não ser considerado trivial; *princípio da construção do modelo* – o problema conduz à necessidade de conceitos no desenvolvimento de um modelo; *princípio da autoavaliação* – os alunos são capazes de verificar o seu progresso e a adequação do modelo; *princípio da documentação de construção* – os alunos são capazes de modelar algebricamente o problema; *princípio da generalização de*

construção – os modelos desenvolvidos podem ser generalizados para outras situações ou problemas; *princípio da simplicidade* – o nível de complexidade do problema deve ser tal que os alunos o consigam analisar e desenvolver um modelo.

Sobre a investigação acerca de mediação do professor, esta carece ainda de dados empíricos relevantes, de um quadro teórico integrador e de um conjunto de práticas de referência (Lopes *et al*, 2010). A partir da relação entre sujeito e objeto do conhecimento, Lenoir (1996) propõe uma mediação didática, entendida como uma ação exterior que interfere no processo de objetivação do conhecimento e cuja ação é intencionalmente planeada pelo professor. Concebe-se, assim, uma triangulação entre o aluno (o sujeito que aprende), o conhecimento (os objetos de aprendizagem) e o professor (o mediador). Redundante com a perspetiva do ensino, a mediação do professor é entendida como "as ações e as linguagens (naturais e outras) do professor construídas e postas em prática como resposta sistemática aos desafios de aprendizagem dos alunos nos seus percursos para atingir os resultados de aprendizagem (capacidades, valores, atitudes, conhecimentos e competências) pretendidos por um determinado currículo" (Lopes *et al*, 2010, p. 5).

Segundo (Lopes *et al*, 2010), a *dinâmica de interação com o objeto epistémico* e a *dinâmica de interação com os outros* são as duas dinâmicas fundamentais de mediação do professor. A primeira concorre com o estabelecido por Lenoir (1996), centrando-se na interação do aluno como sujeito epistémico e o objeto epistémico, através de mediadores e da ação do professor (Figura 1). A segunda aponta para as interações do aluno com o professor e com os pares, materializadas pela conversação em sala de aula, avaliação e argumentação (Figura 2).

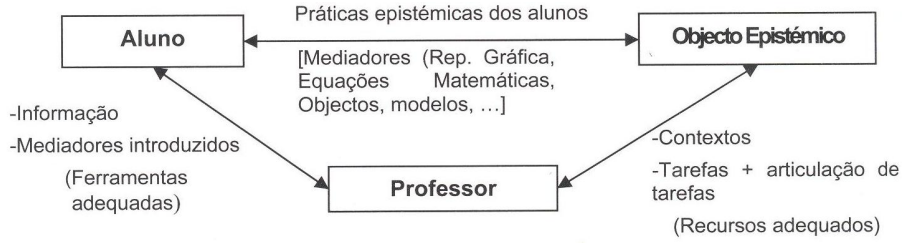


Figura 1

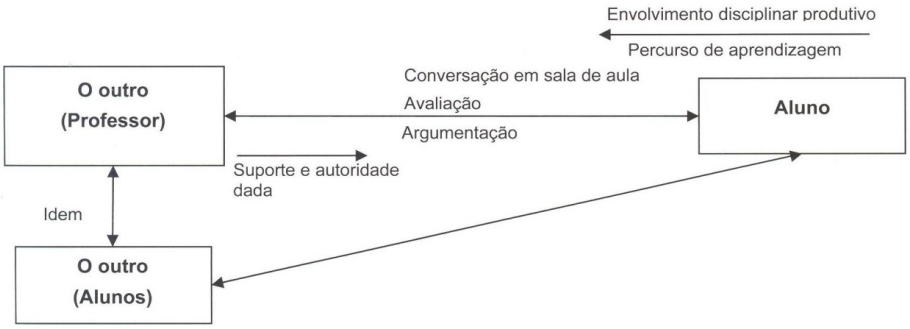


Figura 2

Em articulação com estas dinâmicas, Lopes *et al* (2010) estabelecem seis componentes fundamentais de mediação: mediadores – artefactos e/ou símbolos com os quais os alunos interagem; objeto epistémico – entidade/realidade a conhecer; o outro – mediador humano com quem o aluno interage para construir significados; desafio – proposta de atividade relacionada com as aprendizagens gizadas; resultados de aprendizagem pretendidos – resultados a alcançar de acordo com as intensões do currículo; percurso de aprendizagem – resultado da articulação entre a mediação do professor e os desafios de aprendizagem dos alunos, a sua atividade e progressos de aprendizagem.

Objeto de investigação

A presente investigação enquadra-se no recurso a tarefas de modelação matemática em sala de aula, na perspetiva do trabalho do professor.

Com base na proposta de Possani *et al*. (2010) e Trigueros e Possani (2011), no contexto da utilização de atividades daquela natureza nas aulas de álgebra linear, aponta-se o foco da investigação para a exploração de uma atividade de modelação matemática, decomposta em tarefas localizadas no tempo, segundo o momento de introdução e exploração de alguns conceitos do capítulo de sistemas de equações lineares.

Complementarmente pretende-se um olhar sobre as ações adstritas ao professor no papel de mediação. Deste modo, interessa observar as escolhas, decisões e atitudes do professor, em prol do alcance de algumas manifestações de aprendizagem dos alunos no contexto do trabalho desenvolvido.

Metodologia

A investigação realizada contextualiza-se na prática do professor (primeiro autor deste artigo) numa instituição pública do ensino superior politécnico, no primeiro semestre de 2011-2012, no âmbito da unidade curricular (UC) Matemática Discreta e Álgebra Linear, com alunos do primeiro ano do curso de engenharia elétrica.

Fizeram parte do estudo os dezoito alunos que frequentaram assiduamente as aulas, dezasseis dos quais de primeira inscrição. Este grupo era homogéneo em termos de formação (a maioria dos alunos tinha frequência da disciplina de Matemática A no ensino secundário), com um nível de desempenho médio e familiarizado com os tópicos matemáticos considerados como pré-requisitos.

O professor tem uma experiência letiva no ensino superior inferior a cinco anos e encontrava-se a lecionar esta UC pela primeira vez, não tendo qualquer experiência anterior de álgebra linear. Assumiu-se este facto como relevante, segundo o pressuposto de se conceber uma planificação atenta aos resultados emergentes da investigação em didática da álgebra linear, em detrimento de uma abordagem mais clássica.

A preparação da prática letiva iniciou-se com a elaboração de um texto de apoio e de uma planificação aula a aula. Uma das opções metodológicas adotada para as aulas foi o recurso ao *software* de cálculo *Scilab*. Dado que não foi possível que as aulas se realizassem em salas com computadores, os alunos usavam os seus computadores portáteis.

Na preparação do capítulo Sistemas de Equações Lineares foi delineada uma atividade de modelação matemática (ver Anexo), decomposta em três tarefas, para, ao longo do capítulo, funcionar como aproximação a novos conceitos em situações concretas e no contexto de formação do grupo: a primeira tarefa pressupunha a escrita de equações lineares associadas às leis de Kirchhoff num circuito elétrico; a segunda e terceira tarefa, a realizar em aulas subsequentes, implicariam a escrita do sistema em linguagem matricial e a resolução do mesmo com aplicação do método de eliminação de Gauss, respetivamente.

A investigação realizada é de natureza qualitativa e como metodologia de análise da prática do professor, em torno do papel de mediação e a exploração de tarefas em sala de aula, são consideradas as narrações multimodais (Lopes *et al*, 2010). Os instrumentos de recolha de dados foram todas as produções documentais do professor, as produções dos alunos e gravações áudio das situações de aula enquadradas com o desenvolvimento das tarefas.

Narrações multimodais

As narrações multimodais (Lopes *et al*, 2010) constituem-se como um instrumento contextualizado na ação de mediação do professor, com o objetivo de se recolher dados "não apenas acerca da aula, mas dentro da aula, que ajudassem a preservar a sua completude e complexidade" (Lopes *et al*, 2010, p.17). Detalham, entre outros, a contextualização da aula, as intenções do professor e suas perceções, reações dos alunos e do próprio professor, o trabalho proposto e o trabalho realmente efetuado pelos alunos.

As narrações multimodais são um instrumento *modular*, assente em episódios; *descritivo*, baseado na narração dos episódios intrínsecos à aula; *comparável*, permitindo a comparação entre diferentes narrações; *multimodal*, dando importância a outras situações de aula como representações, tipos de linguagem, intenções, decisões e expressões; *verificável*, pelo recurso a documentos que podem caracterizar todas as ações; *objetivo*, distanciada dos juízos dos intervenientes; *completo*, extensível à vertente pedagógica, didática, epistemológica e psicossocial; *útil*, no apoio ao ensino e desenvolvimento profissional, a par da investigação; *intencional*, mostrando a intenção do professor na escolha de rumos.

Estruturalmente, dividem-se numa primeira parte, relacionada com a contextualização – informações contextuais – e a apresentação da narração da aula por inteiro – narração sintética da aula. Nesta parte consideram-se como elementos orientadores os referenciais, objetivos da aula e diversos constituintes físicos. Numa segunda parte, remetendo para a descrição dos episódios identificados – episódios relativos à aula – objetivando todas as ações do professor e dos alunos, a par das linguagens utilizadas.

Ciclos de trabalho

Os ciclos de trabalho identificados reportam aos dois momentos em que foi desenvolvida a atividade de modelação: Tarefa 1, como ponto de partida para a introdução da resolução de sistemas de equações lineares com *m* equações e *n* incógnitas; Tarefa 2 e 3, como aplicação do método de eliminação de Gauss em situações diferenciadas e como experiência inicial na resolução de problemas. Neste contexto, as narrações multimodais a seguir apresentadas são restringidas aos episódios relativos ao desenvolvimento das tarefas, estão redigidas na primeira pessoa e dizem respeito a aulas lecionadas pelo primeiro autor.

Tarefa 1

Comecei por referir-me à tarefa que os alunos teriam que desenvolver, como aproximação à introdução do método de eliminação de Gauss. Não houve surpresa por parte dos alunos, pois, na aula anterior, informei-os do tipo de atividade que estava prevista e o contexto: escrita das leis de Kirchhoff. Esta atitude é relevante na medida em que, até à data, foram propostas duas atividades e em ambas os alunos mostraram-se muito reticentes e surpreendidos com o tipo de trabalho proposto. Avancei ainda que o propósito era o de encontrar sistemas de equações lineares com um grande número de equações e de incógnitas, pois até ao momento apenas tinham sido explorados sistemas até três equações e três incógnitas.

De seguida, projetei a folha de rosto da atividade e questionei os alunos sobre o circuito apresentado. O conhecimento destes era vago, mas como esse aspeto era irrelevante para o desenvolvimento da atividade, decidi contornar a situação e falar em termos da aplicação das leis de Kirchhoff num circuito elétrico. Para assegurar que os alunos conheciam e aplicavam corretamente as leis de Kirchhoff, projetei uma imagem relativa a uma situação exemplo (Figura 3).

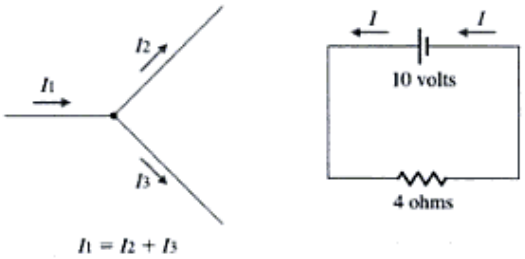


Figura 3

Sobre a imagem da esquerda, relacionei-a com a aplicação das leis dos nós. Apontando para a imagem da direita certifiquei-me que os alunos identificavam o sinal da corrente e conseguiam escrever a equação do circuito. Referi que este era o alcance da tarefa proposta: escrever a equação dos nós e dos circuitos. Pedi então aos alunos para se disporem em grupo, tendo-se constituído quatro grupos com três elementos e três grupos com dois.

Após a distribuição do enunciado e acompanhando o trabalho dos alunos, comecei por tentar elucidar o David (Grupo 2) sobre o número de nós do circuito e o número de equações necessárias para os nós. Neste momento, dirigindo-me à turma, reiterei que primeiro escreviam a equação para cada nó e depois as equações para os circuitos.

No Grupo 4, apercebi-me que o Joel estava a confundir os circuitos com os nós. Disse-lhe que era ao contrário e pedi-lhe para assinalar os nós, tendo ele apontado corretamente para os nós B, C, D e E.

Passando pelo Grupo 5, valorizei a utilização das chavetas. Apenas eram pedidas as diferentes equações, mas os alunos já estavam a colocar em dois sistemas as equações dos nós e as equações dos circuitos. O Abel (Grupo 3) chamou-me entretanto, dadas as dúvidas em relação ao número de equações para os nós e como escrevê-las.

- Quantos nós temos? – perguntei.

- Quatro – respondeu o Josué.

- Olhemos aqui para o nó B. Qual é a equação deste nó?

- As correntes que entram são iguais às correntes que saem – afirmou o Abel.

- Mas o que entra? Elas têm uma designação!

- Entra a I_1 e sai … saem estas duas – continuou o Abel.

- Ok … então é só dar atenção ao sentido – finalizei, abandonando o grupo, consciente que já eram capazes de escrever as restantes equações para os nós.

Como estava próximo, o Joel voltou a colocar-me uma questão sobre a legenda:

- Professor, aqui no nó B. É I_1 … menos I_1 …

- E porque é menos I_1? – questionei.

- Porque se está a afastar do B … menos o I_4 … e depois é mais I_3 porque vai para lá?

- Não!

- Não chega a ir para lá? É só para o E?

- Pois! Qual é a outra corrente que entra no B?

- É este I. Ah …

- Então no B quantas correntes entram e quantas saem?

- Saem duas e entra uma – respondeu agora o Paulino.

- Então já conseguem escrever esta equação? – procurei finalizar.

- Sim. Está aqui!

- Mas ficava só assim? – perguntei, em virtude de ser uma equação do circuito e faltava igualar a zero.

- Agora é igualar a zero!

O Edgar (Grupo 5) voltou a chamar-me perguntando-me se estavam corretas as equações dos nós.

- Tens quantos nós? – perguntei, porque só tinha escrito três equações.

- Quatro.

Mas é o suficiente?

- Ah … falta para este nó! – respondeu, apontando para o nó C. Entra I_1 e sai I_2 e I_3. Pois, era esta que me faltava – concluiu.

Depois escrevem as equações das malhas!

- Atribuindo um $x, y, z, \ldots$ – sugeriu o Filipe.

Aqui o aluno mostrou confusão com o tipo de incógnitas que costuma usar na resolução de sistemas, ao que eu sugeri:

- Não! … em termos da notação usada para as correntes!

Finalizei o diálogo sugerindo que olhasse para a situação exemplo e que procedessem de igual forma.

Continuando a passar pelos restantes grupos, inteirei-me que estavam a escrever as equações corretamente. Até que lancei à turma a questão sobre quantas equações para as malhas eram necessárias. “Quatro” – defendiam uns; “Três” – ripostavam outros. Disse aos alunos que essa questão ficava em aberto, pois estava relacionada com a Tarefa 3, que seria resolvida numa aula posterior.

Estando agora a passar no Grupo 6, o Júlio questionou-me sobre que tensões usar nas equações dos circuitos. Apenas apontei para malhas diferentes e perguntei em quais tinha fontes de alimentação. Percebi que a dúvida do aluno se prendia com a escrita ou não de equações para os circuitos consoante ter ou não uma fonte de alimentação. Discutimos a situação com os restantes elementos do grupo, tendo os alunos rapidamente mostrado ter percebido como escrever tais equações.

Comecei a olhar em redor, inteirando-me do estado da realização da tarefa nos diferentes grupos. Curiosamente, a questão sobre o número de equações para os circuitos ainda estava a ser discutida entre alguns alunos. Procurei dar por terminada a tarefa, começando a recolher as produções dos que já tinham finalizado e a desafiar os restantes para concluir rapidamente. Entre diversas conversas paralelas, consegui distinguir o Fernando a falar com um colega sobre que este tinha que ter colocado o sistema na forma canónica. Entendi este aspeto como

bastante interessante, pois o aluno estava a usar uma linguagem já contextualizada com escrita de um sistema de equações lineares.

A tarefa acabou por demorar perto de quinze minutos. Os alunos envolveram-se positivamente na tarefa e a postura, quer individual, quer em termos de grupo, foi sempre adequada. Na Figura 4 aparece a proposta (correta) de resolução da tarefa do Grupo 2.

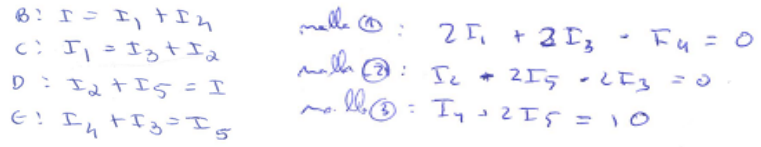


Figura 4

Tarefas 2 e 3

Este episódio decorreu duas aulas após a exploração da Tarefa 1. Relacionando com a tarefa inicial, questionei se alguém tinha escrito as equações dos nós e dos circuitos na forma de sistema. Os alunos, de uma forma hesitante, responderam que não e nenhum elemento do Grupo 5 se pronunciou, tendo sido este o único grupo que tinha considerado tal aspeto. Sugeri que agora poderiam colocar todas as equações num único sistema. E perguntei:

> - Quantas equações terão então no final?
>
> - Para aí cinco… – avançou a medo o Paulino.
>
> - Depende! Depende de cada um – interveio o Eduardo, rindo-se. Supostamente o aluno estava a recordar-se da discussão anterior sobre quantas equações para os circuitos seriam necessárias, questão que tinha ficado em aberto.
>
> - Sim, muito bem. Então terão sete ou oito equações – rematei eu, sabendo de antemão o número de equações que os alunos colocaram nas suas respostas.

De seguida, recordei a escrita de um sistema na forma matricial e assegurei-me que os alunos conheciam o significado de cada parâmetro da equação $AX = B$. Continuei, problematizando:

> - Mas uma matriz com, por exemplo, oito linhas … é uma matriz muito grande, não é? Então aqui, o que podemos considerar para acelerar o procedimento?
>
> - O Scilab – adiantou a Carla.

Para retomar a atividade, distribui pelos grupos as folhas que tinha recolhido anteriormente, nas quais os alunos continuariam a colocar as suas respostas. Reiterei que deveriam considerar a correção e as sugestões apresentadas relativamente à Tarefa 1. Para acompanhar de perto o trabalho dos alunos comecei a percorrer os grupos. No Grupo 1, a dúvida inicial dos alunos era sobre a minha correção. Tendo eu circundado uma variável numa das equações, o Eduardo questionou-me se era apenas a variável que estava errada ou se era toda a equação, ao que eu informei que a marca assinalada remetia para um erro de escolha da variável. Esclareci ainda que teriam que escrever o sistema na forma canónica e eventualmente recorrer ao *Scilab* na resposta à Tarefa 3. Assegurei-me também que os alunos se recordavam do comando *rref* para a resolução do sistema através do *Scilab*.

No Grupo 2, tive de esclarecer a correção e a dúvida sobre como dispor as equações num único sistema. Aqui, tive a necessidade de me dirigir ao grande grupo para realçar que teriam de escrever as equações na forma canónica, fruto da dificuldade que estava a detetar em os alunos ordenarem as variáveis. Para tal, recomendei que deveriam organizar as variáveis de I a

I_5. Neste momento, o Fernando (Grupo 7) lançou a dúvida sobre como proceder quando, por exemplo, numa equação aparecia *"igual a I_5"*. Deduzi que o facto de algumas incógnitas aparecerem no segundo membro se estava a tornar numa dificuldade acrescida. Aproximando-me do grupo, o Fernando continuou:

- Mas professor, aqui como fazemos? Temos o I1 …

- Mas têm que colocar por ordem! – interrompi.

- Sim, mas o que estou a perguntar … dá igual a I1 … e depois na matriz B …

- Tens que colocar os termos independentes – procurei ajudar.

- Sim …o I1 é um termo independente – continuou o Fernando.

Por isto, esclareci que tinham de escrever as equações na forma canónica, passando todas as variáveis para o primeiro membro. O Hélder, dirigindo-se aos restantes, lançou a sugestão de reescrever a equação $I = I_1 + I_4$ como $I - I_1 + I_4 = 0$. Assumi o progresso dos alunos e decidi abandonar o grupo.

Noutros grupos, a minha intervenção continuou com o desafio para a escrita das equações na forma canónica, como meio para a escrita do sistema na forma matricial. Constatei no final que os grupos conseguiram escrever um único sistema que modelasse a situação apresentada. Na Figura 5 consta a proposta do Grupo 4 relativamente a esta tarefa.

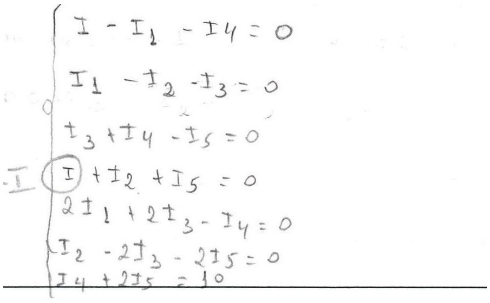


Figura 5

No Grupo 5, já acerca da Tarefa 3, confrontei os alunos sobre que tipo de matriz dos coeficientes teriam que encontrar para aplicar o método de Gauss. E nesse âmbito, para menor dispêndio de tempo, dada a dimensão da matriz dos coeficientes, se justificava o recurso ao *Scilab* na fase descendente do método. No Grupo 1 apenas tive de corroborar a sugestão da Juliana sobre o facto de escreverem no *Scilab* a matriz ampliada do sistema para aplicarem o comando *rref*. Esclareci, entretanto o Eduardo, que já se encontrava a escrever a matriz no *Scilab*, que podia atribuir uma letra maiúscula à matriz ampliada, para depois executar o comando. Aproveitei para sugerir também este procedimento ao grande grupo. Paralelamente, a Carla observou que *"iria ser quase tudo corrido a uns e a zeros"*.

Face ao tempo decorrido, solicitei o término das tarefas. Percorrendo pela última vez os grupos, certifiquei-me que os alunos utilizavam corretamente o *Scilab*. No Grupo 6 observei que algumas equações não estavam na forma canónica. No entanto, estavam a colocar no *Scilab* os coeficientes das incógnitas de uma forma correta. Perante a minha questão sobre o desfasamento da escolha, os alunos rapidamente concluíram que se tivessem escrito o sistema na forma canónica, este processo seria mais rápido.

Entretanto, observei no Grupo 1 o entusiamo face à obtenção no *Scilab* da matriz reduzida e a procura por mostrar a alunos de outros grupos. Os restantes grupos começaram também a obter a matriz ampliada na forma canónica reduzida por linhas, pelo que tinham alcançado a fase descendente do método. Nesta fase, fui novamente solicitado pelos grupos, com o

propósito de ultimarem a tarefa. O Fernando, fazendo-se ouvir na sala, disse que *"dava os 1's todos direitinhos"*. Ora, se os alunos tivessem escrito as equações corretamente e não houvesse erros de transcrição da matriz ampliada para o *Scilab*, na última coluna constariam as soluções para as intensidades, pois o sistema era possível e determinado. Consequentemente, em vez de ajudar os alunos a retificar eventuais erros, decidi aproveitar a situação para os alunos relacionarem os resultados obtidos com a classificação do sistema. Assim, disse-lhes para avançarem com uma resposta para o problema consoante o tipo de matriz que obtiveram na fase descendente do método.

Dando por terminadas as tarefas e recolhendo as produções dos alunos, verifiquei que alguns ficaram um pouco desanimados, pois tinham obtido um sistema impossível e avançaram somente que o problema não tinha solução. Somente em dois grupos obtiveram uma potencial solução do problema, sendo que nenhuma estava completamente correta (Figura 6, como exemplo), o que também hipotecou a cabal interpretação da solução do problema.

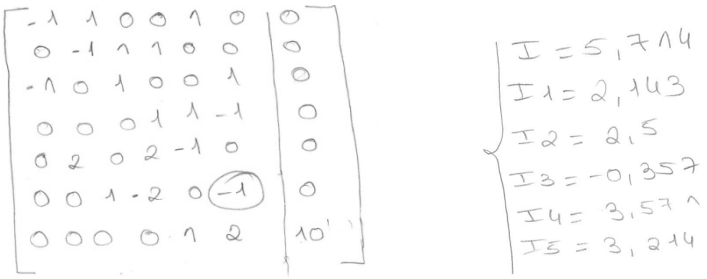


Figura 6

Análise crítica

No contexto da Tarefa 1 verificou-se que os alunos, mesmo conhecendo as leis de Kirchhoff, tiveram dificuldades em modelar a situação, necessitando da ajuda do professor. A dúvida sobre o número mínimo de equações para os circuitos vinca tal dificuldade. No circuito fornecido já constavam as variáveis, não havendo a necessidade de definirem variáveis em falta ou novas variáveis. É inconclusivo, nestes termos, a análise das dificuldades dos alunos em atribuírem as variáveis em situações de modelação, surgindo como único indicador o facto de, num dos grupos, os alunos terem ponderado a atribuição $x, y, z, \ldots$, às variáveis associadas às equações.

Adstritos à ação do professor, sobressai a decisão do aviso prévio sobre a realização da atividade, tendo os alunos manifestado a atitude de predisposição natural para a exploração da mesma. A questão sobre o número de equações necessário para os circuitos tornou-se num exemplo catalisador das interações entre os alunos, tendo estas inclusive extravasado a realidade do próprio grupo. Nas interações com os alunos, uma decisão do professor foi a de procurar a argumentação, com o objetivo máximo de aqueles conseguirem "uma resposta" para as suas próprias dúvidas.

Relativamente às Tarefas 2 e 3, começa por sobressair a falta de autonomia e a dependência dos alunos da ação do professor, ao longo das diferentes etapas. A propensão para se dirigirem individualmente com dúvidas ao professor, antes destas serem discutidas no grupo, pode ser concomitante com a subvalorização do esforço para a tentativa de resolução das tarefas. Neste momento de trabalho, o conhecimento dos alunos sobre a operacionalização do método de Gauss era substancialmente sustentado. Numa situação "normal", os alunos encontravam um sistema na forma canónica, escreviam a matriz ampliada e, por meio de

operações elementares, alcançavam a fase descendente do método, para finalizarem com o isolamento das variáveis. Contudo, nesta atividade, depararam-se com uma situação atípica. Os alunos começaram por sentir dificuldades em escrever o sistema na forma canónica, muito devido à atribuição escolhida para as variáveis, distantes dos habituais *x, y* e *z*.

A situação diferenciada pelo elevado número de equações e de incógnitas do sistema, os erros de modelação e os erros de utilização do *software*, condicionaram parte do propósito inicial de valorização, por parte dos alunos, do desenvolvimento de atividades desta natureza, face à desilusão pelos resultados obtidos. A decisão do professor pelo contorno dado à resolução da tarefa neste momento foi pela sua conclusão em termos dos resultados obtidos, remetendo para uma manifestação de aprendizagem (no caso, classificação de sistemas). A opção poderia ter passado pelo auxílio aos alunos na correção dos erros e obtenção da resposta correta do problema, eventualmente vincando resultados de aprendizagem relacionados com a resolução de sistemas associados a situações reais de modelação matemática.

Assinala-se, por último, a participação e envolvimento de todos os alunos ao longo das diferentes tarefas, com discussão de estratégias e de resultados entre os pares e o professor.

Conclusão

Sobre as opções metodológicas, infere-se haver espaço para abordagens alternativas neste nível de ensino. Assume-se que a atividade de modelação matemática escolhida vai de encontro aos princípios de (Lesh & Doerr, 2003, como citado em Possani *et al*, 2010). Desta forma, infere-se que as dificuldades detetadas não derivam da atividade em si. Apenas se questiona o princípio da simplicidade, mas exercícios relacionados com as leis de Kirchhoff já constam em livros de texto de álgebra linear.

Em termos do trabalho efetivamente realizado pelos alunos, conseguiu-se contrapor estes resultados de investigação com os focados em (Possani *et al*, 2010), a saber: a dificuldade de identificar as variáveis e de interpretar alguns parâmetros constantes no modelo; a dificuldade de modelar o problema e estabelecer as equações lineares em número necessário; o interesse dos alunos pelo desenvolvimento de atividades desta natureza.

O recurso ao *Scilab* constituiu-se ainda como uma opção metodológica valorizada pelos alunos, muito em termos do ganho de tempo de resolução e o auxílio na resolução de qualquer tipo de sistema. No contexto da atividade desenvolvida os alunos encapsularam um procedimento que vai para além da resolução de exercícios de rotina, vulgo "papel e lápis", e cujo recurso se justifica em situações mais desafiadoras, mormente associadas a situações reais.

A elaboração da narração multimodal como ferramenta de descrição dos episódios de trabalho em sala de aula (Lopes *et al*, 2010) deu profundidade à reflexão sobre a prática, o trabalho de mediação do professor e a avaliação das opções metodológicas. Sublinha-se que a mediação do professor subjacente ao desenvolvimento da atividade apresentada teve duas componentes diferentes: fase de planeamento da atividade (conceção, escolha do momento de integração e articulação com os assuntos e o anúncio); fase de resolução (trabalho efetivamente produzido pelos alunos).

Face às ações do professor pode-se estabelecer que foram implicadas as duas dinâmicas de mediação do professor. Por um lado, na dinâmica de interação com o objeto epistémico (Figura 1), a resolução de sistemas de equações lineares traduziu-se no objeto epistémico estipulado à partida, tendo o professor, na relação com o objeto epistémico, recriado um contexto real (circuitos elétricos) e apresentado aos alunos tarefas articuladas em função do

momento de introdução de conceitos. Na relação com o aluno, a informação introduzida traduziu-se na revisão das leis de Kirchhoff e na formalização do método de Gauss entre a realização da Tarefa 1 e as restantes. O modelo matemático conceptual associado pelos alunos à situação apresentada e o *Scilab* constituíram-se como os elementos mediadores de referência que permitiram interagir com o objeto epistémico. Por outro lado, do enfoque na conversação e argumentação, possibilitado pelo trabalho de grupo e pelo acompanhamento por parte do professor do trabalho dos alunos, emerge a dinâmica de interações com os outros (Figura 2). Neste enquadramento, o professor tornou-se regulador das interações, sobretudo por meio da problematização e da confrontação. Nunca fornecendo respostas, o professor propiciou a autoridade do trabalho produzido pelos alunos. Outra manifestação de autoridade dada foi a aceitação dos resultados obtidos (mesmo que errados). No final, assume-se que o papel do professor contribuiu positivamente para o alcance de resultados de aprendizagem e para uma pequena marca no percurso de aprendizagem dos alunos.

Referências

Carlson, D. (1993). Teaching linear algebra: Must de fog always roll in? *The College Mathematics Journal*, 24 (1), 29-40.

Dorier, J. L. (1998). The role of formalism in the teaching of the theory of vector spaces. *Linear Algebra and its Applications*, 275/276, 141-160.

Dorier, J. L. (2000). *On the Teaching of Linear Algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Niss, M. (1999). Aspects of the nature and state of research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics,* 40, 1-24.

Dubinsky, E. (1997). Some thoughts on a first course in linear algebra at the college level. In D. Carlson, C.R. Johnson, D. Lay, A.D. Porter, A.E. Watkins & W. Watkins, (Eds.), *Resources for Teaching Linear Algebra* (pp. 85-105). Washington: Mathematical Association of America.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking on linear algebra. In J-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 209-246). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J.G. & Lozano, M.D. (2010). Use of models in the teaching of linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, 432 (8), 2125-2140.

Trigueros, M. & Possani, E. (2011). Using an economics model for teaching linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*. Recuperado em 5 Julho, 2011, de http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0024379511003053

Lesh, R. & English, L. (2005). Trends in the evolution of models-modeling perspectives on mathematical learning and problem solving. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 37, (6), 487-489.

Lesh, R. & Doerr, H. (2003). *Beyond Constructivist: Models and Modelling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning and Teaching*. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

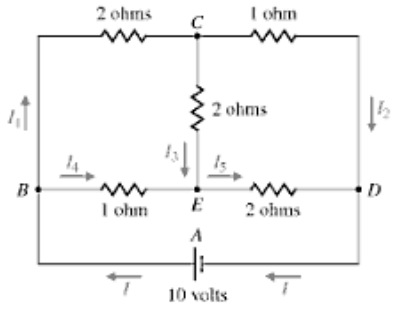
Lopes, J. B., Silva, A. A., Cravino, J. P., Viegas, C., Cunha, E., Saraiva, E. Branco, M. J., Pinto, A., Silva, A. & Santos, C. A. (2010). *Investigação sobre a Mediação de professores de Ciências Físicas em sala de aula*. Vila Real: Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro.

Lenoir, Y. (1996). *Médiation cognitive et médiation didactique. In C. Raisky & M. Caillot (Eds). Au delà des didactiques, le didactique* (pp. 223-251). Bruxelles: De Boeck Université.

Anexo

Atividade

O esquema da ponte de Wheatstone apresentado na figura tem uma única fonte de energia A e cinco resistências.



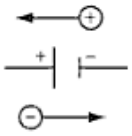
Determine, em amperes, as intensidades I, I_1, I_2, I_3, I_4, I_5.

Quando a corrente elétrica passa por uma resistência ocorre uma "queda de voltagem", sendo esta dada, segundo a lei de Ohm, por

$$V = I \times R,$$

com a voltagem (ou diferença de potencial) *V* medida em *volts*, a resistência *R* medida em *ohm* e a intensidade da corrente elétrica *I* medida em *amperes*.

Às intensidades atribuem-se os sinais positivos e negativos consoante o sentido da corrente. Se o sentido da corrente for do lado positivo da fonte de energia (segmento maior) para o lado negativo, então a voltagem é positiva. Caso contrário, a voltagem é negativa.



As leis de Kirchhoff relacionam a intensidade, voltagem e resistência em circuitos elétricos, enunciadas como se segue.

Lei da corrente (nós)

A soma das correntes que entram em qualquer nó é igual à soma das correntes que saem dele.

Lei da voltagem (circuitos)

A soma das quedas de voltagem ao longo de qualquer circuito é igual à voltagem total em torno do circuito.

Tarefa 1: Para cada lei de Kirchhoff enuncie as equações para a determinação das intensidades das correntes no circuito elétrico.

Tarefa 2: Represente as equações lineares num único sistema sob a forma matricial.

Tarefa 3: Resolva o sistema de equações lineares relativo à Tarefa 2, eventualmente recorrendo ao *Scilab*. Apresente a resposta e interprete a solução no contexto do problema

DESENVOLVENDO O SENTIDO DE NÚMERO RACIONAL: QUE DESAFIOS PARA O PROFESSOR?

Margarida Nunes Silva
Agrupamento de Escolas de Pinhal de Frades
margaridasilvaani@gmail.com

Ana Maria Boavida
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Setúbal
ana.boavida@ese.ips.pt

Hélia Oliveira
Instituto da Educação, Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ul.pt

Resumo: A construção do conceito de número racional, a partir da representação na forma de fração numa perspetiva do desenvolvimento de sentido do número, é uma novidade no currículo português trazendo ao professor do 1º ciclo do ensino básico vários desafios. Uma das formas de lhes fazer face é selecionar tarefas matemáticas que incentivem os alunos a pensar conceptualmente e sequenciá-las tendo em conta um percurso de aprendizagem orientado por ideias poderosas, modelos adequados e estratégias de referência. Neste texto analisam-se as práticas de uma professora do 3.º ano associadas à realização de uma das tarefas da trajetória de aprendizagem planeada para ensinar números racionais. Esta análise permite sublinhar a importância de um conhecimento sólido da matemática a ensinar. Evidencia, também, que não basta o professor antecipar eventuais dificuldades dos alunos: é essencial ser capaz de lidar flexivelmente com acontecimentos inesperados que surgem durante o ensino e que, por irem em sentido contrário às suas expectativas, provocam situações de impasse e sentimentos de desilusão e frustração. Os conflitos experienciados pela professora serviram de motor para a levar a repensar o seu papel na orientação do discurso de forma a tornar a tarefa mais poderosa

Palavras-chave: Práticas profissionais; número racional; fração; tarefas matemáticas; trajetórias de aprendizagem.

Introdução

A introdução dos números racionais não negativos, representados sob a forma de fração, com significados que vão para além da fração[1] como operador, é uma novidade no atual Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) para o 1.º ciclo, introduzindo uma mudança curricular importante: a passagem do número natural ao racional através da sua representação na forma de fração. Concretamente, os números racionais começam a ser trabalhados nos dois primeiros anos de escolaridade através de uma abordagem intuitiva e partindo de situações de partilha equitativa e de divisão da unidade em partes iguais. É nos 3.º e 4.º anos que o estudo destes números vai ser aprofundado, quer recorrendo a problemas que permitam trabalhar outros significados da fração (parte-todo, razão, operador, quociente

[1] Por questões de simplificação de linguagem, a partir de agora a palavra "fração" deve ser entendida como representação de um número sob a forma de fração.

e medida), quer introduzindo números representados na forma decimal. Esta situação é uma alteração muito significativa para os professores do 1.º ciclo, uma vez que, anteriormente, a ampliação do conceito de número fazia-se através da representação decimal dos números racionais. Além disso, é-lhes pedido que trabalhem o conceito de fração tendo em conta os seus múltiplos significados. Simultaneamente, todo o trabalho deve ser orientado numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número, o que leva a que a ênfase não possa ser colocada exclusivamente em procedimentos de cálculo.

Como dar sentido a uma representação que não "explicita" um número - como acontece no universo dos números naturais - mas uma relação entre dois números? Como pode um professor favorecer o alargamento da noção de número natural à de número racional através da sua representação sob a forma de fração? De que forma professores e alunos, podem fazer um percurso facilitador da aprendizagem destes "novos números" numa perspetiva de desenvolvimento do *sentido de número?*

Tendo por base estas questões, delineou-se uma investigação, em fase de desenvolvimento, cujo propósito é descrever e analisar as práticas de ação e reflexão de uma professora do 3.º ano de escolaridade, na preparação e concretização de uma trajetória de aprendizagem focada na construção do conceito de número racional a partir da sua representação sob a forma de fração, compreendendo desafios e dificuldades com que se vai confrontando. Este texto tem como objetivo analisar as práticas de Beatriz associadas à exploração da tarefa "A discussão do João e da Maria" que se enquadra numa trajetória de aprendizagem planeada em contexto de trabalho colaborativo.

Ensinar números racionais com problemas

Ensinar com problemas é uma abordagem de ensino que tem por pano de fundo a ideia de que a exploração e discussão de tarefas cognitivamente desafiadoras que favoreçam a construção de ideias matemáticas poderosas e incentivem o raciocínio e o pensamento reflexivo, é fundamental para que os alunos aprendam Matemática com compreensão (Lampert, 2001; Fi & Degner, 2012). Esta ideia está subjacente a muitas das atuais orientações curriculares e as suas potencialidades têm sido amplamente documentadas por diversos autores.

Sendo as tarefas e o modo como são exploradas na sala de aula, essenciais para o que os alunos aprendem de Matemática e como o aprendem (Stein *et al*. 2007), estas assumem uma relevância acrescida quando se trata de perspetivar o ensino de tópicos que levantam sérias dificuldades, como é o caso dos números racionais e, em particular, do conceito de fração: "Compreender os números racionais envolve a coordenação de múltiplas e diferentes ideias e interpretações que estão, no entanto, inter-relacionadas" (Lamon, 2007, p. 23). A aprendizagem destes números é mais complexa do que a dos inteiros (naturais e zero): os racionais são um conjunto denso e não discreto (Kilpatrick, 2001); representam-se de diferentes formas (fração, decimal e percentagem); são usados de diversos modos e com vários significados nem sempre matemáticos (por exemplo, a palavra fração como sinónima de pequena parte); o dia a dia fornece maior experiência com os números inteiros do que com os racionais; e há numerosas propriedades para os alunos aprenderem, incluindo o facto de dois números diferentes (o numerador e o denominador) comporem um único número (a fração) e estarem relacionados através da multiplicação e da divisão e não da adição.

Ter maturidade na compreensão dos números racionais é muito mais do que ser hábil a manipular símbolos: significa ser capaz de estabelecer conexões nas várias situações modeladas por esses símbolos.

Lidar com o caráter complexo e multifacetado do conceito de fração

A fração expressa uma relação entre quantidades, pelo que o conceito tem uma natureza relativa (Nunes & Bryant, 2006). Além disso, é um conceito multifacetado. Com efeito, como sublinha Lamon (2007, referindo Kieren) é importante que os alunos tenham uma experiência adequada com as múltiplas interpretações de fração, ou nas suas palavras, "personalidades dos números racionais" (p. 642) — parte-todo, razão, operador, quociente e medida — e que não as considerem como meros objetos de cálculo. Na sua perspetiva, a compreensão do conceito de fração vai-se construindo a partir do entendimento destas várias "personalidades" ou significados.

Este caráter multifacetado do conceito de fração complexifica o trabalho do professor implicando uma visão holística da construção de número racional. O conjunto das diversas "personalidades", que se inter-relacionam, tornam um conceito simples num conceito complexo, transformando o todo em algo mais que a soma das suas partes. Charalambous e Pitta-Pantazi (2006) enfatizam que o desenvolvimento do conceito de fração a partir de um dos seus significados não garante a compreensão dos restantes comprometendo a compreensão global do conceito. Apoiando-se num modelo de Behr, os autores procuraram relacionar os diferentes significados da fração com os conceitos chave no trabalho com a fração: a noção de equivalência de frações, as operações com frações e a resolução de problemas (Fig. 1).



Figura 1: Modelo de Charalambous e Pitta-Pantazi (2006)

Os autores concluíram que o significado "parte-todo", é considerado, juntamente com o processo de partição (partilha equitativa), essencial para o desenvolvimento da compreensão dos restantes quatro outros significados[2] assim como o mais relacionado com a resolução de problemas e a adição de frações (Fig. 1). O significado "razão" é o mais "natural" para promover a compreensão da equivalência de frações e os significados "operador" e "quociente" são os que mais contribuem para o entendimento da multiplicação de frações.

Em suma, o ensino dos números racionais e, em particular das frações, traz desafios acrescidos ao professor. Há que ter em conta os vários significados de fração, as diferentes representações dos números racionais e a forma como este trabalho pode ser desenvolvido. O dilema, para alunos e professores, é o de como estabelecer as conexões apropriadas para uma madura e flexível compreensão destes números.

Percorrer um caminho passando por pontos de referência

Embora as diferenças entre os números inteiros e os números racionais sejam fontes de dificuldades para os alunos, Moss e Case (1999) defendem que estes os aprendem também desde o início da sua escolaridade:

[2] Razão, operador, quociente e medida

> Em qualquer dos casos, constroem esquemas numéricos quantitativos globais separadamente e, à medida que vão desenvolvendo um nível mais elevado de pensamento, vão coordenando gradualmente estes "esquemas" para obterem uma compreensão do núcleo, tanto no que se refere à forma como os números em questão estão estruturados, como à notação usada para os representar. (p. 124)

Este entendimento nuclear é estendido a números mais complexos e às formas de representação desses números até que a estrutura global de todo o campo é compreendida. Este processo de domínio progressivo de dois universos numéricos tem semelhanças com o que acontece quando as crianças aprendem duas línguas.

Também Nunes e Bryant (2006) sublinham que os alunos têm uma compreensão intuitiva da natureza relativa da fração a partir das experiências com a divisão, o que indicia que os programas curriculares que tenham como ponto de partida as intuições dos alunos acerca de situações de partilha equitativa e estabelecendo conexões com as "frações como números"[3], podem ter um impacto positivo na aprendizagem.

Estas ideias parecem ser bastante convergentes com as perspetivas de Van Walle e Lovin (2006) que preconizam um caminho de aprendizagem ancorado na construção do *sentido de número fração* ("fraction number sense", p. 262) que permite ir de uma abordagem mais intuitiva a uma formalidade progressivamente maior, usando diversos modelos como ferramentas para apoiar o pensamento dos alunos. Também Fosnot e Dolk (2002) se referem à construção do conceito de fração como uma "viagem" que os alunos fazem através de uma *paisagem de aprendizagem* ("*landscape of learning"* , p. 21) em que passam e voltam a passar por "pontos de referência" que se vão tornando marcos no seu próprio percurso de aprendizagem. Segundo estes autores, para que caminhem em direção ao horizonte da compreensão das frações, é importante que o professor selecione e sequencie criteriosamente problemas e que promova a discussão coletiva das suas resoluções de modo a que os alunos vão construindo, nomeadamente as seguintes *grandes ideias ("big ideas", p. 55)*:

- as frações são relações e são relações parte-todo;
- o todo importa porque as frações são relações;
- as partes fracionárias não têm de ser congruentes mas equivalentes;
- a fração é uma divisão e, portanto, está relacionada com a multiplicação;
- a divisão e a multiplicação de frações são relações de relações;
- os números decimais podem representar-se por frações cujo denominador é uma potência de 10 e as percentagens por frações cujo denominador é uma potência de 100 e, por isso, são relações fracionárias específicas;
- o que "unifica" números inteiros e decimais é a compreensão do valor de posição.

Assim, é importante que estas *grandes ideias* constituam linhas norteadoras da ação do professor, o que nem sempre é tarefa simples. Antes de mais porque muitos não têm uma compreensão profunda do conceito de fração nem tiveram uma formação adequada para ensinar bem este conceito (Clarke, Roche & Mitchel, 2008). Além disso, porque o trabalho de ensino envolve uma gestão complexa de relações com os alunos, os "mundos" de onde provêm, as suas experiências matemáticas anteriores e com o conteúdo matemático a ensinar (Lampert, 2001). Muitas vezes, entre as intenções do professor e as suas ações há distâncias consideráveis e amiúde surgem incompatibilidades incontornáveis. Os planos feitos para a situação de ensino, relacionam as ações com as intenções, mas esses planos não determinam o que um professor deve, ou não, fazer no decurso da aula. Frequentemente, descobrir o que

[3] Fração enquanto representação de um número racional

manter e o que deixar para trás é uma escolha que faz no momento da própria aula, pelo que, amiúde, se move num "*universo sem precedentes*" (Lampert, 2001, p. 447).

Metodologia

O estudo que enquadra este texto é de cunho interpretativo no sentido em que o cerne é a compreensão do significado conferido pelos "atores" às suas ações (Erickson, 1986). Incluiu a realização de um projeto de colaboração que envolveu a investigadora, primeira autora deste texto, e Beatriz (pseudónimo), a professora do 3.º ano de escolaridade que, quando contactada para o projeto, de imediato se disponibilizou.

O projeto desenvolveu-se em torno de três eixos inter-relacionados: (a) preparação de uma sequência de tarefas orientada para a construção de "grandes ideias" (Fosnot & Dolk, 2002) associadas à aprendizagem dos "Números racionais não negativos"; (b) concretização pela professora da sequência de tarefas; e (c) reflexão antes, durante e após a sua realização.

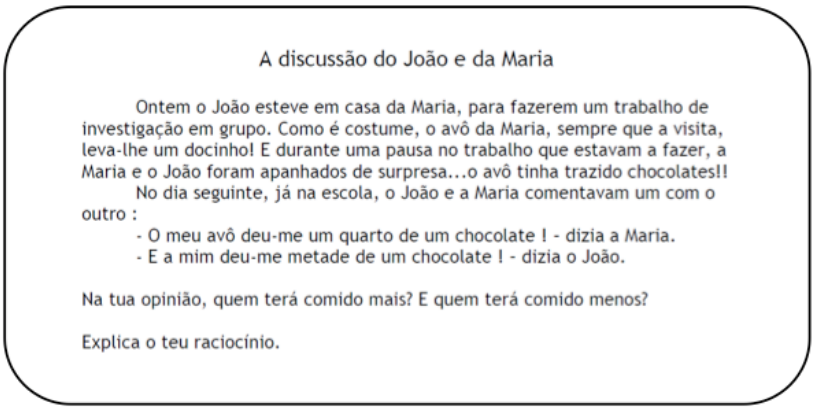
Estas tarefas eram problemas de complexidade variável. Foram selecionadas partindo do estudo de documentos curriculares, da planificação de escola, de tarefas propostas a nível nacional (DGIDC), de materiais do Programa de Formação Contínua de Matemática da ESE de Setúbal e de outros documentos selecionados, bem como da análise das suas potencialidades para trabalhar o conceito de número racional. Foram preparadas 16 tarefas cujo encadeamento foi definido previamente e informado pelas "grandes ideias". Previu-se, no entanto, que a sequência pudesse ser alterada quanto às próprias tarefas e/ou sua seriação, fruto da reflexão sobre os acontecimentos da aula, o que veio a acontecer. Foi, assim, delineada uma *trajetória de aprendizagem* (Simon, 1995) constituída por quatro fases principais: (i) Do trabalho intuitivo com a parte fracionária à simbologia da fração; (ii) Da simbologia da fração ao *sentido de número fração*; (iii) Do *sentido de número fração* à noção de equivalência de frações; (iv) Da noção de equivalência às múltiplas representações de número racional.

O projeto de colaboração decorreu de 29 de novembro de 2010 a 17 março de 2011 e no seu início foram negociados os papéis da investigadora e da professora que não se alteraram durante o seu desenvolvimento:

- responsabilidade mútua na preparação e elaboração da sequência de tarefas, assim como na identificação das "grandes ideias" que orientariam a trajetória de aprendizagem;
- responsabilidade da professora na concretização das aulas referentes ao plano de trabalho definido; nestas a investigadora assumiria o papel de observadora-participante, apoiando, eventualmente, a professora;
- responsabilidade mútua na reflexão, análise e eventual reformulação do plano inicial;
- em qualquer decisão relativa à atividade em sala de aula, a professora teria, sempre, a última palavra.

Os principais métodos de recolha de dados foram a observação participante, a entrevista e conversas informais. A observação participante esteve associada a cinco aulas, para familiarização com o contexto em que iria decorrer o estudo, e a catorze relativas à unidade "Números racionais não negativos". Esteve, também, associada a doze sessões de trabalho, destinadas a partilhar ideias, refletir e avaliar a concretização da trajetória de aprendizagem. As conversas informais ocorreram imediatamente antes ou após as aulas referidas. As

entrevistas, realizadas à professora, foram semiestruturadas e ocorreram em dois momentos: uma no início do estudo e outra no final. Foram elaboradas notas de campo e os dados provenientes das aulas e das reuniões foram registados através de, respetivamente, gravações em vídeo e em áudio. O *corpus* foi objeto de análise de conteúdo qualitativa orientada por categorias temáticas.


A discussão do João e da Maria

Ontem o João esteve em casa da Maria, para fazerem um trabalho de investigação em grupo. Como é costume, o avô da Maria, sempre que a visita, leva-lhe um docinho! E durante uma pausa no trabalho que estavam a fazer, a Maria e o João foram apanhados de surpresa...o avô tinha trazido chocolates!!

No dia seguinte, já na escola, o João e a Maria comentavam um com o outro :

- O meu avô deu-me um quarto de um chocolate ! - dizia a Maria.
- E a mim deu-me metade de um chocolate ! - dizia o João.

Na tua opinião, quem terá comido mais? E quem terá comido menos?

Explica o teu raciocínio.

Figura 2: tarefa 7

Apresenta-se, em seguida, o modo como a professora explorou a tarefa "A discussão do João e da Maria" e analisam-se as suas reflexões sobre a contribuição desta para a construção do conceito de número racional bem como sobre dificuldades e desafios experienciados.

A discussão do João e da Maria

Situando a tarefa

Esta tarefa surge na segunda parte da trajetória e é a sétima da sequência. Foi explorada após a intitulada "A visita de estudo e a distribuição de baguetes", que envolve uma situação de partilha equitativa, e cuja discussão permitiu trabalhar as seguintes ideias: (i) as partes fracionárias são partes iguais da mesma figura ou porções iguais da unidade; (ii) as partes em que se divide a unidade têm nomes especiais e "dizem-nos" quantas são necessárias para fazer a unidade; (iii) quanto mais partes se usam para fazer uma unidade mais pequena é cada parte; (iv) o denominador da fração indica em quantas partes foi dividida a unidade, de forma a produzir a parte pretendida, logo o denominador é o divisor e o numerador indica a parte considerada pelo que é um multiplicador; (v) duas frações equivalentes são dois caminhos para descrever a mesma quantidade usando diferentes partes fracionárias.

Tendo por fio condutor estas ideias, o trabalho dos alunos em torno do problema das baguetes centrou-se na comparação de quantidades relativas à mesma unidade (a baguete) através dos significados de parte-todo e de quociente. Como a professora foi salientando, "podemos comparar, pois temos sempre baguetes iguais".

Durante o projeto discutimos o interesse da tarefa "A discussão do João e da Maria" para trabalhar a natureza relativa da fração e a professora considerou que poderia proporcionar um debate favorável à clarificação e aprofundamento do conceito. Assim, considerou que seria interessante incluí-la na sequência.

Apresentando a tarefa

Beatriz é muito cuidadosa na escolha das tarefas, procurando encontrar contextos familiares aos alunos, o que revela não só sensibilidade matemática, como também um profundo conhecimento sobre os seus alunos, que oportunamente usa para ensinar Matemática:

> Não é só colocar um problema que seja giro… é fundamental que esteja relacionado com o dia a dia da criança pois desperta-lhes mais o interesse e eles percebem o que é que lá está; é criar-lhes condições para que eles desenvolvam estratégias para resolver aquele determinado problema; (...) é conter determinados ingredientes…que fazem parte da suas histórias de vida, facultar-lhes meios para que o que lhes é pedido fazer mais sentido.[4]

Este cuidado revela-se, por exemplo, no enunciado da tarefa (Fig.2) que foi adaptado das Provas Nacionais de Aferição de 2001, do 6.º ano de escolaridade: "Sim, foi o avô que gosta muito de oferecer chocolatinhos à neta…foi ligado à realidade deles. Os próprios avós fazem-lhes esses miminhos".

Como se pode constatar, a adaptação feita por Beatriz remetia para um contexto mais familiar aos seus alunos. A história coloca-os no centro de uma história que pode ser a história deles. Além disso, a questão colocada era mais aberta do que a das provas de aferição, o que permitiria encontrar várias soluções em função do tamanho do chocolate. Desta forma, a professora enriqueceu a tarefa criando condições mais favoráveis a uma discussão matematicamente rica.

Beatriz apresenta a tarefa à turma, começando por lhes "contar", mais do que ler, a história que dá corpo ao problema. Ainda está a escrever no quadro o título da tarefa e já um aluno reage dizendo que é muito fácil. Beatriz lida com a intervenção salientando, implicitamente, a necessidade de reflexão: "Vocês (…) não se contentam com isso [tarefas muitas fáceis] (…) habituaram-me a mais… então tenho vindo a aumentar o grau de exigência (…). Talvez não seja assim tão fácil quanto parece". Em seguida, diz aos alunos que, em pares, devem encontrar soluções para o problema.

Apoiando os alunos no seu trabalho

Os alunos começam a trabalhar verdadeiramente entusiasmados e Beatriz percorre as carteiras apoiando-os e respondendo a perguntas que, de início, se prendem sobretudo com a interpretação do problema. Ouve-os, responde às suas questões e vai valorizando as ideias a desenvolver ou dando uma pista para fazer um aluno pensar numa questão.

Núria, que não era ouvida pelo colega, aborda-a para lhe perguntar se os chocolates tinham de ser iguais. Beatriz responde que podem ser ou não pois "não sabemos qual era o tamanho dos chocolates que o avô deu" e acompanha-a ao seu lugar incentivando-a a debater com o seu colega a ideia e reforçando, juntos de ambos, ser bom pensarem na questão daquela maneira. Após o trabalho de pares passa à apresentação e discussão dos raciocínios e verifica que todos se centram na ideia de os chocolates serem iguais e, por isso, o João ter comido mais chocolate do que a Maria. Consenso na turma, e muito entusiasmo por parte dos alunos, orgulhosos da sua resolução. Na Beatriz noto a sua deceção: "Então Núria e a tua ideia?".

Toca para o intervalo, os alunos saem e fazemos, como é usual, uma pequena reflexão partilhando ideias e sentimentos. Beatriz está desapontada com a tarefa e com a reação dos alunos, contrariamente ao que tinha acontecido em aulas anteriores em que manifestava abertamente o seu entusiasmo: "Eu queria que saíssem dali várias coisas e não saíam… só estavam concentrados na ideia de que os chocolates eram iguais e como tínhamos preparado a aula antecipadamente sabíamos que isso era apenas uma das hipóteses".

Face à desilusão de Beatriz, disse-lhe parecer-me natural os alunos responderem comparando as frações relativas à mesma unidade, pois essas tinham sido as ideias trabalhadas nas tarefas anteriores. Este era o momento do impasse e até de uma mudança, de um alargar do próprio conceito de fração e, portanto, naturalmente um momento que poderia tornar-se mais difícil

[4] Reflexão de Beatriz feita na sessão de trabalho 8 onde foi analisada a aula em que foi apresentada a tarefa. A quase totalidade dos extratos do discurso de Beatriz incluídos neste texto são provenientes desta sessão ou aula.

de gerir. E devolvi-lhe a questão: O que é que poderia fazer para chegar a trabalhar as ideias que estavam subjacentes à escolha desta tarefa?

Iniciada a aula, determinada e mais tranquila, escreve no quadro: "E se os chocolates forem de tamanhos diferentes?". Propôs, então, aos alunos que voltassem a pensar na tarefa. Estes trabalharam cerca de quinze minutos e depois passou-se à fase da discussão. Neste âmbito, chama ao quadro o par Núria e André. Para sua surpresa, pois tinha-lhe parecido, pela anterior conversa com Núria, que esta aluna punha a hipótese de nem sempre o João comer mais chocolate do que a Maria, constata que, apesar de terem considerado chocolates de tamanhos diferentes, a conclusão a que antes tinham chegado se mantém (Fig. 3). É nesta altura que surge o episódio apresentado em seguida.



Figura 3: A resolução que Núria e André apresentaram

Episódio: Há uma maneira da Maria comer o mesmo chocolate que o João

P: Se os chocolates forem iguais quem é que come mais?

Vários alunos: O João.

P: Porquê?

A1: Porque a metade é maior do que um quarto.

(...)

P: E se houvesse dois chocolates mas fossem de tamanhos diferentes?



Fig. 4 – a resolução de Núria

Núria: Professora, se fossem dois chocolates há uma maneira da Maria comer o mesmo chocolate que o João. Se o chocolate do João fosse mais pequeno e ele comesse só metade, e se o chocolate da Maria fosse normal, grande (aponta para a figura 4 que foi desenhando no quadro).

P: Todos perceberam?

Algumas vozes: Não!

P: Não? Nem todos estão a olhar atentamente para a Núria. Vamos ouvir a Núria que é ela que está a explicar.

Núria: Se o chocolate do João fosse mais pequenino que o da Maria… se fosse um chocolate mais pequeno que o outro, se calhar até podiam comer a mesma coisa.

P: E por que é que isto pode acontecer? Por que é que ao ter um chocolate mais pequeno o João pode comer o mesmo que o quarto de chocolate da Maria?

A3: Se a metade é maior que um quarto…

P: Mas porque é que então podem comer a mesma quantidade? (...) Por que é que metade do chocolate do João pode representar a mesma quantidade que um quarto do chocolate da Maria?

Núria: Por que este que é mais pequeno e a quantidade que o João come do mais pequeno pode ser igual… pode ser igual à quantidade que a Maria come … se o dela for o grande.

A6: Pois é professora, concordo!

A4: Se for assim, talvez eles comam a mesma quantidade.

P: Mas porquê? Por que é que pode ter comido o mesmo, ou até menos que a Maria? Como é que isso pode acontecer?

A1: Por que dividimos o chocolate do João em metades e o da Maria em quartos.

P: Então ter uma metade de um chocolate grande é o mesmo que ter metade de um chocolate pequeno?

A7: É mais pequena a parte do chocolate pequeno.

A1: Porque a minha unidade, o meu chocolate é mais pequeno.

P: O que podemos concluir? O que fez mudar as quantidades?

(Alguma indecisão)

P: Esta metade vale o mesmo que esta metade? (*aponta para um exemplo no quadro de duas metades de dois chocolates diferentes*)

Vários alunos: Não.

P: Porque é que não?

(Alguns murmúrios mas nenhuma voz se fez ouvir)

P: Então ter uma metade de um chocolate grande é o mesmo que ter metade de um chocolate pequeno?

Vários alunos: Não!

P: Então, o que é que podemos concluir?

A7: Porque um chocolate é maior e outro é mais pequeno…

P: Então, o que é que podemos concluir?

(Silêncio)

P: Vamos falar só da Maria está bem? *(Desenha dois chocolates um maior e outro mais pequeno e dividi-os em quatro partes)*. Um quarto do chocolate da Maria é igual a este bocado… *(aponta para o quarto do chocolate maior)*. Concordam que este quarto é maior do que o outro?

Vários alunos: Sim.

P: Porque é que um quarto de um chocolate pequenino e um quarto de um chocolate grande não é a mesma quantidade?

A3: O chocolate não é do mesmo tamanho.

A6: Um quarto de um chocolate pequeno é mais pequeno que um quarto de um chocolate grande.
(...)

Como este episódio revela, para Núria a questão da natureza relativa da fração foi uma intuição imediata. Para os colegas não, pois mantinham-se presos à ideia das partes tomando como ponto de referência a mesma unidade. A professora tentou acompanhar a ideia da aluna que claramente respondia às suas expectativas sem, contudo, deixar de "trazer consigo" os alunos que não viam ainda a possibilidade da mudança de unidade mesmo depois dessa hipótese ter sido considerada por todos.

Refletindo com Beatriz

No final da aula voltámos a conversar sobre as conclusões que se tinham tirado, sobre a reação dos alunos à nova situação colocada e os sentimentos e pensamentos de Beatriz. Estava notoriamente mais aliviada, embora cansada e um pouco insegura quanto a se todos teriam compreendido a ideia da natureza relativa da fração. Refere ter ficado com a sensação de alguns alunos continuarem a "olhar para uma metade como uma metade e para um quarto como um quarto" como um valor absoluto, como no caso dos números naturais. Diz "É preciso voltar aqui… mas de momento, senti-os cansados". Recordámos, então, que estávamos no início do trabalho com o conceito de número racional, que esta era a primeira tarefa da segunda fase da trajetória e que havia outras pensadas para desenvolver esta grande ideia. Beatriz refere que a tarefa doze da trajetória permitiria "trabalhar esta ideia com unidades discretas" recorrendo a "modelos como rebuçados, berlindes ou lápis", pelo que decide antecipá-la e apresentá-la "na próxima aula".

A meio da unidade "Números racionais não negativos" reunimos novamente para refletir sobre o desenvolvimento da trajetória real, avaliar a continuidade do trabalho a realizar e delinear possíveis alterações ao trajeto planeado. Ao perguntar a Beatriz qual a tarefa que considerava ter sido crucial no percurso realizado até ao momento, foi perentória:

> A discussão do João e da Maria". Foi a que correu pior de todas! Pela minha atitude de ser muito dirigida e aquela coisa… de ter criado uma expetativa e não ter acontecido. Havia várias hipóteses e mesmo havendo uma luzinha por parte de uma aluna, não seguiram essa ideia. (...) Era maior [a sua expectativa]… Que chegassem mais longe. A grande maioria só se limitou a uma hipótese.

A professora apercebeu-se que apesar de ter preparado esta tarefa antecipando respostas possíveis, só compreendeu a sua dificuldade e, paradoxalmente, o seu poder, em plena realização do trabalho com os alunos: "Foi um erro meu…pensar que era mais fácil!" Considerou que o facto de terem realizado esta tarefa na sequência da das baguetes talvez tivesse induzido os alunos a considerarem os chocolates de tamanhos iguais: "Nas baguetes nós estávamos a trabalhar com a mesma unidade para que a distribuição fosse justa! Se a unidade não fosse do mesmo tamanho o que aconteceria?".

Para Beatriz, o facto de os alunos não terem prontamente respondido ao problema, foi dececionante. No entanto, ao visualizar novamente a aula, toma consciência que a resposta dada era coerente com as grandes ideias trabalhadas, o que mostrava a compreensão que os alunos tinham, até ao momento, de fração e que lhes permitiu ter bases para discutir a ideia que se seguia: o todo importa, uma das grandes ideias referidas por Fosnot e Dolk (2002):

> Esse era o objetivo final da tarefa, uma grande ideia, a parte de um todo… um todo que pode ser diferente… eu queria que eles assumissem logo desde o início. Isso é bom, é ótimo e eu não dei valor a isso que é uma conquista fantástica (...) não a via como uma tarefa muito ambiciosa. Estava a vê-la como (...) muito condicionada a uma determinada resposta e tudo o mais… se bem que as respostas poderiam ser diversas (...) Quando a

> Núria me colocou a questão (...) [é que] eu fui vendo que os outros não a acompanhavam (...) Porque possivelmente não estava assim tão segura…

Beatriz só se apercebeu verdadeiramente da dificuldade da "grande ideia" para os alunos durante a aula. O momento de impasse vivido foi angustiante para a professora mas também foi a chave da compreensão que se foi desenvolvendo:

> Eu depois até vi que ao levantar o véu eles começaram a responder muito bem, a considerar outras hipóteses de resolver o problema, agora porque é que eu não esperei? Não sei… a minha atitude como professora… Eu quero as coisas imediatas não gosto de esperar…

Beatriz é muito reflexiva, questionando-se interiormente sobre as suas ações numa perspetiva de autorregulação. Referindo-se à antecipação das dificuldades sentidas pelos alunos considerou bom antecipá-las mas natural não se poder saber "toda a viagem antes de ter viajado" uma ideia que evoca uma metáfora de Lampert (2001) que compara o trabalho de ensino "à navegação de um pesado barco num imenso e tumultuoso mar" (p. 446). Explica ainda:

> Podemos antecipar muita coisa mas tudo não. Cada vez me apercebo mais que há caminhos que os alunos percorrem que nem sempre prevejo. Nesta tarefa, creio que por inconsciência, não antecipei certas coisas que levantaram, que tiveram influência noutras que daí advieram… com grande valor, não só para a noção de fração como do cálculo com frações.

Beatriz refere, também, o facto de o seu conhecimento sobre os números racionais se reportar essencialmente ao do seu tempo de aluna e da unidade "Números racionais não negativos" contemplar a construção do conceito de número racional a partir da noção de fração com uma abordagem diferente:

> Eu já dei o ano passado estas noções de fração (metade, terça parte, quarta parte) mas não relacionei com os decimais (…) e tinha boas notas [a Matemática] mas nunca mais estudei frações e agora tudo isto é novo, e não é como quando eu estudava.

Enfatiza, ainda, a necessidade do professor aprofundar o conhecimento profissional ao longo do seu percurso e destaca que uma das vias possíveis é desenvolver um contínuo trabalho de colaboração.

A concluir

Na sequência planeada, a tarefa "A discussão do João e da Maria" requer uma mudança de perspetiva relativamente às tarefas anteriormente exploradas. A comparação de duas frações, referenciadas a uma mesma unidade, era já simples para os alunos. A discussão gerada em torno desta tarefa deixa de ser óbvia se se considerar a hipótese de "o todo não ser o mesmo", de se estarem a comparar frações de quantidades diferentes. O conflito cognitivo gerado obriga a uma mudança na forma de pensamento relativamente aos problemas anteriores pois a mudança no tamanho do chocolate condiciona as quantidades consideradas. A ideia forte desta tarefa foi o trabalho com a natureza relativa da fração que Nunes e Bryant (2009) identificam como a principal dificuldade no entendimento do conceito de fração: "As frações causam dificuldades porque elas envolvem relações entre quantidades (...) [e] o ensino deve incluir um foco sobre as relações lógicas envolvidas neste conceito" (p. 1)

A professora considerou esta tarefa verdadeiramente desafiante para ela, pois descobriu, durante o trabalho com os alunos, potencialidades que não vislumbrara antes. Ao sentir as

suas dificuldades, numa situação que lhe pareceu à partida não levantar grandes questões, sentiu desilusão em termos emocionais assim como alguma insegurança. O conflito cognitivo gerado internamente - "como sair desta situação de impasse?", uma vez que os alunos estão centrados na resposta óbvia e "não ouvem as vozes dissonantes de um ou dois colegas que apontam intuitivamente para outra solução", provoca-lhe sentimentos de desalento e insatisfação mas, simultaneamente, serve de motor para uma mudança na sua própria atitude levando-a a repensar o seu papel na orientação da discussão. A tarefa desenvolvida revelou-se poderosa não por ter sido fácil para os alunos, mas por ter alguma complexidade e gerar neles "alguma incoerência face ao que tinham trabalhado antes". Beatriz refere que as dificuldades experienciadas podem ser contornadas com um bom conhecimento dos conteúdos matemáticos a trabalhar e salienta a necessidade de reconstrução do seu próprio conceito.

Ao colocar a abordagem ao número racional a partir da construção do conceito de fração no 1.º ciclo, não é possível esquecer que é a primeira vez que estes professores se defrontam com este desafio. Precisamente num domínio tradicionalmente difícil para todos, alunos e professores, mas um domínio crucial, na aprendizagem dos números, do cálculo e da álgebra.

Referências

Charalambos, C. & Demetra Pitta-Pantazi, D. (2005). Revisiting a theorical model of fractions: implications for teaching and research. In Chick, H. L. & Vincent, J. L. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 233-240). Melbourne: PME.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). New York: MacMillan.

Fi, C. & Degner, K. (2012). Teaching through problem solving. *Mathematics Teacher, 105*(6), 455-458.

Fosnot, C. & Dolk, M. (2002). *Constructing Fractions, Decimals and Percents.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (Eds) (2001). *Adding It Up: Helping Children Learning Mathematics.* Washington: National Academy Press.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proporcional reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 629-667). Reston, VA: NCTM.

Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. New Haven, CT: Yale University Press.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME – DGIDC.

Moss, J. & Case, R. (1999). Developing Children's Understanding of the Rational Numbers: A New Model and an Experimental Curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30 (2), 122-147.

Nunes, T. & Bryant, P. (2006). Fractions: difficult but crucial in mathematics learning. *Teaching and Learning Research Programme*, 13.

Pirie, S., & Kieren, T. (1994b). Growth in mathematical understanding: How can we characterize it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 165-190.

Stein, M. K., Smith, M. Henningsen, M. & Silver, E. (2007). How curriculum influences student learning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 319-369). Reston, VA: NCTM.

Van de Walle, J. & Lovin, L. (2006). *Teaching Student-Centered Mathematics Grades k-3.* Boston: Pearson.

AS TAREFAS E A COMUNICAÇÃO NUMA ABORDAGEM EXPLORATÓRIA NO ENSINO DOS NÚMEROS RACIONAIS[1]

Marisa Quaresma
Escola Básica José Saramago, Poceirão, Palmela
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
mq@campus.ul.pt

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

Resumo: Este texto descreve e analisa as práticas letivas usadas em duas aulas de uma unidade de ensino de cunho exploratório que pretendia levar os alunos a desenvolver a sua compreensão da noção de número racional e da sua comparação e ordenação e a sua capacidade de resolução de problemas com racionais, dando especial atenção à natureza das tarefas e da comunicação. A metodologia é qualitativa e interpretativa, com um formato de *design research*. Os dados foram recolhidos por observação participante, com gravação vídeo e áudio, recolha dos trabalhos dos alunos e notas de campo analisados com análise de discurso. Os resultados evidenciam a possibilidade de uma prática profissional de cunho exploratório na sala de aula, tendo por base tarefas de natureza diversificada, bem como um discurso de cunho dialógico, pontuado por questões de inquirição.

Palavras-chave: Abordagem Exploratória, Comunicação, Tarefas, Números Racionais, Práticas Profissionais

Introdução

Os números racionais constituem um dos tópicos que mais dificuldades colocam aos alunos do 2.º ciclo do ensino básico. Particularmente problemático é o trabalho na representação em fração que, até há bem pouco tempo só era introduzida neste ciclo. Deste modo, o seu ensino coloca um desafio acrescido aos professores, constituindo um terreno estimulante para o estudo das suas práticas profissionais. Neste contexto, o presente trabalho tem por base uma unidade de ensino que pretende levar os alunos a desenvolver a sua compreensão da noção de número racional, da sua comparação e ordenação e a sua capacidade de resolução de problemas com números racionais. Para isso trabalha-se simultaneamente com as várias representações dos números racionais, nos diferentes significados, em diferentes contextos e tipos de grandezas, em tarefas de natureza diversificada e usando comunicação dialógica que valoriza as questões de inquirição. O objetivo deste texto é descrever e analisar as práticas letivas usadas em duas aulas desta unidade de ensino de cunho exploratório, com especial atenção à natureza das tarefas e da comunicação.

[1] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

Ensino-aprendizagem dos números racionais

As representações desempenham um papel fundamental no trabalho com números racionais. Uma representação é uma configuração de sinais, caracteres, ícones ou objetos que podem, de alguma forma, designar ou substituir alguma coisa (Goldin, 2003) e representar um número significa atribuir-lhe uma designação, sendo de notar que um número pode ter várias designações. Por exemplo, um número racional pode ser representado por um numeral decimal, uma fração, uma percentagem, um ponto na reta numérica ou em linguagens natural ou pictórica. Os alunos precisam de saber trabalhar com cada uma destas representações e estabelecer relações entre elas. Segundo o NCTM (2007):

> Os alunos necessitam de desenvolver e utilizar uma variedade de representações de ideias matemáticas para modelar situações problemáticas, para investigar relações matemáticas, e justificar ou refutar conjeturas. […] Estas representações funcionam como ferramentas para raciocinar e resolver problemas ajudando, igualmente, os alunos a comunicarem o seu raciocínio a terceiros (p. 240).

Para McIntosh, Reys e Reys (1992), o sentido de número racional inclui o reconhecimento que estes números podem ser representados de muitas formas, e que, para resolver certos problemas, algumas representações são mais úteis do que outras. Post, Cramer, Behr, Lesh e Harel (1993) sugerem que a compreensão de número racional está relacionada com flexibilidade na conversão entre diferentes representações, nas transformações dentro de cada representação e na independência das representações concretas. Defendem, ainda, que os alunos com pouca experiência na utilização e na conversão entre diferentes representações têm grandes dificuldades na abstração de informações das representações concretas, na realização de conversões e nas operações com símbolos matemáticos.

No Programa de Matemática anteriormente em vigor em Portugal a primeira representação de número racional trabalhada é o numeral decimal. No entanto, os alunos apresentam diversas dificuldades na compreensão desta representação que, segundo Owens (1993), se devem ao facto de se ensinar a trabalhar com numerais decimais antes de estes compreenderem o próprio sistema de numeração decimal. Este autor defende que a representação em numeral decimal e em fração devem ser trabalhadas concomitantemente, para que o aluno perceba que as duas traduzem a mesma situação e pertencem ao mesmo conjunto numérico.

A representação em percentagem de número racional, faz parte do quotidiano dos alunos, o que, como referem Parker e Leinhardt (1995), constitui um aspeto importante a ter em conta. Segundo estes autores, embora seja um conceito difícil de aprender, a percentagem constitui uma representação universal que faz a ligação entre situações do "mundo real" e os conceitos matemáticos ligados às estruturas multiplicativas. Pelo seu lado, Cox (1999) argumenta que as representações pictóricas são instrumentos úteis para o raciocínio, pois podem representar a informação de um problema e facilitar a mudança de estratégias de resolução. No seu estudo sobre as representações usadas na resolução de problemas, concluiu que os alunos têm diferentes formas de exteriorizar o seu raciocínio. Alguns produzem representações parciais, que parecem funcionar apenas como ajuda de memória, enquanto outros constroem representações que parecem ter um papel central no seu raciocínio. No que diz respeito à representação verbal, Streefland (1991) menciona que é importante que as frações sejam trabalhadas a partir dos seus nomes (metade, um terço, um quarto, etc.). Geralmente, os alunos começam por resolver questões usando uma mistura de representações verbais e pictóricas, nomeadamente desenhos ou esquemas, que servem de base a estratégias que permitem a ligação entre a interpretação da informação do enunciado e a respetiva solução.

Tarefas e comunicação como elementos das práticas letivas

As práticas profissionais do professor na sala de aula de Matemática têm dois elementos estruturantes fundamentais: (i) as tarefas propostas aos alunos, com as representações e materiais que lhes estão associados, e (ii) o tipo de comunicação que ocorre na sala de aula, associado às normas e papéis assumidos por alunos e professor.

Em muitas salas de aula a tarefa que predomina é o exercício, ou seja, uma questão de dificuldade reduzida, em que os alunos têm que aplicar um método de resolução já aprendido, e que se resolve habitualmente em poucos minutos. Num balanço de vários estudos realizados no fim dos anos de 1970 nos EUA, Fey (1981) indica que se trata da tarefa, de longe, mais frequente nas aulas de Matemática. Nos últimos anos tem-se procurado caracterizar outros tipos de tarefa que possam ser úteis na aula de Matemática. Assim, tem-se considerado o valor dos problemas (Pólya, 1945), dos projetos (Abrantes, 1995) e, mais recentemente das tarefas de exploração e investigação (Ponte, 2005). Na verdade, faz toda a diferença propor aos alunos a resolução de tarefas de aplicação de conhecimentos já aprendidos ou tarefas que requerem um esforço deliberado de compreensão e a formulação de uma estratégia de resolução. Deste modo, a importância decisiva da escolha das tarefas para a aprendizagem dos alunos é uma ideia central da educação matemática (NCTM, 2007; Stein, Remillard & Smith, 2007).

As tarefas podem distinguir-se em muitos aspetos, incluindo o contexto, que pode ser matemático ou não matemático e familiar ou não familiar, o modo de apresentação, que pode ser oral, escrito e com e sem recurso a materiais e o tempo previsível para a sua realização. Ponte (2005) propõe duas dimensões fundamentais para a análise das tarefas, a estrutura (aberta/fechada) e o grau de complexidade, argumentando que tarefas de diferentes tipos têm um papel próprio a desempenhar no processo de ensino-aprendizagem. Stein, Remillard e Smith (2007), pelo seu lado, categorizam as tarefas em dois grandes grupos: com nível cognitivo elevado e reduzido. Chamam a atenção que, por vezes, uma tarefa é proposta a um nível cognitivo elevado mas, depois, com o decorrer do trabalho, devido a uma sugestão ou esclarecimento do professor, o nível cognitivo decai abruptamente, mudando a natureza da tarefa e o seu valor para a aprendizagem.

A comunicação que se desenvolve na sala de aula é outro elemento estruturante das práticas profissionais dos professores. Numa comunicação unívoca existe uma voz que prevalece sobre todas as demais. Em contrapartida, na comunicação dialógica participam diversos interlocutores num nível de relativa igualdade. Em muitas aulas predomina claramente a comunicação unívoca. No entanto, Ruthven, Hofmann e Mercer (2011) consideram que a comunicação dialógica é possível em situações de ensino desde que o professor assuma "de modo sério diferentes pontos de vista (…), encorajando os alunos a falar de modo exploratório, o que apoia o desenvolvimento da compreensão" (p. 4-81).

A investigação educacional há muito assinalou um tipo de comunicação muito frequente nos contextos de ensino, a sequência triádica conhecida por IRA (Iniciação-Resposta-Avaliação) (Franke, Kazemi & Battey, 2007). O professor começa por fazer uma pergunta (Iniciação), a que se segue uma Resposta de um aluno, que, por sua vez, dá origem a uma Avaliação do professor. Este tipo de comunicação deixa pouca margem para a participação criativa dos alunos. No entanto, Ruthven, Hofmann e Mercer (2011) sugerem que ele não é necessariamente incompatível com a fala dialógica, considerando que "promover o discurso interativo, multívoco e dialógico depende de se usar a estrutura triádica de formas particulares, tais como mudando da avaliação autoritária [no passo 3] para a promoção de mais reflexão e argumentação" (p. 4-82).

Um dos aspetos fundamentais da comunicação são as questões do professor. Entre estas, Ponte e Serrazina (2000) referenciam as questões de confirmação (para as quais se sabe de antemão a resposta), focalização (para captar a atenção de todos os alunos) destacando em especial o papel das questões de inquirição (que admitem uma variedade de respostas legítimas). Pelo seu lado, Bishop e Goffree (1986) discutem o processo de negociação de significados matemáticos e Franke, Kazemi e Battey (2011) sublinham a importância de processos como redizer *(revoicing)*, apoiando o desenvolvimento da linguagem dos alunos.

As tarefas e a comunicação são dois importantes elementos das práticas profissionais dos professores que, segundo Ponte, Quaresma e Branco (2012) podem ser analisadas tanto numa perspetiva sociocultural como cognitivista. Numa perspetiva sociocultural procuramos identificar (i) a natureza da atividade, ou seja, os motivos do professor, o modo como estes originam os objetivos que pretendem alcançar e como são concretizados através de diversas ações profissionais e (ii) a estrutura da atividade observando as ações e operações envolvidas. De um ponto de vista cognitivista, damos atenção igualmente às tarefas e à comunicação nos planos de ação do professor e nas decisões que toma.

Metodologia de investigação

Este trabalho foi realizado no âmbito de uma experiência de ensino, uma modalidade de *design research* (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, & Schaube, 2003), que tem por base uma unidade de ensino concebida a partir da conjetura geral de ensino-aprendizagem segundo a qual os alunos desenvolvem a sua compreensão da noção de número racional e da sua comparação e ordenação, e a sua capacidade de resolução de problemas com racionais ao trabalharem simultaneamente as várias representações, nos diferentes significados, com diferentes contextos e tipos de grandezas em tarefas sobretudo de natureza exploratória e numa comunicação dialógica que valoriza as questões de inquirição. Sendo o propósito desta comunicação descrever e analisar as práticas letivas usadas em duas aulas desta unidade de ensino, damos especial atenção ao discurso desenvolvido na sala de aula.

A elaboração da unidade de ensino tem por base as orientações curriculares do programa de Matemática (ME, 2007) e a literatura de investigação sobre os números racionais. Assim, procuramos: (i) promover a flexibilidade na conversão entre e dentro das várias representações de número racional, com destaque para a decimal, fração e pictórica, mas incluindo também as representações percentagem e verbal; (ii) trabalhar com os vários significados de número racional, com destaque para os significados parte-todo e medida, mas incluindo também o quociente, operador e razão; e, muito especialmente, (iii) usar tarefas sobretudo de natureza exploratória, formuladas em contextos do quotidiano dos alunos, mas também tarefas em contexto matemático, envolvendo diferentes tipos de grandezas (contínuas e discretas) e dando atenção à construção não só das partes mas também das unidades.

Antes da planificação da unidade realizámos uma aula de diagnóstico para identificar os conhecimentos e dificuldades dos alunos. Estes mostraram dificuldade na linguagem própria das frações, dizendo por exemplo “segunda parte” para se referirem a um meio e evidenciaram algumas dificuldades na compreensão dos numerais decimais. Contudo, apoiando-se na ideia de divisão, mostraram bom desempenho na utilização de frações unitárias como operadores. Considerámos por isso, necessário trabalhar aspetos do sistema de numeração decimal e da ordenação dos numerais decimais, como base para uma compreensão mais profunda das noções a estudar.

A unidade de ensino realiza-se a partir de sete fichas (ver Quaresma, 2010). Valorizamos as estratégias intuitivas e informais dos alunos, bem como os seus conhecimentos anteriores. Assim, partimos das representações de número racional que eles já conhecem – a representação pictórica e em numeral decimal – para, a partir daí, introduzir, gradualmente, o trabalho com a representação em fração. A introdução de novas representações não implica deixar de usar as anteriores, mas sim adquirir flexibilidade para escolher a representação mais eficaz em cada contexto ou situação problemática. Além disso, procuramos que os problemas propostos envolvam, tanto quanto possível, contextos significativos para os alunos (Gravemeijer, 2005).

A realização das tarefas na sala de aula envolve três fases: apresentação da tarefa pelo professor e interpretação coletiva da tarefa; exploração pelos alunos e discussão coletiva e síntese final (Ponte, Oliveira, Cunha & Segurado, 1998). Na exploração das tarefas predomina o trabalho em grupo ou em pares. Os momentos de apresentação e interpretação e de discussão coletiva constituem oportunidades para negociação de significados matemáticos e para construção de novo conhecimento (Ponte, 2005).

Dada a natureza do estudo, centrado na compreensão das práticas letivas usadas numa unidade de ensino sobre números racionais, a metodologia de investigação adotada segue uma abordagem qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994), numa lógica de observação participante (Jorgensen, 1989). Trata-se de uma investigação realizada na prática profissional da primeira autora, que atuou simultaneamente como professora e como investigadora.

A turma do 5.º ano é composta por 22 alunos, 13 rapazes e 9 raparigas, a maioria com 10 anos mas alguns com 11 ou 12 anos, que no 1.º ciclo seguiu o programa de matemática de 1991. Os alunos revelam poucos hábitos de trabalho, nomeadamente em pares ou em grupo e apresentam um nível de empenho bastante heterogéneo, sendo recetivos a novos tipos de tarefa e mantendo um ritmo de trabalho equilibrado. Todas as aulas da unidade de ensino foram registadas em vídeo e áudio. Foram também recolhidos e analisados os trabalhos escritos realizados na aula pelos alunos nas diversas tarefas. Além disso, como registo de observação foram feitas anotações num diário de bordo sobre o modo como decorreram as aulas. Devido à natureza do estudo, a análise de dados assumiu um carácter essencialmente descritivo e interpretativo, através de análise de discurso (Fiorentini & Lorenzato, 2006). Tendo em conta os objetivos do estudo e a revisão da literatura foram consideradas as seguintes categorias de análise: (i) natureza das tarefas; e (ii) tipo de discurso com especial atenção ao questionamento e à negociação de significados.

Momentos de trabalho na sala de aula

Neste ponto apresentamos dois episódios da sala de aula, um do início e outro do final da unidade de ensino, analisando as práticas profissionais que lhes estão associadas, através dos seus elementos estruturantes – tarefas e comunicação.

Tarefa 1

A tarefa "Dobras e mais dobras" (figura 1) foi proposta na primeira aula da unidade de ensino[2]. Com a realização desta tarefa pretendíamos introduzir a linguagem associada aos números racionais em diferentes representações (fração, numeral decimal e percentagem) e

[2] Apresentamos aqui apenas parte da tarefa. Para mais detalhes, ver Quaresma (2010).

significados (parte-todo e medida) e comparar números racionais representados de diferentes formas. Estes foram os motivos que nos levaram a escolher esta tarefa.

1. Encontra três tiras de papel geometricamente iguais. Dobra-as em partes iguais:

- a primeira em duas;
- a segunda em quatro;
- a terceira em oito.

Depois de dobrares cada uma das tiras, representa de diferentes formas as partes obtidas.

2. Compara as partes das três tiras obtidas por dobragem. Regista as tuas conclusões.

Figura 1. Tarefa Dobras e mais Dobras (Menezes, Rodrigues, Tavares & Gomes, 2008).

A questão 1 pede explicitamente para fazer diversas dobragens, mas o pedido para representar as partes das tiras "de diferentes formas" permite aos alunos uma multiplicidade de interpretações. A questão 2 é também muito aberta ao pedir para comparar as partes obtidas e para "tirar conclusões". Deste modo, a necessidade de interpretação e de transformação das questões propostas em questões explícitas proporciona uma atividade exploratória por parte dos alunos.

Os alunos, que trabalham em seis grupos de quatro ou cinco, mostram de imediato dificuldade na interpretação da questão 1, tornando necessário um momento de discussão para se negociar o que significa "representar de diferentes formas". Assim, a professora recorre a um exemplo. Representa a tira dividida ao meio no quadro e pede aos alunos que digam que parte da tira está pintada. Usando a representação verbal, todos dizem que está pintada "metade da tira". A professora insiste noutra forma de representar aquela parte e, a partir da representação verbal "metade", alguns alunos sugerem a representação decimal 0,5. A professora pede ainda outras formas de representação e dois alunos indicam a fração "um de dois", que a professora rediz como "um meio". Finalmente, como os alunos não se lembram de mais nenhuma representação, a professora pergunta: "e se eu quisesse representar em percentagem? Também podia?" Aqui a maior parte diz de imediato que é 50%.

Também na questão 2 há necessidade de negociação do significado do enunciado pois os alunos não compreendem o que é "comparar as três partes obtidas". Neste caso, a professora começa por mostrar as duas primeiras tiras ($\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$) e pede aos alunos que as comparem e alguns concluem logo que $\frac{1}{4}$ "é metade" de $\frac{1}{2}$". A realização de negociações deste tipo é uma condição fundamental da aprendizagem dos alunos. O plano de ação previsto para a aula já previa que os alunos pudessem ter dificuldade em interpretar a tarefa e que, se isso acontecesse, a professora faria um momento de discussão coletiva.

No início da discussão coletiva da questão 1 a professora pede a cada grupo que afixe o seu trabalho no quadro e pede ao primeiro grupo que o apresente à turma (Figura 2):

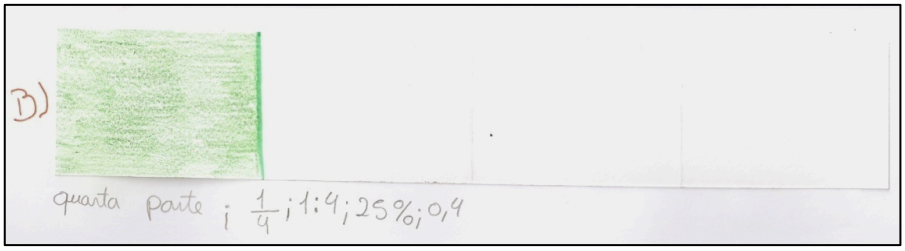


Figura 2. Resposta do grupo de Diana, Questão 1b)

Os alunos não se apercebem do erro na representação decimal (0,4 em vez de 0,25) e a professora decide esperar pela resposta dos grupos seguintes, prosseguindo com a apresentação do grupo de Tiago (Figura 3):

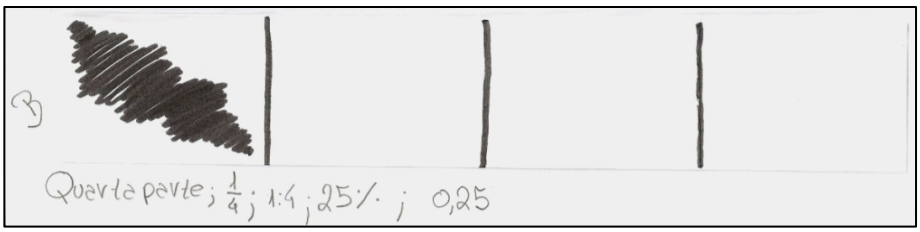


Figura 3. Resposta do grupo de Tiago, Questão 1b)

Rapidamente há alunos que se apercebem do erro da resposta do primeiro grupo e exclamam: "Não! Está mal…"

Professora: O que é que está mal?

Rui: É o 0,25…

Professora: Porquê?

Rui: Porque é a quarta-parte.

Daniel: É 0,25 porque é a metade do primeiro. O primeiro era 50, se fizermos a metade é 25.

André: Oh professora! Eu acho que é o 0,25 porque é a quarta-parte do 100. Porque 25 vezes 4 dá 100.

Note-se como, a seguir à pergunta de inquirição ("porquê?") da professora, diversos alunos apresentam explicações sucessivamente mais refinadas.

Na questão 2, todos os grupos estabelecem diversas relações entre as partes mas só alguns conseguem comparar todas as tiras. Todos os grupos usam a linguagem verbal para exprimir essas relações (figura 4):

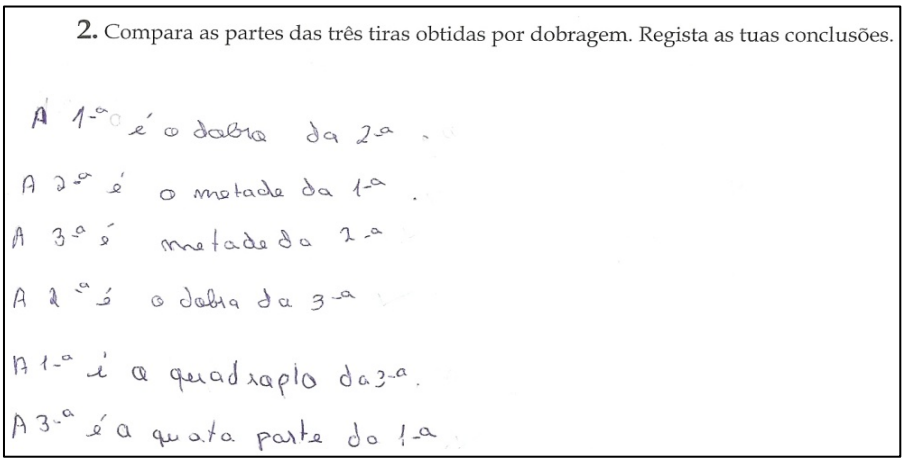


Figura 4. Resposta do grupo de Mariana, Questão 2

André e os colegas, para além das relações simples, "metade" e "dobro", estabeleceram relações mais complexas de "quádruplo" (tendo por base "dobro" do "dobro") e "quarta parte" ("quarta metade" no dizer de um deles, para significar "metade de metade"). Na discussão desta questão a professora pede a cada grupo que indique uma das relações que encontrou. Como os alunos só usam a representação verbal, durante a discussão, pede-lhes que usem também a linguagem matemática:

> Daniel: A relação entre o primeiro e o segundo, é que o segundo é metade do primeiro.
>
> Professora: Como é que eu posso escrever isso utilizando números? Como é que eu faço a metade?
>
> André: Dividir por 2.
>
> Rui: Um de quatro é igual a metade a dividir por 2.
>
> André: A *b* é o dobro da *c*.
>
> Professora: Como é que eu escrevo isso?
>
> André: Um de quatro é o dobro.

Apesar das dificuldades apresentadas, os alunos encontram diversas relações entre $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{8}$ usando, essencialmente, a representação pictórica das tiras. Conseguem comparar as três frações apresentadas, evoluindo na compreensão dos números racionais, particularmente no que respeita ao significado parte-todo e à compreensão da magnitude de um número racional. Conseguem comparar as três frações utilizando a linguagem verbal mas mostram dificuldades na utilização da linguagem própria das frações, o que é natural dado ter sido a primeira aula de ensino formal deste tópico.

Note-se o estilo de questionamento da professora, pontuado por questões de inquirição ("vens explicar…", "o que é que está mal?", "porquê?", "como é que eu escrevo isso?"…). Assinale-se, também o seu cuidado em ajudar os alunos a desenvolver a sua linguagem matemática, redizendo as suas intervenções ("um meio" como outra forma de dizer "um de dois" e "um oitavo" como "um traço oito"). Finalmente, registe-se como a cultura da sala de aula já integrou a noção que os alunos podem contribuir com diferentes respostas e discordar e argumentar uns com os outros. No decurso deste episódio foi negociado o significado de "representar", os alunos puderam trabalhar com diferentes representações de um mesmo número racional, foi ajustada a sua linguagem e foram recordados conhecimentos dos quais estavam esquecidos (representações decimal e percentagem).

A atividade da professora foi no sentido de criar condições para o trabalho exploratório dos alunos, tendo por base a tarefa proposta, marcadamente aberta, e o estilo de comunicação usado, de cunho dialógico e com frequentes questões de inquirição. O plano de ação previa segmentos alternados de trabalho em coletivo e em pequeno grupo e as principais decisões dizem respeito ao momento de transitar de um segmento para outro, bem como ao modo de conduzir a comunicação.

Tarefa 2

A tarefa "Colecionando" (figura 5) foi proposta na sexta aula. Com a sua realização visávamos (motivos) introduzir a equivalência de frações, nos significados parte-todo e operador, reconstruir a unidade e as partes e comparar uma grandeza com outra tomada como unidade. É uma situação contextualizada, em que a informação é dada na representação verbal e a resposta é pedida em fração. Na questão 1 pede para utilizar a fração como operador para construir a parte. A questão 2 pede para representar $\frac{9}{12}$ por uma fração, possibilitando o

surgimento de frações equivalentes. A questão 3 pede para reconstruir a unidade a partir de uma parte. Esta é a primeira tarefa proposta aos alunos que apresenta uma situação de operador com grandezas discretas representando assim uma situação nova para eles.

Q1. O Carlos coleciona tampinhas de garrafas de água. Quando tinha 6 tampinhas perdeu dois sextos das tampinhas. Quantas tampinhas perdeu? Podes resolver utilizando palavras, desenhos, material, esquemas ou cálculos.

Q2. O amigo do Carlos tinha 12 tampinhas e deu 9 ao Carlos. Que fração das suas 12 tampinhas deu ao Carlos? Podes resolver utilizando palavras, desenhos, material, esquemas ou cálculos.

Q3. O Carlos continuou a colecionar tampinhas de garrafas de água. Passado algum tempo, três tampinhas correspondiam a um quarto do número total de tampinhas da sua coleção. Quantas tampinhas já tinha o Carlos? Podes resolver utilizando palavras, desenhos, material, esquemas ou cálculos.

Figura 5. Tarefa Colecionando (Monteiro & Pinto, 2007).

Os alunos não manifestam dificuldades na realização da questão 1, fazendo a correspondência entre o denominador da fração e o total de tampinhas existentes:

> Nuno: Se ele tinha seis tampinhas e perdeu $\frac{2}{6}$, então perdeu duas tampinhas.
>
> Professora: Explica lá como é que pensaste?
>
> Nuno: Então $\frac{2}{6}$ são dois de seis. Se ele tinha seis, perdeu duas das seis.

Como o denominador do operador corresponde à totalidade de tampinhas, os alunos resolvem esta questão no significado parte-todo e não no significado operador. Note-se a questão de inquirição da professora ("Explica lá…"), formulada com o objetivo de levar Nuno a explicitar a sua estratégia.

Na questão 2 a maioria dos alunos opta pela fração mais simples partindo do enunciado da questão, indicando "nove de doze" o que a professora rediz como "nove doze avos". Miguel é único aluno da turma que consegue ir um pouco mais além, percebendo que $\frac{9}{12}$ também pode ser representado pela fracção equivalente $\frac{3}{4}$ (figura 6):

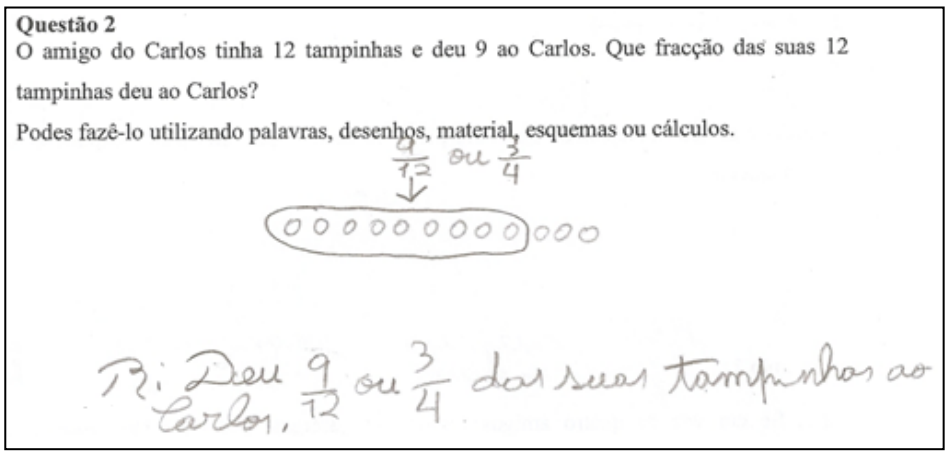


Figura 6. Resposta de Miguel, Questão 2).

Miguel: Ou então podia ser 3 de 4. É o mesmo.

Professora: Então explica lá isso a quem não está a perceber.

[…]

Miguel: Isso ai é como se fizéssemos 3+3+3+3. É 12… (...). Se nós fizéssemos assim, ele deu 9 daquilo… São 3 dos 4 conjuntos de 3. Nós tirávamos 9 mas depois ainda sobraram mais 3 tampas. É como se fosse 3 de 4.

Professora: Então isto (3 tampinhas) representa que parte do todo?

Turma: A quarta parte.

Leonor: Sim, é como se fosse 3 tampinhas $\frac{1}{4}$, 6 tampinhas $\frac{2}{4}$…

Professora: Isto tudo (6 tampinhas) $\frac{2}{4}$.

Leonor: O que ele deu, as nove tampinhas, representam $\frac{3}{4}$.

Professora: E tudo $\frac{3}{4}$ …

Leonor: Os 9 que ele deu são $\frac{3}{4}$ das 12 tampinhas.

Miguel reconheceu que a fração $\frac{9}{12}$ era equivalente à fração mais simples $\frac{3}{4}$. No entanto, mostra dificuldade em explicar à turma a forma como pensou, muitos colegas não compreendem o que ele lhes está a tentar explicar, mostrando dificuldade na compreensão das unidades compostas. A professora apercebe-se que se trata de uma oportunidade para salientar a noção de equivalência de frações e toma a decisão de explorar a situação em profundidade. Assim, tenta que o aluno explicite melhor a sua ideia usando a linguagem dos números racionais até que Leonor compreende a descoberta do colega e começa também a explicar "é como se 3 tampinhas fossem $\frac{1}{4}$".

Em contrapartida os alunos não apresentaram dificuldades na realização da questão 3. Na sua discussão, a professora começa por pedir a Luís que explique à turma como resolveu a tarefa uma vez que tinha efetuado uma representação pictórica interessante que fazia a ligação com a discussão anterior (figura 7):

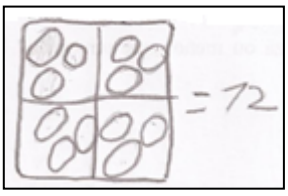


Figura 7. Resposta de Luís, Questão 3)

Luís: Ou seja, se o número três é a quarta parte da quantidade que ele tinha, tínhamos que fazer quatro vezes três.

Professora: Porquê?

Luís: Porque as 3 tampinhas eram a quarta parte da quantidade que o Carlos tinha.

Professora: Quanto é que era o todo? Quantos quartos eram o todo?

Luís: Quatro.

Professora: Muito bem, então em cada quarto tínhamos 3 tampinhas…

Luís: E era 4 vezes 3.

Rui: Eu fiz só a conta 4x3.

Esta tarefa, ao contrário da anterior, tem um caráter fechado. Procurávamos que, através de questões explicitadas com clareza, os alunos lidassem com a reconstrução da unidade e pudessem, eventualmente, confrontar-se com ideias novas, como de facto veio a acontecer com a noção de equivalência de frações. A atividade da professora é marcada pela condução de uma de comunicação que é, mais uma vez, pautada por questões de inquirição, ao mesmo tempo que, quando apropriado, vai redizendo as afirmações dos alunos no sentido de os levar à apropriação da linguagem matemática. O plano de ação, mais uma vez, previa segmentos alternados de trabalho em coletivo e em pequeno grupo, sendo as principais decisões relativas à transição de segmentos e ao modo de conduzir a comunicação, nomeadamente no questionamento da ideia de Miguel.

Conclusão

Em ambos os casos, a atividade da professora procurou favorecer o trabalho exploratório dos alunos, tendo por base as tarefas propostas e usando um estilo de comunicação de cunho dialógico pontuado por questões de inquirição e pelo redizer da fala dos alunos para os apoiar na apropriação da linguagem matemática. Também em ambos os casos, o plano de ação incluía segmentos alternados de trabalho em coletivo e em pequeno grupo, reportando-se as principais decisões aos momentos de transição, e ao modo de conduzir a comunicação.

Os episódios apresentados evidenciam a possibilidade de uma prática profissional na sala de aula de cunho exploratório (Ponte, 2005), em que os alunos se envolvem em atividade matemática, procurando inventar estratégias para resolver as tarefas propostas e chegando, por vezes, à construção de conceitos, como foi o caso da noção de equivalência de frações, na tarefa 2. Neste tipo de ensino, o trabalho do professor é fundamental, primeiro na seleção das tarefas, tendo em atenção que os diferentes tipos de tarefa devem coexistir na sala de aula e que cada um tem um papel específico na aprendizagem dos alunos. As tarefas de natureza aberta, como as explorações (como na tarefa 1), proporcionam oportunidades importantes de aprendizagem, favorecendo a negociação de significados, a construção de conceitos e a aprendizagem de representações. No entanto, mesmo tarefas de natureza fechada (como a tarefa2) podem proporcionar oportunidades de aprendizagem interessantes e de construção de conceitos. Cabe ao professor saber quando e como usar uma e outras. Depois, durante a realização das tarefas, é importante que o professor identifique momentos em que é necessário negociar significados para que os alunos compreendam os conceitos matemáticos e se mantenham envolvidos na realização das tarefas. A comunicação de tipo dialógico, pontuada por questões de inquirição do professor, uma vez instituída na sala de aula, permite aos alunos exprimir os seus raciocínios, argumentando uns com os outros. Verifica-se, também, ser fundamental, que o professor ajude, permanentemente, os alunos a evoluir na sua linguagem matemática (Franke *et al*., 2007). Deste modo, a natureza das tarefas e da comunicação na sala de aula revelam-se aspetos marcantes deste tipo de práticas letivas, cujo alcance será interessante investigar noutros temas e noutros níveis de ensino.

Referências

Abrantes, P. (1995). Trabalho de projecto e aprendizagem da Matemática. In *Anais do II CIBEM* (pp. 13-31). Blumenau.

Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: Reidel.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

Cox, R. (1999). Representation construction, externalised cognition and individual differences. *Learning and Instruction*. V.9, 343- 363.

Fey, J. T. (1981). *Mathematics teaching today: Perspectives from three national surveys*. Reston, VA: NCTM.

Fiorentini, D., & Lorenzato, S. (2006). *Investigação em educação matemática: Percursos teóricos e metodológicos*. Campinas: Autores Associados.

Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Understanding teaching and classroom practice in mathematics. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 225-256). Greenwich, CT: Information Age.

Goldin, G. A. (2003). Representation in school mathematics: A unifying research perspective. In J. Kilpatrick, W. G Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 275-285). Reston, VA: NCTM.

Gravemeijer, K. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83-101). Lisboa: APM.

Jorgensen, D. L. (1989). *Participant observation: A methodology for human studies*. Newbury Park, NJ: Sage.

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12(3)*, 2-8 & 44.

Menezes, L., Rodrigues, C., Tavares, F., & Gomes, H. (2008). *Números racionais não negativos: Tarefas para 5.º ano*. Lisboa: DGIDC.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: DGIDC. disponível em http://sitio.dgidc.minedu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf

Monteiro, C., & Pinto, H. (2007). *Desenvolvendo o sentido do número racional*. Lisboa: APM.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Parker, M., & Leinhardt, G. (1995). Percent: A privileged proportion. *Review of Educational Research*, *65*(4), 421-481.

Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton: Princeton University Press.

Owens, D. T. (1993). Teaching and learning decimal fractions. In D. T. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: High school mathematics* (pp. 159-178). Reston: NCTM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha, H., & Segurado, I. (1998). *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: IIE.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Branco, N. (2012). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Avances en Investigación en Educación Matemática, 0*.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática para o 1.º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Universidade Aberta.

Post, T., Cramer, K., Behr, M., Lesh, R., & Harel, G. (1993). Curriculum implications of research on the Learning, teaching, and assessing of rational number concepts. In T. Carpenter & E. Fennema (Eds.), *Research on the learning, teaching, and assessing of rational number concepts* (pp. 327-362). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Quaresma, M. (2010). *Ordenação e comparação de números racionais em diferentes representações: uma experiência de ensino* (Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa, disponível em 25.Fev.2012 em http://repositorio.ul.pt/).

Ruthven, K., Hofmann, R., & Mercer, N. (2011). A dialogic approach to plenary problem synthesis. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. Vol. 4, pp. 81-88). Ankara, Turkey: PME.

Streefland, L. (1991). Fractions, an integrated perspective. In L. Streefland (Ed.), *Realistic mathematics education in primary school* (pp. 93-118). Utrecht: Freudenthal Institute.

Stein, M.K., Remillard, J., & Smith, M. (2007). How curriculum influences student learning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 319-369). Greenwich, CT: Information Age.

O QUESTIONAMENTO ORAL COMO PRÁTICA AVALIATIVA DA AULA DE MATEMÁTICA: O PROFESSOR JOSÉ

Paulo Dias
Escola Secundária da Moita
paulo.dias.7@gmail.com

Leonor Santos
Instituto da Educação, Universidade de Lisboa
mlsantos@ie.ul.pt

Resumo: Os aspetos relatados neste texto fazem parte de uma investigação em curso, em que se procura compreender e aprofundar o conhecimento sobre as formas de atuação do professor de Matemática em sala de aula, os tipos de experiências matemáticas que favorecem o desenvolvimento da autorregulação da aprendizagem matemática, e os constrangimentos que os professores de Matemática enfrentam aquando da implementação dessas práticas. O professor José, num contexto de trabalho de natureza colaborativa, planificou e implementou a prática de questionamento oral para promover a autorregulação da aprendizagem matemática de alunos de cursos profissionais. Os resultados obtidos evidenciam que José utilizou o questionamento oral para orientar e reorientar os alunos, evitando corrigir os erros, para que os alunos fossem capazes de ultrapassar as suas dificuldades autonomamente. Em algumas situações, foram estabelecidas relações com trabalhos concretizados anteriormente. O questionamento oral, também, foi utilizado para verificar as aprendizagens concretizadas pelos alunos e para informá-los sobre as mesmas. De salientar, ainda, que nesta prática avaliativa foi usada uma tarefa de características desafiadoras para os alunos e que estes a realizaram, em trabalho individual e trabalho de grupo, alternadamente.

Palavras-chave: prática avaliativa; questionamento oral; autorregulação; tarefas matemáticas.

Introdução

Nos cursos profissionais pretende-se que as situações de avaliação não se restrinjam ao produto final mas atendam, essencialmente, ao processo de aprendizagem e permitam que o aluno seja um elemento ativo, reflexivo e responsável da sua aprendizagem. Quando se procura que a aprendizagem matemática responda a esse objetivo, impõe-se que o aluno seja capaz de refletir sobre a sua aprendizagem e de mobilizar os mecanismos necessários à identificação de erros e à ultrapassagem de dificuldades. Neste contexto, promover a autorregulação da aprendizagem matemática é a forma adequada para desenvolver no aluno as capacidades essenciais para que seja agente da sua própria aprendizagem.

A seleção de tarefas adequadas para despertar a curiosidade do aluno e envolvê-lo na aprendizagem matemática é um desafio que se coloca ao professor. No entanto, as tarefas matemáticas significativas, só por si, não são suficientes para um ensino eficaz (Stein & Smith, 1998). Aos professores cabe, também, determinar quais os aspetos a realçar numa dada tarefa; como organizar e orientar o trabalho dos alunos; que perguntas fazer para desafiar os diversos níveis de competência dos alunos; e como apoiá-los, sem interferir no seu processo de pensamento eliminando, desta forma, o desafio (NCTM, 2007). A gestão de um processo de ensino e aprendizagem assente nas premissas referidas anteriormente passa pelo recurso a

processos de avaliação formativa, em que se inclui o questionamento oral (Santos, 2008). Neste texto, procura-se caracterizar a prática de questionamento de um professor de Matemática, José, no âmbito de um contexto de trabalho colaborativo, numa turma de ensino profissional do 11.º ano.

Desenvolvimento da autorregulação

Entende-se por autorregulação um processo consciente de reflexão sobre o que se está a fazer e como se está a fazer de forma a identificar que ações desenvolver de modo a aproximar-se do esperado. Cabe naturalmente ao professor criar contextos que facilitem o desenvolvimento de atitudes de autorregulação (Santos, 2002), como seja a abordagem positiva do erro (Hadji, 1994); a explicitação/negociação de critérios de avaliação (Alves, 2004); o recurso a instrumentos alternativos de avaliação (Santos, 2004); o refletir antes de agir (Santos, 2010); o questionamento oral (Roullier, 2004) e a escrita avaliativa (Wiliam, 1999; Santos & Dias, 2007).

A interação entre professor e aluno no processo de ensino e aprendizagem é uma prática que procura que o aluno vá, progressivamente, interpretando e compreendendo cada vez melhor o que o professor espera dele (Santos, 2008). A interação, quer oral, quer escrita, é uma forma de desenvolver uma prática avaliativa reguladora das aprendizagens (Santos, 2002; Dias, 2005). Ao acontecer de forma intencional no quotidiano do trabalho da sala de aula é uma forma de integração da avaliação no currículo (Pinto, 2003; Santos, 2004).

Quando se fala de interação oral numa perspetiva reguladora, em geral, associamo-la ao questionamento ao longo do trabalho que o aluno está a desenvolver (Santos, 2002). É sabido que para que este questionamento seja realmente regulador deve respeitar algumas condições, como seja não corrigir os erros, dar pistas para prosseguir, não validar mas antes questionar de forma a ser o próprio aluno a desenvolver um argumento convincente sobre o seu raciocínio (Santos, 2004). Em vez de registar juízos de valor, o professor poderá construir contextos favoráveis ao desenvolvimento de uma postura autorreflexiva nos seus alunos (Santos, 2002). Ainda segundo esta autora, o aluno poderá aprender a colocar-se autonomamente boas questões se o professor lhas colocar de forma continuada. Questões como: “O que fez?”, “Porque tomou esta opção?”, “Porque pensou assim?”, “Donde surgiu esta ideia?”, “Em que outras situações é que este processo se poderia aplicar?”, “Se quisesse convencer alguém de que isto é verdade, o que diria?”, poderão contribuir para, após diversas sessões deste tipo, o aluno passe, autonomamente, a formular estas questões para si mesmo, enquanto desenvolve as tarefas. Deste modo, cabe ao professor questionar e reagir às produções dos alunos através do feedback adequado à situação e ao trabalho do aluno. Gipps (1999) distingue dois tipos de feedback: o feedback avaliativo e o descritivo. O segundo está relacionado com o desempenho dos alunos face a tarefas propostas e faz referência específica ao que os alunos conseguem fazer. Esta autora subdivide ainda o feedback descritivo em dois tipos: especificando o progresso e construindo o caminho seguinte.

O questionamento para além de ser talvez a prática letiva mais frequentemente realizada na sala de aula, é uma das formas com grande potencialidade de se levar ao terreno uma avaliação reguladora, uma vez que (i) acontece a par com as experiências de aprendizagem, permitindo uma regulação no momento; (ii) recorre à forma mais habitual de comunicação entre professor e alunos - a forma oral, e (iii) a sua responsabilidade pode deslocar-se do professor para o aluno sem constrangimentos de qualquer espécie, para além naturalmente do nível de desenvolvimento da capacidade dos alunos para o fazerem (Santos, 2008).

Tarefas matemáticas

Na fase de planificação, o professor efetua uma seleção de tarefas, estratégias e modos de fazer em função das condições que tem na escola, do seu conhecimento profissional e do grupo de alunos que constituem a turma. Segundo Ponte (2004), deste conjunto de opções pode resultar um ensino de cunho essencialmente direto ou exploratório ou, ainda, uma combinação, em graus diversos, destas duas modalidades. Os elementos que constituem os fatores decisivos dessa definição são (i) o modo como a informação é introduzida; (ii) a natureza das tarefas propostas aos alunos; e (iii) a atividade que delas decorre.

Neste contexto, a avaliação é considerada como parte integrante do processo de ensino e aprendizagem, pelo que as tarefas de avaliação propostas aos alunos são também tarefas de aprendizagem. A diversificação das tarefas matemáticas e a promoção da reflexão individual acerca do trabalho produzido tornam-se, assim, dois requisitos na seleção das tarefas para a promoção da aprendizagem pela compreensão (NCTM, 2007). Procura-se que o aluno se envolva nas tarefas matemáticas com persistência e que procure os recursos necessários para lhes dar a resposta adequada. Segundo Ponte (2004), o que os alunos aprendem resulta de dois fatores principais: a atividade que realizam e a reflexão que sobre ela efetuam. Associados às tarefas que apelam ao raciocínio matemático dos alunos (Stein & Smith, 1998), as tarefas de natureza exploratória ou aberta impõem-se como as mais adequadas para promover o questionamento oral.

Hodgen (2007) descreve algumas características da avaliação formativa, em que inclui o uso de tarefas ricas e desafiantes, a qualidade do discurso de sala de aula e do questionamento, o feedback e o uso da autoavaliação e a avaliação entre pares. Outro aspeto importante referido por Hodgen (2007) é a qualidade da interação entre aluno e professor. O autor sugere a necessidade dos professores ouvirem interpretativamente, escutando as contribuições dos alunos para perceberem o porquê de eles responderem de determinada forma. Daí, que o autor defenda a importância das perguntas de nível mais elevado a colocar aos alunos, geralmente associadas ao aumento do desempenho dos alunos.

Metodologia

No quadro do paradigma interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994), este estudo segue uma metodologia qualitativa. Para o estudo mais amplo foram escolhidos dois professores para estudos de caso, usando os seguintes critérios: reconhecida experiência profissional; lecionarem o ensino secundário; e manifestarem capacidade de reflexão sobre a sua prática letiva e intenção de desenvolver práticas de avaliação reguladora. Neste texto, analisa-se apenas a prática de José, professor de Matemática do ensino secundário.

O estudo foi desenvolvido no seio de um contexto de trabalho de natureza colaborativa, em que o primeiro autor deste texto interagiu com José e outro professor. O trabalho de natureza colaborativa (Boavida & Ponte, 2002) do grupo centrou-se, essencialmente, em quatro aspetos: construção de um entendimento comum sobre o que se entende por autorregulação, avaliação e aprendizagem; seleção de tarefas que apresentassem potencialidades para o desenvolvimento da autorregulação da aprendizagem em Matemática; definição de práticas avaliativas com a intencionalidade reguladora; evolução da capacidade de autorregulação das aprendizagens matemáticas pelos alunos.

Os dados foram obtidos através de uma entrevista semiestruturada, realizada antes do início do estudo, de seis sessões de trabalho colaborativo e de duas aulas, todas áudio gravadas e transcritas posteriormente. Atendeu-se apenas aos dados referentes a quatro alunos, alunos acompanhados ao longo de dois anos letivos, aqui indicados com nomes fictícios. A escolha

desses alunos foi feita por José. Segundo José, Alexandre tem 17 anos, é distraído e conversador, sendo um aluno com desempenho médio. Davide tem 18 anos, é pouco assíduo, participa pouco nas tarefas propostas em aula, mas revela apetência para a aprendizagem da Matemática. Tem preocupação e perfecionismo na concretização das tarefas de trabalho de grupo. Magda tem 17 anos, é interessada e mostra-se responsável relativamente ao cumprimento das tarefas escolares, embora apresente algumas dificuldades. Rute tem 19 anos. É delegada de turma e está sempre disponível para ajudar os outros alunos. É muito esforçada e participativa e obtém rendimento médio a Matemática.

A análise de conteúdo foi o processo seguido para a análise de dados, sendo tidos em conta os seguintes domínios: o professor José; a planificação do trabalho a propor aos alunos e a seleção da tarefa; e o questionamento para o desenvolvimento da capacidade de autorregulação.

Apresentação e discussão de resultados

O professor José

José tem mais de 30 anos de serviço. A sua formação base é a licenciatura em engenharia e gestão industrial, ramo mecânica térmica. Ao nível da atividade letiva, já lecionou todos os anos de escolaridade do 3.º ciclo e do secundário. Vê-se como um profissional que cumpre todas as obrigações inerentes à profissão, embora reconheça algumas dificuldades, "como tantos outros professores". É visto, pelos seus pares, como um profissional empenhado e competente, aberto à inovação e disponível para enfrentar desafios profissionais. No ano letivo 2008/2009, lecionou entre outras, uma turma de Matemática, 10.º ano, do curso profissional de contabilidade. Em 2009/2010, deu continuidade pedagógica a esta turma. Não é sócio de associações profissionais e, normalmente, não participa em encontros de professores

A planificação da prática avaliativa e a seleção da tarefa

Foi assumido por José que, no início do ano letivo, por um lado, a resolução de um exercício, mais ou menos complexo, sem orientar o aluno, poderá desmotivá-lo. Mas, por outro, para José, também não seria vantajoso o apoio constante, pois dificultaria a progressão do aluno na sua aprendizagem. Opta, assim, por tarefas mais simples:

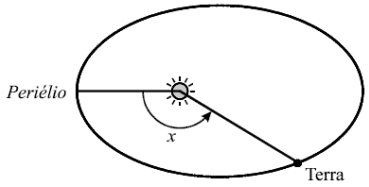
> Na minha turma não posso fazer coisas muito complicadas, desmotivo os moços já no início. Isso não pode ser. Também, para orientar muito e andar constantemente a ajudar, não me parece que evoluam grande coisa, sozinhos. Eu voto nas mais simples, uns exercícios não muito diferentes do que faço no dia a dia, embora desta vez faça a recolha dos trabalhos. (José, STC11).

Deste modo, para José, a forma como o professor conduz o trabalho na sala de aula pode alterar a potencialidade da tarefa. Contudo, existem certos condicionamentos que levam José a nem sempre seguir uma exploração da tarefa mais centrada no aluno, o que traz implicações para o tipo de aprendizagem:

> Não vamos dar o peixe aos alunos, vamos antes ensiná-los a pescar!" é um lema que procuro seguir. Mas, às vezes tenho problemas. Os alunos não fazem o t.p.c., não se empenham nas tarefas, e eu vejo o tempo a passar e a matéria acumula-se... afeta aquilo que eu faço, mas também afeta aquilo que os alunos aprendem! (José, STC4)

Como sabe, a Terra descreve uma órbita elíptica em torno do Sol.

Na figura está representado um esquema dessa órbita. Está assinalado o *periélio*, o ponto da órbita da Terra mais próximo do Sol.



Na figura está assinalado um ângulo de amplitude x radianos $(x \in [0, 2\pi[)$.
Este ângulo tem o seu vértice no Sol, o seu lado origem passa no *periélio* e o seu lado extremidade passa na Terra.

A distância d, em milhões de quilómetros, da Terra ao Sol, é (aproximadamente) dada, em função de x, por $d = 149{,}6\ (1 - 0{,}0167\ \cos x)$

a) **Sem recorrer à calculadora**, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, determine a distância máxima e a distância mínima da Terra ao Sol.
Apresente os valores pedidos em milhões de quilómetros, arredondados às décimas.

b) Sabe-se que x verifica a relação $\frac{2\pi t}{T} = x - 0{,}0167\ \text{sen}\, x$, em que

- t é o tempo, em dias, que decorre desde a passagem da Terra pelo *periélio* até ao instante em que atinge a posição correspondente ao ângulo x;
- T é o tempo que a Terra demora a descrever uma órbita completa $(365{,}24$ dias).

b1) Mostre que, para $x = \pi$, se tem $t = \frac{T}{2}$.

Interprete este resultado no contexto da situação descrita.

b2) Sabe-se que a última passagem da Terra pelo *periélio* ocorreu a uma certa hora do dia 4 de Janeiro. Determine o ângulo, marcado na figura, à mesma hora do dia 14 de Fevereiro. Apresente o resultado em radianos, arredondado às décimas. Nos valores intermédios, utilize, no mínimo, quatro casas decimais.

Nota: a resolução desta questão envolve uma equação que deve ser resolvida graficamente, com recurso à calculadora; apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de algum, ou de alguns, ponto(s).

Enunciado da tarefa Periélio (Terra)

A tarefa Periélio (Terra) foi a escolhida por se enquadrar no desenvolvimento do tema trigonometria e ajudar a promover a capacidade de interpretação dos alunos. Foi preferida por envolver o trabalho em radianos e a aplicação do círculo trigonométrico a movimentos circulares, tratar-se de um problema ligado à astronomia, utilizar noções físicas de tempo e período, e incluir trabalho com calculadora gráfica.

O grupo de trabalho de natureza colaborativa considerou que os itens a), b1) e b2) não ofereceriam grandes dificuldades aos alunos. José justifica esta apreciação pela forma explícita como está enunciado o que se pretende em cada uma delas:

> Quer no a) e no b2) temos o "determine", quer na b2) temos o "mostre que", estes são comandos que os alunos compreendem e para os quais chamo a atenção diariamente. Parece-me que eles [os alunos] não terão problemas em perceber o que é esperado que façam, mas tenho de ajudá-los no mostre que…é difícil. (José, STC13)

O grupo esperava que os alunos fossem capazes de manipular algebricamente as expressões apresentadas, mas contava com dificuldades de interpretação do enunciado e na identificação dos valores de cada uma das letras apresentadas ao longo da proposta de trabalho.

Segundo José, a existência de "determine", familiar ao aluno, indica-lhes que estão perante um problema, para o qual é necessário mobilizar algumas estratégias. Estes significados, segundo José, devem ser discutidos com os alunos para que se apropriem deles:

> Digo-lhes, "resolva" é diferente de "determine". Apresento-lhes várias questões, umas com "resolva" e outras com "determine" e analisamos [professor e alunos] os processos usados para chegar aos resultados e a partir daí cada um [o aluno] tira as suas conclusões. (José, STC13)

O estabelecimento de relações entre o trabalho que têm para realizar e outro com que, anteriormente, tenham sido confrontados, é outro aspeto facilitador:

> Eu posso ajudar, eles já fizeram problemas com triângulos retângulos, em que usam as razões trigonométricas. Talvez, não tenham usado o cosseno, mas nessa altura eu vou intervir e relembro-os sobre outro problema…mas primeiro eles [os alunos], claro! (José, STC13)

Esse objetivo, segundo José, também, poderia ser alcançado pela inclusão de sugestões de trabalho, que o grupo de trabalho de natureza colaborativa decidiu manter no enunciado da tarefa através da nota. Ainda, segundo José, as perguntas a colocar aos alunos deverão ajudá-los a (re)orientarem ou autocorrigirem as suas produções:

> No meu relacionamento com eles [os alunos] sinto as dificuldades e os obstáculos, mas como ajudá-los? A essa questão poderei responder, através da interação. Perguntando, estimulando, dando pistas concretas e a cada um individualmente. O que o texto [Hodgen (2007)] diz dar mais espaço ao aluno. Para mim, é ajudar de forma subtil. Para que fique confiante em si para concretizações futuras. (José, STC12)

Mas, para que tal aconteça, a sua planificação deve ser cuidada de forma a prever o apoio a dar aos alunos durante a realização, evitando corrigir os erros e dar demasiadas orientações:

> Na seleção das tarefas parece-me muito interessante planificar e definir claramente como ajudar os alunos em cada uma das tarefas, sem corrigir os erros ou dar pistas demasiado orientadoras. Sei que tenho de dar espaço aos alunos. Ver os vários aspetos planificados, pode-se equacionar pistas a dar e caminhos a seguir. (José, STC12)

Algumas das possíveis questões a colocar aos alunos foram previstas por José:

> Já me estou a ver. Digo: "O que fizeste?", "Por que tomaste esta opção?", "Por que pensaste assim?", "Donde te surgiu esta ideia?", "Em que outras situações é que este processo se poderia aplicar?" ou "Se quisesses convencer alguém de que isto é verdade, o que dirias?", e espero a reação. (José, STC12)

O questionamento

Inicialmente, o recurso ao questionamento oral surgiu, por parte de José, da necessidade de compreender as dificuldades de comunicação escrita e oral apresentadas pelos alunos no primeiro ano letivo do estudo:

> Os alunos leem e não percebem. Vejo isso muitas vezes, não sei como fazer para os ajudar. Treinar? É um problema de comunicação, mas na forma escrita talvez seja mais difícil ajudá-los, talvez o possa fazer através do questionamento [oral]. (José, STC8)

Salienta, de uma forma mais ampla, a necessidade dos professores ouvirem mais os alunos, analisando em pormenor os trabalhos dos alunos, para questionar e inferir o porquê de eles responderem de determinada forma:

> Uma boa comunicação entre professor e alunos é uma condição necessária num ambiente em que se pretende que a avaliação seja efetivamente formativa. Conduzir à regulação

> das práticas do professor e das aprendizagens dos alunos. Em particular, tocou-me as perguntas que os professores fazem aos alunos e permitirem ao aluno autocorrigir os seus erros, melhorando as aprendizagens. (José, STC12)

No que respeita à realização em sala de aula da tarefa Periélio (Terra), inicialmente, quase todos os alunos compreenderam o enunciado da tarefa e não tiveram dificuldade em compreender a relação entre a distância *d*, da Terra ao Sol, e o ângulo x. Contudo, José detetou que o par Magda e Rute não estava a interpretar corretamente o valor de x. As duas alunas não reparavam que o ângulo x começa a contar a partir da linha do Periélio e substituíam o x por π para obter o valor mínimo de *d*, trocando o x por 2π para obter o valor máximo de *d*. José intervém (fala 1) de forma que as alunas não se afastem do que é solicitado na proposta de trabalho e interpela-as, respondendo à questão colocada (fala 5), para encaminhá-las (fala 8), de novo, para o problema:

1. José: Algum problema?
2. Magda: Não!
3. Rute: A distância máxima é menor do que a distância mínima, mas em matemática tudo é possível!
4. Magda: Isto está certo? Não está, stor?
5. José: Não me parece que a Rute tenha razão!
6. Magda: Mas, eu já verifiquei as contas e estão todas bem!
7. Rute: Já sei. Tens a calculadora em radian e deveria estar em degre.
8. José: Isso tem de fazer sentido. Vejam o problema de novo. (A3J)

José remeteu as alunas para uma nova leitura do enunciado, assumindo o compromisso de as recolocar em confronto com a tarefa proposta, mas a dificuldade delas estava em considerar o referencial cartesiano na origem na Terra, no Periélio o ângulo era π. Como o impasse se manteve, José reforçou o seu apoio para que as alunas progredissem, assinalando o erro que estavam a cometer (fala 3), assumido o questionamento para corrigir. Mais uma vez, essa intervenção foi no sentido de orientar as alunas para a proposta de trabalho (fala 7):

1. José: Já repararam na figura?
2. Rute: Sim.
3. José: O ângulo x começa no Periélio!
4. Magda: Logo, aí é zero…ok, já percebi.
5. Rute: Espera, espera….deste lado é o π.
6. Magda: Não temos referencial e vê a abertura, começa no Periélio!
7. José: Agora vejam de novo o máximo e o mínimo. (A3J)

Esta tarefa foi desenvolvida em duas aulas e José apenas impôs que os alunos efetuassem o item b2) individualmente. Esta intervenção de José foi justificada pela

sua necessidade de verificar o desempenho dos alunos em itens com calculadora gráfica:

> Quero saber se já dominam as resoluções gráficas com a calculadora gráfica. É importante para as funções [módulo seguinte]. As perguntas com calculadora, também, as fazem sempre individualmente. Geralmente, não envolvem discussão, e individualmente, sei que todos fizeram. (José, STC14)

À semelhança do que sucedeu nos outros itens, José apoiou os alunos na resolução da alínea b2), circulando pela sala e questionando os alunos para os ajudar na procura de resposta. Nesse item, os alunos identificaram que tinham de efetuar a contagem do número de dias que decorre desde a passagem da Terra pelo Periélio até ao dia 14 de fevereiro, mas essa contagem não foi fácil. Depois de identificar esta dificuldade dos alunos, José questionou-os por diversas vezes, focalizando a pergunta (falas 1 e 6):

1. Davide: Professor? são 40 dias!
2. José: Contaste bem?
3. Davide: De 4 a 14, são 30 mais 10.
4. José: Mas, o dia 4 é de janeiro!
5. Davide: janeiro.
6. José: E o mês de janeiro tem 30 dias?
7. Davide: Ah. Pois…então t=41 dias. (A3J)

As duas alunas tiveram exatamente a mesma dificuldade. Segundo o registo áudio, deve-se apenas a distrações relacionadas com pouca atenção na leitura de enunciados longos. José manteve o apoio à estratégia seguida pelas alunas, embora tenha orientado no sentido de lerem de novo a proposta de trabalho (fala 2). Mas, perante a persistência do erro das alunas no cálculo, José sugeriu uma forma de contagem (falas 2 e 4):

8. Rute: Stor, estou mesmo convencida que fazendo o t=40 vai dar, não é stor?
9. José: Conta os dias de 4 janeiro a 14 de fevereiro.
10. Rute: Sim t=40 e T=365,24, e calcula-se o x, na calculadora.
11. José: Conta: 1, 2, 3, etc…
12. Rute: Vou ver.
13. (…)
14. Rute: Stor? 31 de janeiro, tinha esquecido de contá-lo também. Pronto, t=41. (A3J)

O item b2), do qual José pretendia verificar o desempenho dos alunos, foi concretizado com a calculadora sem sobressaltos, depois de ultrapassada a dificuldade da contagem dos dias, embora tenha sido necessária a intervenção de José. Nesse item, José alertou para a necessidade de mudar a janela de visualização da calculadora e para a verificação do modo de medida da amplitude de um ângulo a usar na calculadora (*radian* ou *degre*). Foi uma ação de

José para aumentar a capacidade de autorregulação dos alunos, em tarefas com calculadora gráfica, noutras ocasiões.

Na análise, posterior, da aula, segundo José, o item b1) não suscitou problemas, porque substituindo o x por π e resolvendo em ordem a *t*, ficava demonstrada a igualdade pretendida. Para José, neste item, foi evidente que os alunos colocaram em prática procedimentos que já tinham usado anteriormente, mobilizando-os corretamente (falas 1, 2 e 4).

1. Magda: Aqui $x = \pi$, trocamos o x por π e vamos ver o que dá.
2. Rute: $Sen\pi$ faz-se na calculadora!
3. Magda: Isso é zero, é fácil.
4. Rute: Então tá resolvido! Agora resolves para t ficar sozinho como fizemos com aquele do R [tarefa T2]. (A3J)

Esta atitude, do ponto de vista de José, evidencia a eficácia matemática dos alunos: "Afinal eles sabiam de que falam, explicavam o procedimento para resolver o problema e isso é ser matematicamente eficaz" (José, STC13).

Para além das alunas também para José, o par de rapazes mostrou que conseguia mobilizar eficazmente aprendizagens adquiridas anteriormente (falas 1, 3 e 5). No entanto, no item b2), José questionou os alunos para compreender o que dominavam das estratégias a aplicar. José interrogava para aprofundar até que ponto o aluno dominava aquilo que afirmava (fala 2) e repostava com o seu entendimento do que deveria ser a resposta (fala 4):

1. Alexandre: Na resposta incluímos aquelas coisas todas, as obrigatórias?
2. José: Quais?
3. Alexandre: Aquelas que são habituais nas resoluções gráficas!
4. José: Se queres dar uma resposta completa, deves incluir tudo.
5. Alexandre: Só mais uma coisa, eu já tenho a solução e já verifiquei que pertence a $[0,2\pi[$, e agora vou verificar se é solução da equação, tenho de incluir isso na minha resposta? (A3J)

No item b2), ficaram registados momentos que mostram a planificação, seguida de controlo e verificação que os alunos fazem dos seus próprios trabalhos. O Alexandre, a dado momento, questionou José acerca da necessidade de incluir na resposta a janela de visualização, as ferramentas da calculadora utilizadas, e as expressões introduzidas no modo gráfico da calculadora, e da validade da solução encontrada:

1. Alexandre: Deve ser o procedimento gráfico para esta tarefa?
2. José: Porquê?
3. Alexandre: Diz, através das capacidades gráficas!
4. José: Como o resolverias sem a calculadora gráfica?
5. Alexandre: Pois…tenho de seguir o meu plano inicial, a calculadora!
6. José: Pode ser, mas que plano é esse?

7. Alexandre: Pensar, concretizar e avaliar. Introduzir as expressões na calculadora, usar as ferramentas, encontrar as solução e ver se está tudo bem e se responde ao problema! (A3J)

Através desta solicitação, Alexandre mostra que domina alguns aspetos que permitem fazer a triangulação de resultados. E, ao colocar em causa a aceitação de uma solução sem a referida triangulação, mostra maturidade ao nível do desenvolvimento da capacidade de autoavaliação para a aprendizagem matemática.

Conclusões

José é um professor com uma larga experiência profissional, mas no início do estudo revelava pouca atenção à promoção da autorregulação, na aprendizagem matemática. A planificação do questionamento trouxe a José uma nova forma de trabalho, em contexto de trabalho colaborativo (Boavida & Ponte, 2002), e, na sala de aula, a procura de uma maior aproximação entre a interpretação do professor e a interpretação dos alunos a propósito do texto das tarefas e das respostas dadas.

Com o apoio do trabalho colaborativo, José implementa na sala de aula uma prática avaliativa em que orienta os alunos para a compreensão da proposta de trabalho, para a igualdade de atenção dada à valorização de processos e resultados e para a necessidade de responder de forma clara e completa. José utiliza o questionamento para reorientar os alunos embora, por vezes, tenha necessidade de corrigir erros para que a progressão se concretize. Em algumas situações, José utiliza o recurso ao estabelecimento de relações entre o trabalho realizado e outros anteriormente realizados.

É possível identificar por parte de José a promoção da autorregulação da aprendizagem matemática através da diferenciação pedagógica (Santos, 2009) e do estímulo à partilha de resultados. Em aula, José remeteu os alunos para os seus próprios produtos, fazendo-os refletir e verificar as suas respostas, para que identificassem erros e dificuldades e verificassem da razoabilidade de resultados (NCTM, 2007), encaminhando-os a partir das suas próprias palavras. O questionamento apelava a recursos de diferentes tipos de representação dos objetos matemáticos – gráfica e analítica, predominantemente – e procurava-se adequada às necessidades manifestadas pelo aluno num dado momento específico, tendo, por vezes, assumido a solicitação de confronto entre os registos escritos e a explicação oral.

O questionamento permitiu o conhecimento do professor acerca dos alunos sobre: as dificuldades de comunicação escrita e oral; a fraca conexão entre conteúdos; o modo de aumento da compreensão do conteúdo matemático; e o estímulo a dar aos alunos. A intervenção de José passou por alertar para a diferença entre a verificação de alguns casos particulares e a generalização de uma propriedade, em procurar manter os alunos motivados, e promover a integração entre as atividades de avaliação e a aprendizagem (Pinto, 2003; Santos, 2004).

Durante a realização da tarefa os alunos conciliaram momentos de trabalho individual e de trabalho de grupo, nuns casos, o principal interlocutor do aluno foi o professor, em outros, o trabalho não foi confirmado nem desmentido por José, sendo a responsabilidade de validação do próprio grupo (Roullier, 2004). Para José, esta dualidade contribuiu para promover a manutenção do envolvimento do aluno na execução da tarefa, possibilitando novas abordagens e procurando desdramatizar a perceção de dificuldades dos alunos.

Referências

Alves, M. (2004). Currículo e Avaliação – Uma perspetiva integrada. Porto: Porto Editora.

Boavida, A., & Ponte, J. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Eds.), Refletir e Investigar sobre a Prática Profissional (pp. 43-55) Lisboa: APM.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e métodos. Porto: Porto Editora.

Dias, P. (2005). Avaliação reguladora no Ensino secundário. Processos utilizados pelos alunos em investigações Matemáticas. (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Gipps, C. (1999). Sociocultural aspects of assessments. Review of research in education,24 (1), 355-392.

Hadji, C. (1994). A avaliação, regras do jogo: Das intenções aos instrumentos. Porto: Porto Editora.

Hodgen, J. (2007) Formative assessment. Tools for transforming school mathematics towards a dialogic practice? In D. Pitta-Pantazi and G. Philippou (Eds.), Proceedings of Cerme 5 (pp. 1886-1895). Larnaca: University of Cyprus.

NCTM (2007). Princípios e Normas para a Matemática Escolar. Lisboa: APM (Tradução portuguesa da edição original de 2000).

Pinto, J. (2003). A avaliação e a aprendizagem: da neutralidade técnica à intencionalidade pedagógica. Educação e Matemática, 74, 3-9.

Ponte, J. (2004). Pesquisar para compreender e transformar a nossa própria prática. Educar em Revista, 24, 37-66.

Roullier, J. (2004). A autoavaliação de um projeto de escola: profissionalização de um ator coletivo. Revista de Estudos Curriculares, 2 (2), 239-261.

Santos, L. (2002). Autoavaliação regulada: porquê, o quê e como? In P. Abrantes e F. Araújo (Coords.). Avaliação das aprendizagens (pp. 77-84). Lisboa: Ministério da Educação, DEB.

Santos, L. (2004). La evaluación del aprendizaje en matemáticas: Orientaciones y retos. In J. Giménez; L. Santos & J. P. Ponte (Coords.), La actividad matemática en el aula (pp. 157-168). Barcelona: Editorial Graó.

Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In L. Menezes; L. Santos; H. Gomes & C. Rodrigues (Eds.), Avaliação em Matemática: Problemas e desafios (pp. 11-35). Viseu: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.

Santos, L. (2009). Diferenciação pedagógica: Um desafio a enfrentar. Noésis, 79, 52-57.

Santos, L. (org.) (2010). Avaliar para Aprender. Relatos de experiências de sala de aula do pré-escolar ao ensino secundário. Porto Editora e IIE.

Santos, L., & Dias, S. (2007). Será que os alunos compreendem o que lhes escrevem os professores? Educação e Matemática, 94, 11-16.

Stein, M., & Smith, M.(1998).Selecting and creating mathematical tasks: From research to practice. Mathematics Teaching in the Middle School, 3(4), 268-275.

Wiliam, D. (1999). Formative assessment in mathematics. Equals: mathematics and Special Educational Needs, 5 (3), 8–11.

O ESTUDO ACOMPANHADO EM ARTICULAÇÃO COM A MATEMÁTICA: PRÁTICAS DE DUAS PROFESSORAS[1]

Fátima Delgado
Escola Secundária c/ 3º Ciclo de Marco de Canaveses
mariadelgado@sapo.pt

Rosa Antónia Tomás Ferreira
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto e CMUP
rferreir@fc.up.pt

José António Fernandes
Centro de Investigação em Educação, Universidade do Minho
jfernandes@ie.uminho.pt

Resumo: Com a implementação do Plano da Matemática (PM), a área curricular não disciplinar de Estudo Acompanhado (EA) passou a constituir um espaço significativo para trabalhar Matemática. Neste texto, pretendemos identificar e analisar a articulação entre a disciplina de Matemática e a área de EA quando nesta são desenvolvidas tarefas matemáticas e lecionadas pelo mesmo professor. Com este intuito, analisámos as práticas de duas professoras no que diz respeito aos tipos de tarefas selecionadas para as aulas de Matemática e de EA, às razões e fontes para essa seleção e às formas como são, em geral, exploradas as tarefas em cada um destes espaços de trabalho com os alunos. Os resultados evidenciam que ambas as professoras procuram articular o trabalho desenvolvido nas aulas de Matemática e nas de EA de forma complementar, aproveitando este espaço para reforçar conteúdos e preparar os alunos para as provas nacionais, embora de formas diferentes. Os resultados sugerem também que o Plano da Matemática tem uma maior influência nas práticas das professoras nas aulas de EA do que nas de Matemática.

Palavras-chave: Matemática; Estudo Acompanhado; Tarefas; Plano da Matemática.

Introdução

A prática letiva do professor está associada à gestão curricular que assenta em dois elementos principais: a criação de tarefas matemáticas e a adoção de estratégias de ensino a utilizar em sala de aula. O professor, sendo o principal responsável pela gestão curricular, deve prestar particular atenção à seleção de tarefas a realizar pelos alunos bem como à sua exploração em sala de aula, uma vez que tal determina o ambiente de aprendizagem e este condiciona a qualidade das aprendizagens (Ponte, 2005; ME, 2007).

Com a implementação do Plano da Matemática (PM), a área curricular não disciplinar de Estudo Acompanhado (EA) pôde constituir mais um espaço para trabalhar Matemática. O PM envolveu mais de 95% das escolas com 2.º e 3.º ciclos do ensino básico em Portugal, e cerca de 73% das turmas abrangidas tinham, de alguma forma, o EA destinado para trabalho em

[1] Este trabalho é financiado por fundos FEDER através do Programa Operacional Fatores de Competitividade – COMPETE e por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito dos projetos PEst-C/MAT/UI0144/2011 e *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (Contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

Matemática. Além disso, no último ano de funcionamento do PM, o número de professores de Matemática envolvidos em atividades em EA ascendia a 62% (Santos *et al*., 2009).

Neste texto, inserida numa investigação mais vasta (Delgado, 2011), pretendemos identificar e analisar a articulação entre a disciplina de Matemática e a área de EA, quando nesta são desenvolvidas tarefas matemáticas, no âmbito do PM, e quando lecionadas pelo mesmo professor. Com este intuito, analisamos as práticas de duas professoras, Maria e Ana, no que diz respeito aos tipos de tarefas selecionadas para as aulas de Matemática e EA, às razões que fundamentam essa seleção, às fontes de tarefas usadas e às formas como são, em geral, exploradas as tarefas em cada um destes espaços de trabalho com os alunos.

Tarefas matemáticas

As práticas do professor incluem a seleção de tarefas a realizar pelos alunos, tendo em conta que o tipo de tarefa proposta e a forma como é conduzida a sua realização influenciam a atividade dos alunos. Assim, é essencial que o professor reflita sobre estes aspetos, considerando quer as competências que ele visa desenvolver nos alunos, quer a motivação que lhes despertará para aprender (Bishop & Goffree, 1986). Para Christiansen e Walther (1986), a seleção de uma tarefa será tanto mais adequada quanto maior for o conhecimento do professor sobre a sua natureza e potencialidades, ou seja, o tipo de ação ou ações que poderá promover no aluno. Estes autores sugerem que uma classificação das diferentes tarefas poderá constituir um guia geral de orientação para o professor na análise das mesmas.

No que diz respeito à natureza das tarefas, Ponte (2005) propõe quatro dimensões: o grau de desafio matemático, o grau de estrutura, a duração e o contexto. O grau de desafio matemático está associado ao grau de dificuldade da tarefa, sob o ponto de vista do aluno, e varia entre os pólos *desafio reduzido* e *desafio elevado*. Quanto ao grau de estrutura, as tarefas podem ser *fechadas* ou *abertas*. Uma "tarefa fechada é aquela onde é claramente dito o que é dado e o que é pedido e uma tarefa aberta é a que comporta um grau de indeterminação significativo no que é dado, no que é pedido, ou em ambas as coisas" (Ponte, 2005, p. 18). Cruzando estas duas dimensões, o autor apresenta o seguinte esquema (Figura 1):

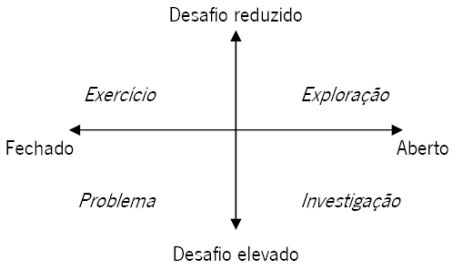


Figura 1: Relação entre diversos tipos de tarefas, quanto ao grau de desafio e de estrutura (Ponte, 2005, p. 18)

Ponte (2005) refere-se aos *exercícios* como tarefas fechadas e de desafio reduzido; aos *problemas* como tarefas fechadas e de desafio elevado; às *explorações* como tarefas abertas e de desafio reduzido; e às *investigações* como tarefas abertas de desafio elevado. Contudo, o autor alerta para o facto destas linhas de demarcação não serem sempre muito nítidas. Tal como Christiansen e Walther (1986), Ponte realça o caráter relativo da classificação de uma tarefa, pois a sua natureza não depende apenas dela própria mas também do indivíduo que a realiza.

A duração de uma tarefa refere-se ao tempo previsto para a sua realização por parte do aluno, variando entre uma duração *curta* e *longa*. Quanto ao contexto, Ponte (2005) sugere que as tarefas podem situar-se num *continuum*, desde tarefas contextualizadas na realidade a tarefas puramente matemáticas. Skovsmose (2000) acrescenta as tarefas contextualizadas na *semirrealidade* – tarefas cujo enunciado é baseado numa realidade construída, ou seja, numa situação artificial. Nestas tarefas, os aspetos reais que a situação envolve são irrelevantes para a sua resolução.

O relatório *Matemática 2001* (APM, 1998) destaca os exercícios e os problemas como as tarefas privilegiadas em sala de aula, sobretudo os primeiros. A tendência parece manter-se com o passar dos anos. Os professores continuam a valorizar a prática repetitiva de exercícios, dado que a maioria dos manuais escolares privilegia esse mesmo tipo de prática (Ponte & Serrazina, 2004). No entanto, parecem existir professores que incluem nas suas práticas tarefas diversificadas, como problemas, explorações, investigações e projetos. Se uma ligeira mudança parece estar a surgir, o ensino da Matemática assente na diversificação de tarefas não é ainda uma realidade.

Vários documentos orientadores do currículo português apoiam a diversificação de tarefas no ensino da Matemática (ME, 2001, 2007). Ponte (2005) salienta a importância desta opção pois diferentes tarefas permitem atingir diferentes objetivos curriculares. As tarefas mais fechadas promovem o desenvolvimento do raciocínio matemático e as mais abertas o da autonomia; as tarefas mais acessíveis promovem a autoconfiança e as mais desafiantes permitem o contato com uma efetiva experiência matemática.

Na mesma perspetiva, Stein e Smith (2009) realçam que as tarefas que solicitam ao aluno a aplicação de regras e procedimentos memorizados, de modo rotineiro, e as tarefas que "exigem que os alunos pensem concetualmente e que os estimulem a fazer conexões" (p. 22) promovem tipos diferentes de aprendizagens. De facto, como preconizado no *Programa de Matemática do Ensino Básico* (ME, 2007), a diversificação de tarefas é uma das exigências colocadas atualmente ao professor na planificação do seu trabalho a realizar com os alunos. A forma como uma tarefa é apresentada e implementada influencia significativamente o que os alunos realmente aprendem. O *Quadro das Tarefas Matemáticas* (Figura 2) é apresentado por Stein e Smith (2009) como uma ferramenta de apoio à reflexão dos professores sobre a implementação de tarefas em sala de aula. De acordo com as autoras, uma tarefa passa por três fases distintas: (1) é apresentada (aos professores) pelos materiais curriculares; (2) é apresentada pelo professor aos alunos na sala de aula; e (3) é trabalhada pelos alunos, isto é, gera atividade nos alunos.

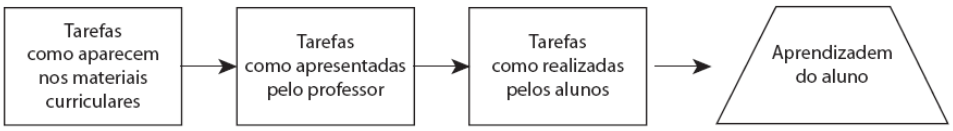


Figura 2: *Quadro das Tarefas Matemáticas* (Stein & Smith, 2009, p. 24)

Para Stein e Smith (2009), a análise das fases pelas quais as tarefas passam até se *traduzirem* em aprendizagem é importante, pois a natureza das tarefas pode alterar-se quando passam de uma fase para outra. De facto, há situações em que "tarefas de nível elevado são implementadas de tal forma que os alunos pensam e raciocinam tendo em conta a sua complexidade e com significado" (p. 24). No entanto, por vezes acontece que, durante a implementação dessas mesmas tarefas, o objetivo de promover o desenvolvimento do raciocínio é reduzido à aplicação de regras ou procedimentos.

Estudo Acompanhado

Alguns autores têm-se debruçado sobre como pode ser perspetivado o EA (e.g., Vieira, Pessoa, Silva, & Lima, 2004). Neste texto baseamo-nos em Cosme e Trindade (2001) por restrições de espaço e por usarmos o quadro de trabalho que propõem para analisar os dados recolhidos. Estes autores consideram duas perspetivas sobre o EA: como um *projeto-enclave* e como um *projeto-charneira*. A perspetiva de *projeto-enclave* assume o EA como uma área fechada e subordinada às restantes áreas curriculares, cujo principal objetivo é contribuir para o sucesso dos alunos nestas últimas. Nesta linha, o EA pode transformar-se num espaço limitado à realização dos deveres escolares ou a sessões de estudo regidas pelas exigências e premissas das outras áreas curriculares. A perspetiva de *projeto-charneira* assume o EA como uma área construída em parceria com outras áreas curriculares ou projetos de escola, destinada a promover o desenvolvimento de competências metacognitivas dos alunos e, consequentemente, transformar a cultura tradicional de ensino que ainda se vivencia nas salas de aula. As orientações oficiais para a área de EA (ME, 2001) enquadram-no na perspetiva de *projeto-charneira*. De facto, é recomendado que o EA seja um espaço promotor de aprendizagens significativas e contextualizadas para melhorar a aprendizagem do aluno. Transformar o EA num espaço de apoio às diferentes disciplinas é, pois, uma interpretação redutora dos objetivos gerais prescritos para esta área.

A cada perspetiva sobre EA de Cosme e Trindade (2001) podemos associar uma perspetiva sobre as práticas desenvolvidas. Assim, à perspetiva de EA como *projeto-charneira* associamos práticas baseadas na transversalidade, pois tem subjacente o EA como uma área que procura promover nos alunos o desenvolvimento de competências de forma transversal; à perspetiva de EA como *projeto-enclave* associamos práticas assentes na disciplinarização, pois o EA é uma área que proporciona aprendizagens disciplinares de forma isolada.

Metodologia

O presente texto insere-se numa investigação qualitativa mais ampla (Delgado, 2011), sobre a articulação entre a disciplina de Matemática e o EA, versando as conceções e práticas de professores. Este texto refere-se às práticas de duas professoras, Ana e Maria, que constituem dois dos quatro estudos de caso daquela investigação. À data da recolha de dados (2007/08), Ana e Maria trabalhavam em escolas diferentes da mesma área geográfica e lecionavam Matemática e EA (este atribuído à disciplina de Matemática no âmbito do PM) a uma turma de 7.º e 9.º anos, respetivamente.

Os dados que informam este texto foram recolhidos através de: (1) observação não participante de 8 aulas de Matemática (A) de 45 minutos e 8 sessões de EA também de 45 minutos das professoras; (2) uma entrevista (E) audiogravada a cada professora; e (3) recolha documental de materiais utilizados pelas professoras nas aulas observadas, sobretudo fichas de trabalho e os projetos PM de cada escola. A análise de dados foi descritiva e interpretativa, articulando os vários elementos recolhidos e focando-se nos tipos de tarefas selecionadas, razões para as escolhas feitas, fontes de seleção de tarefas e abordagem geral à sua exploração em sala de aula, em Matemática e em EA.

Práticas de Maria em Matemática e EA

Maria concretiza o ensino da Matemática segundo dois tipos de aulas, designados, pela própria, por *aulas de matéria* e *aulas de exercícios*. Nas *aulas de matéria*, Maria introduz os conteúdos com a realização de tarefas para promover a descoberta de novos conceitos: "penso numa atividade para introduzir a matéria, tipo uma atividade de descoberta" (E, dez/07). Contudo, as *aulas de matéria* observadas sugerem que a forma como Maria explora as tarefas com os alunos acaba por resultar na redução do seu grau de desafio. De facto, Maria não dá tempo aos alunos para que possam pensar e resolver as tarefas propostas e tipicamente orienta o processo de resolução passo-a-passo. Nas *aulas de exercícios*, a postura de Maria é diferente, dando tempo para que os alunos, ao seu ritmo, realizem as tarefas propostas. Nestas aulas, Maria procura esclarecer dúvidas individualmente quando solicitada pelos alunos e tende manter o nível cognitivo das tarefas mais desafiantes. Por exemplo, a tarefa da Figura 3 constituiu um problema para os alunos de Maria.

O valor monetário de um computador diminui à medida que o tempo passa. Admite que o valor, v, de um computador, em euros, t anos após a sua compra, é dado por:

$$v = -300t + 2100$$

1. Tendo em conta esta situação, qual é o significado real do valor 2100?

2. Determina, em euros, a desvalorização do computador (perda ou diminuição do seu valor monetário) dois anos após a sua compra. Justifica a tua resposta.

Figura 3: Tarefa de um exame nacional de Matemática

Como a maioria dos alunos teve dificuldade na sua resolução, Maria abriu um espaço de discussão.

Maria: Já leram o problema com atenção?

Alunos: Já.

Maria: Em primeiro lugar temos que perceber bem o que representa cada variável. Alguém quer explicar?

Aluno1: O *t* é o tempo.

Maria: Sim, a variável *t* representa o tempo, mas referente a quê?

Aluno1: Representa os anos a partir do momento que se compra o computador.

Maria: E a variável *v*?

Aluno2: É o valor do computador à medida que os anos passam.

Maria. Então qual é a dúvida?

Aluno3: Isso eu percebo, mas não sei a primeira pergunta, não sei o que representa o 2100.

Maria: Vejam se conseguem descobrir, atribuindo valores às variáveis. (A, jan/08)

Após esta sugestão, Maria deixou que os alunos pensassem mais algum tempo sobre a tarefa, tendo estes acabado por resolvê-la. Nesta situação, Maria deu tempo suficiente para os alunos realizarem a tarefa e, apesar de lhes ter dado orientações, fê-lo sem reduzir os aspetos desafiantes da tarefa.

As *aulas de matéria* observadas mostraram que as tarefas propostas por Maria se constituíram como exercícios, não só pela sua própria natureza mas também por terem sido implementadas com um baixo nível de exigência cognitiva. Os exercícios foram também as tarefas mais frequentemente escolhidas para as *aulas de exercícios*: "uma pessoa tem tendência de dar-lhes imensos exercícios de cálculo direto e de contas diretas para eles praticarem no início da matéria" (E, dez/07). Maria referiu que, nas *aulas de exercícios*, também propõe problemas mas parece não diferenciar estes dois tipos de tarefa, utilizando quase sempre o termo *exercícios* para se referir às tarefas matemáticas. O desconhecimento de vários tipos de tarefa ou de uma terminologia que lhe permita fazer a distinção pode estar na origem desta tendência da professora.

Apesar de Maria se preocupar em propor tarefas "relacionadas com o quotidiano e com as outras disciplinas" (E, dez/07), nas *aulas de exercícios* predominam as tarefas em contexto puramente matemático. Foram ainda observadas algumas tarefas contextualizadas na semirrealidade, embora com menor frequência.

Maria fundamenta a seleção de tarefas para as aulas de Matemática referindo-se à importância dos alunos trabalharem exercícios como forma de promover uma compreensão sólida dos conteúdos abordados: "…porque eles têm que praticar, eu acho que eles têm que ter uma base muito sólida nas coisas para depois passarem para esse tipo de tarefas [dos 1000 itens]" (E, dez/07). Para esta professora, os alunos precisam de desenvolver destrezas para depois poderem envolver-se na realização de tarefas mais desafiantes. A esta necessidade, Maria acrescenta o fator tempo associado ao *cumprimento do programa*:

É um bocado a limitação do tempo também (…) No 9.º ano, por exemplo, este ano andamos com o tempo tão à justa que eu esta semana tive que dar matéria [no EA], só de pensar que o teste intermédio vai ser no dia 30 e tal e que uma pessoa tem que dar aquela matéria (…) O que acaba por prevalecer é o cumprimento do programa. (E, dez/07)

Quanto às fontes de seleção de tarefas para as *aulas de exercícios*, Maria destaca claramente o manual adotado: "Uma pessoa faz aqueles exercícios que vêm nos manuais (…) estão lá no manual, e uma pessoa usa esses exercícios" (E, dez/07). Contudo, indica também outras fontes, como "fichas de trabalho de outros manuais [e] o livro deles de exercícios" (E, dez/07). Nas aulas observadas, foram usados também itens de provas nacionais, – alguns mais complexos que as tarefas usualmente propostas – sobretudo nas aulas que precederam a realização de um teste intermédio. Assim, apesar de o teste intermédio constituir uma fonte de ansiedade relativa ao *cumprimento do programa*, também parece estimular a professora a propor tarefas mais exigentes aos alunos.

O PM da escola de Maria associou a área de EA à disciplina de Matemática e, em particular para as turmas de 9.º ano, foi definido que o trabalho a desenvolver em EA teria como principal objetivo a "preparação para o exame nacional" (E, dez/07). Neste sentido, Maria reconhece no *Projeto 1000 itens*, a sua principal fonte de seleção de tarefas para as aulas de EA, uma utilidade pragmática na preparação dos alunos para exame, não só pela riqueza das tarefas mas também pela falta de hábito de trabalho dos alunos nestas propostas:

Como temos aquele material todo das tarefas dos *1000 itens*, trabalhamos só basicamente isso (…) Sente-se a falta de eles fazerem aquele tipo de tarefas, notou-se perfeitamente no início do ano eles verem aquele tipo de exercícios e não estarem habituados a ver tanto texto, tanta coisa, tanta informação, o que é que eu retiro… (E, dez/07)

Esta tendência na seleção de tarefas tornou-se evidente nas aulas de EA observadas, embora Maria tenha também recorrido a tarefas das provas de exame nacional. Maria realça que estas tarefas, mais desafiantes, ficam reservadas para as aulas de EA, pois a extensão do programa não lhe permite explorar tais tarefas nas aulas de Matemática. Neste sentido, "o EA veio trazer vantagens (…) Se eu não tivesse EA, não é que não o fizesse, óbvio que eu ia incluir os *1000 itens*, mas não ia fazer tantos, não iam praticar tanto" (E, dez/07). Para Maria, a área de EA é uma mais-valia pois possibilita-lhe trabalhar com os alunos outros tipos de tarefas além dos exercícios, que reserva para a aula de Matemática.

Maria inicia sempre as aulas de EA observadas com a proposta de um conjunto de tarefas relacionadas com temas já abordados nas aulas de Matemática (exercícios e problemas, evidenciando maior equilíbrio nos contextos das tarefas em comparação com as aulas de Matemática). Apresentamos uma situação que ilustra a prática comum desta professora na implementação de tarefas nas aulas observadas de EA. Numa das aulas, Maria propôs aos alunos a tarefa da Figura 4 e, como era frequente, deu-lhes tempo para pensarem num processo de resolução.

Círculos tangentes

Os Sangakus são tábuas comemorativas, em madeira, oferecidas a pequenos santuários japoneses, provavelmente, como forma de agradecer aos deuses a descoberta de um teorema matemático. As tábuas contêm problemas matemáticos, envolvendo, normalmente, vários círculos.



O problema seguinte foi adaptado de um dos problemas contidos numa tábua datada de 1892 e encontrada na localidade de Miyagi.

Os círculos têm um único ponto em comum (P) e [CD] é tangente a ambos os círculos.

O raio do círculo de centro em A mede 3 cm e o raio do círculo de centro em B mede 2 cm.

Determina o valor exacto da medida do comprimento de [CD].

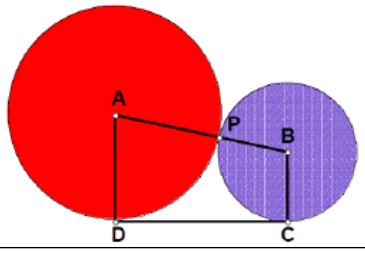


Figura 4: Círculos tangentes, tarefa do *Projeto 1000 itens*

Após alguns minutos de trabalho em pares, um aluno voluntariou-se para apresentar a sua resolução (Figura 5) no quadro.

$$\overline{CD} = 3 + 2 = 5$$

$$\overline{CD} = 5\ cm$$

Figura 5: Resolução apresentada por um aluno

A professora questionou o aluno:

Maria: Podes explicar o teu raciocínio?

Aluno1: Sim, $\overline{CD} = 5$, porque $\overline{CD} = \overline{AB}$.

Maria: Concordam?

Alunos: Sim.

Aluno2: Porque é a soma dos dois raios.

Maria: Vou fazer um esboço da figura [Figura 6]. Os segmentos de reta AB e CD têm o mesmo comprimento?

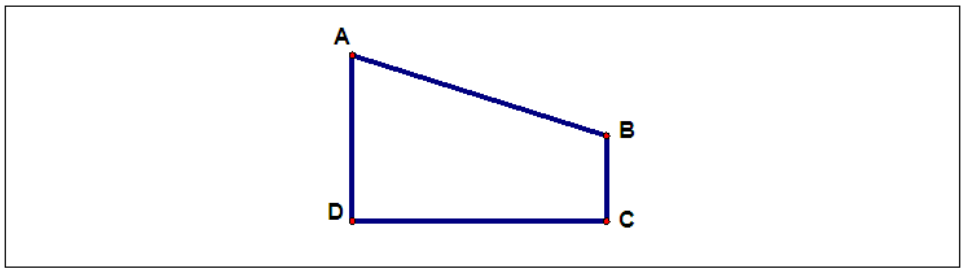


Figura 6: 1ª figura apresentada por Maria

Alunos: Claro que não.

Aluno3: Eu acho que têm.

Aluno4: Eu também.

[Maria desenha na mesma figura o segmento de reta EB (Figura 7)]

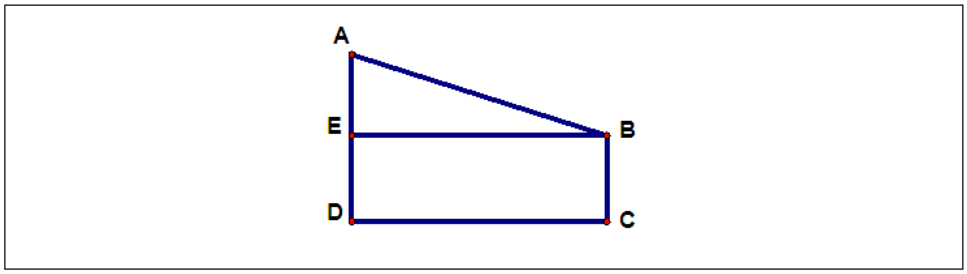


Figura 7: 2ª figura apresentada por Maria

Maria: E os segmentos de reta EB e AB têm o mesmo comprimento?

Aluno3: Não.

Maria: Porquê?

Aluno3: O lado AB é maior, porque é a hipotenusa do triângulo.

Maria: Vamos então pensar melhor na resolução da tarefa. (EA, fev/08)

Apesar dos alunos terem revelado alguma dificuldade em encontrar um processo correto de resolução da tarefa, a professora procurou dar apenas algumas orientações sem baixar o nível cognitivo do problema inicialmente proposto.

Práticas de Ana em Matemática e EA

Tal como Maria, Ana concretiza o ensino da Matemática segundo dois momentos a que chama *parte teórica* e *parte prática*. Quando Ana apresenta novos conteúdos – *parte teórica*, – a abordagem geral é expositiva, transmitindo a nova informação através de registos no quadro ou leituras do manual adotado. Esta é a fonte quase exclusiva para a seleção de tarefas pois apenas recorre a outros manuais quando aquele apresenta os conteúdos, na sua opinião, de forma incompleta:

> É assim, basicamente dou a matéria, a parte teórica, e depois faço exercícios para eles exercitarem aquilo que aprenderam (…) Primeiro tento seguir o livro, porque eles têm o livro e tento não usar outro. Resumo, faço sempre um resumo da parte teórica, daquilo que é importante para eles passarem para o caderno, e é aquilo que eu passo para o quadro. (E, jan/08)

Nestes momentos, os alunos assumem o papel de recetores de informação, pois Ana não os procura envolver ativamente na aprendizagem. Por exemplo, na introdução ao tópico *Triângulos semelhantes*, Ana apresenta no quadro os triângulos representados na Figura 8 e questiona os alunos:

> *Ana*: O que temos que fazer para verificar que os triângulos são semelhantes?
>
> *Alunos*: Temos de verificar se os ângulos são iguais e os lados proporcionais.
>
> [A professora faz no quadro a verificação destas condições]
>
> *Ana*: Os triângulos são casos especiais, por isso, se a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º então basta verificar que têm apenas dois ângulos correspondentes geometricamente iguais. (A, jan/08)

A professora limita-se a enunciar a conclusão a que pretende chegar, não promovendo nos alunos a compreensão das ideias matemáticas que lhe estão subjacentes.

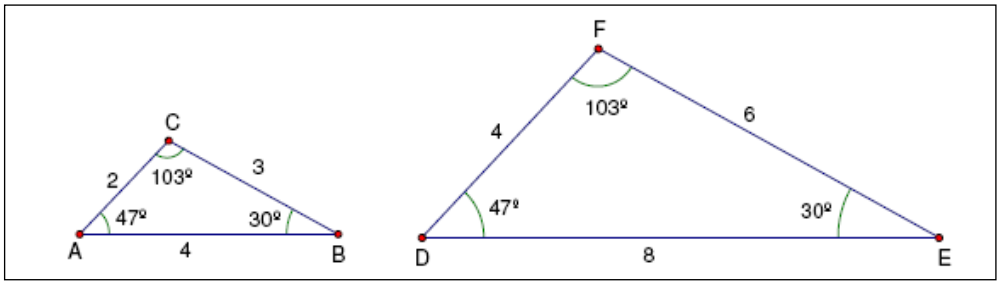
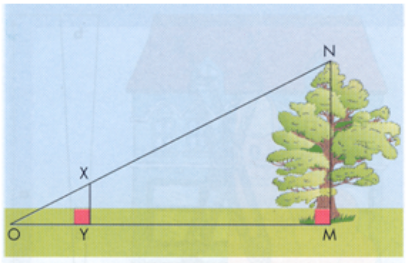


Figura 8: Situação usada na introdução ao tópico *Triângulos semelhantes*

Ainda na *parte teórica* das aulas de Matemática, Ana propõe aos alunos a realização de exercícios, com vários graus de dificuldade. Tal como Maria, Ana explora estas tarefas com os alunos diminuindo o seu nível de exigência cognitiva.

A *parte prática* das aulas de Ana carateriza-se pela aplicação dos conteúdos já abordados através da realização de um conjunto de tarefas rotineiras. O exemplo da situação seguinte ilustra uma prática frequente de Ana ao longo das aulas observadas. Numa das aulas, Ana propôs a tarefa da Figura 9 no início do tópico *Triângulos semelhantes*:

Para medir a altura de uma árvore, o Pedro utilizou uma vara [XY] de 0,5 m de altura. Sabe-se que $\overline{OY}$ = 2m e $\overline{OM}$ = 9m. Olhando do ponto O, verifica-se que o ponto O, o extremo da vara e o topo da árvore estão sobre a mesma reta.



1. Os triângulos [OXY] e [OMN] são semelhantes? Justifica. Se forem semelhantes, calcula a razão de semelhança.

2. Calcula a altura da árvore, ou seja, calcula $\overline{MN}$.

Figura 9: Tarefa *A vara e a árvore*

Como era usual, Ana iniciou a resolução da tarefa no quadro sem dar tempo para os alunos lerem e interpretarem o enunciado da tarefa. Fez uma figura no quadro, leu em voz alta o enunciado da tarefa e completou a figura com os dados (Figura 10).

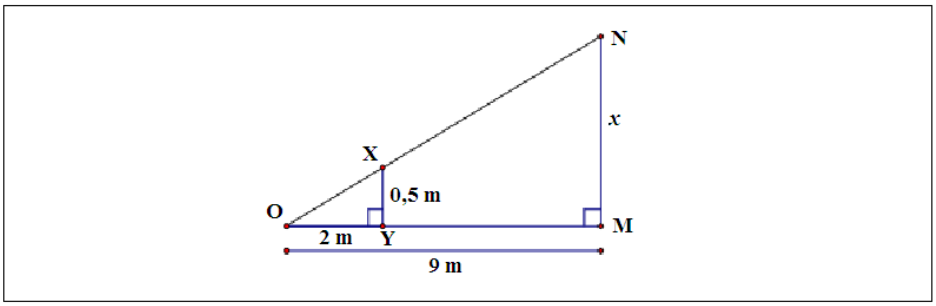


Figura 10: Registo de Ana na tarefa da Figura 9

Em seguida, Ana questionou a turma:

Ana: Como podemos verificar se os triângulos são semelhantes?

Alunos: Se tiverem dois ângulos iguais.

Ana: Querem dizer, se tiverem dois pares de ângulos com a mesma amplitude. Quais são?

Aluno1: O ângulo OMN é igual ao OYX.

Ana: Vamos melhorar a linguagem: a amplitude do ângulo OMN é igual à amplitude do ângulo OYX, pois ambos têm uma amplitude igual a 90º. Qual é o outro par de ângulos?

[Ninguém responde]

Ana: Só temos duas hipóteses.

Aluno2: A amplitude do ângulo OXY parece ser igual ao ângulo ONM.

Ana: Se observarmos bem a figura, verificamos que o ângulo OXY é comum aos dois triângulos. E assim concluímos que os dois triângulos são semelhantes.

[Pausa breve]

Ana: Se os triângulos são semelhantes, então os comprimentos dos lados correspondentes são diretamente proporcionais, logo podemos usar uma proporção. Alguém quer dizer a proporção?

Aluno3: É 2 sobre 9 igual a *x* sobre 0,5.

Ana: Têm de ter cuidado com os lados correspondentes, é 2 sobre 9 igual a 0,5 sobre *x*

[registando no quadro $\frac{2}{9} = \frac{0,5}{x}$ e solicitando a participação dos alunos para encontrar *x*]

Aluno4: Fica *x* igual a 9 vezes 0,5 a dividir por 2.

Aluno5: O *x* é igual 2,25.

Ana: Então a altura da árvore é de 2,25 metros. (A, jan/08)

Tal como nesta situação, Ana tipicamente não dá tempo aos alunos para interpretar os enunciados, pensar e encontrar um processo de resolução. É ela própria que procede, no quadro, à resolução das tarefas, solicitando oralmente as respostas aos alunos e promovendo a sua participação específica ou voluntária. Quando surgem respostas corretas, mas diferentes entre si, Ana não promove qualquer discussão. Quando surgem respostas erradas, procura dar pistas para que os alunos consigam chegar à resposta correta. No entanto, nestas situações, as pistas acabam por ser o início da resolução da tarefa, tendo apenas os alunos que *completar frases*. Muitas vezes, é a própria professora que resolve as tarefas na totalidade, corrigindo as respostas erradas dos alunos. Tal como ilustrado no extrato anterior, também nas *partes práticas* das aulas de Ana existe uma tendência para reduzir os aspetos desafiantes das tarefas propostas.

Nas aulas de Matemática, Ana propõe essencialmente exercícios com níveis de dificuldade variados: "faço uma seleção dos exercícios [do manual] (…) dos mais fáceis aos mais complicados" (E, jan/08). Os problemas e as tarefas que envolvem contextos reais são raramente propostos:

> Basicamente são exercícios de aplicação direta dos conteúdos. Não dá para avançar muito mais e é pena porque às vezes era interessante. Eu, sempre que tenho tempo, faço, mas é raro, não vou estar agora a dizer que faço porque é mentira. Era giro nós pegarmos nesses exercícios, na matéria que estamos a dar e tentar ligar a coisas reais do dia-a-dia, a problemas e coisas assim. (E, jan/08)

Apesar de as tarefas em contexto matemático prevalecerem nas aulas de Ana, ela propõe também algumas contextualizadas na semirrealidade. O fator tempo associado ao *cumprimento do programa*, além de surgir como impedimento a uma participação mais ativa dos alunos nas aulas de Ana, é, tal como para Maria, razão para a escolha de tarefas para as aulas de Matemática:

> Por falta de tempo. Eu pessoalmente acho que as aulas acabam por ser aborrecidas mas os programas são muito densos e nós somos obrigados a dar a matéria, fazer alguns exercícios e se calhar, às vezes, até devíamos fazer mais porque nem todos conseguem acompanhar. Mas como o programa é muito extenso nós temos que ser rápidos (…) Não dá, é impossível e mesmo assim quase nunca cumprimos o programa. (E, jan/08)

O PM da escola de Ana também associou a área de EA à disciplina de Matemática em todas as turmas do ensino básico para preparar os alunos para o exame nacional "porque o exame não inclui apenas conteúdos do 9.º ano, mas também do 7.º e do 8.º ano, é um exame do 3.º ciclo. Então achamos que deveríamos começar a preparação para o exame logo a partir do 7.º ano" (E, jan/08). Em simultâneo, o EA é destinado a reforçar as aprendizagens à disciplina, proporcionando "apoio aos conteúdos dados nas aulas" (E, jan/08).

Neste contexto, Ana refere que as práticas desenvolvidas em EA se baseiam, fundamentalmente, na proposta de tarefas retiradas de manuais escolares, das provas de exame nacional e do *Projeto 1000 itens*, constituindo-se estes recursos como as principais fontes de seleção de tarefas para EA:

> Agora com o PM, temos aqueles objetivos para o EA. Então temos sempre aquelas fichas preparadas, fichas que preparamos com antecedência, uma semana antes, todos os professores que estão no PM, e damos essas fichas (…) São fichas de trabalho com exercícios que tiramos de outros manuais, exercícios de exame e exercícios dos *1000 itens*. (E, jan/08)

Tal como Maria, Ana reconhece nas tarefas do *Projeto 1000 itens* uma utilidade pragmática na preparação dos alunos para exame. Contudo, não lhes dá tanta relevância como Maria, propondo-as em menor número e não lhe reconhecendo explicitamente tanto valor para o desenvolvimento de certas capacidades nos alunos. Além disso, Ana acaba por não explorar estas tarefas, mais desafiantes, de forma adequada, evidenciando uma tendência para reduzir o seu nível cognitivo. Por exemplo, a tarefa da Figura 11 constituiu um problema para os alunos de Ana. Mesmo envolvendo conceitos já trabalhados pelos alunos, pelas suas reações, o contexto não lhes era familiar. Porém, Ana rapidamente iniciou a resolução da tarefa no quadro, escrevendo "Quantia a pagar = 1250 euros + 12% de 1250 euros" (EA, dez/07). Tendo a professora interpretado o problema e indicado as operações a realizar, os alunos não tiveram dificuldade em completar a tarefa. Assim, o problema inicial transformou-se em mais um exercício.

A Ana foi pedir um empréstimo ao banco para comprar um computador. Foram-lhe concedidos 1250 € à taxa de 12% ao ano.

Ao fim de um ano, quanto tem que pagar?



Figura 11: Tarefa proposta em EA

A forma como Ana explora as tarefas que propõe nas aulas de Matemática e nas de EA não difere significativamente. Pelas observações feitas em EA, a professora começa por fornecer uma ficha de trabalho com várias tarefas, sempre relacionadas com os conteúdos que estão a ser abordados nas aulas de Matemática. Depois, rapidamente resolve no quadro as tarefas, solicitando respostas oralmente. Tal como nas aulas de Matemática, Ana não valoriza as intervenções dos alunos e procura orientá-las, direcionando o seu pensamento para as respostas pretendidas.

Apesar da prevalência dos exercícios nas aulas de EA de Ana, são também propostos alguns problemas. No entanto, tal como nas aulas de Matemática, a forma como Ana explora as tarefas em EA com os alunos tipicamente resulta na redução do nível cognitivo das mais desafiantes, limitando as possibilidades de aprendizagem dos alunos. Nas aulas de EA observadas houve um certo equilíbrio entre os contextos matemático e da semirrealidade, tendo também sido propostas esporadicamente tarefas contextualizadas na realidade.

Conclusões

Comparando as práticas de Ana e Maria nas aulas de Matemática e de EA, os dados apresentados parecem sugerir que as professoras procuram articular o que fazem nestes espaços de trabalho com os alunos de modo complementar, mas de formas diferentes. Os exercícios são as tarefas de eleição nas aulas de Matemática das duas professoras. Nas aulas de EA, o leque de tarefas propostas aos alunos alarga-se um pouco, embora não vá além das tarefas de natureza fechada. Este fenómeno em EA parece relacionar-se com um objetivo do

PM comum às escolas de cada professora – a preparação dos alunos para o exame nacional de Matemática do 9.º ano, – que concretizam de forma diferente.

Maria aproveita as aulas de EA para estimular nos alunos o desenvolvimento de certas capacidades que não consegue, na sua opinião, trabalhar nas aulas de Matemática, em particular capacidades transversais que reconhece importantes *per se* e necessárias a um bom desempenho nos exames nacionais. Ana usa as aulas de EA para reforçar as atividades propostas nas de Matemática, recorrendo a problemas com menor frequência que a sua colega. Assim, os dados sugerem que as práticas desenvolvidas em EA por estas professoras assentam numa visão de disciplinarização, pois promovem essencialmente uma aprendizagem disciplinar, configurando tais práticas uma perspetiva de EA como um *projeto-enclave* (Cosme & Trindade, 2001).

Os dados recolhidos sugerem que a forma como cada professora explora as tarefas com os alunos é diferente. Apesar de nem sempre o conseguir, Maria procura, nas orientações que dá aos alunos para desbloquear situações de impasse, não lhes retirar a oportunidade de pensar matematicamente. Estas ações são consistentes com as referidas por Stein e Smith (2009), na manutenção do nível cognitivo das tarefas mais desafiantes. Esta preocupação de Maria é mais evidente nas aulas de EA do que nas de Matemática. Por seu lado, em geral, Ana não proporciona aos alunos, seja em Matemática ou em EA, oportunidades para desenvolverem mais e melhores conhecimentos e capacidades. Para além de tipicamente reduzir o nível cognitivo das (poucas) tarefas desafiantes que lhes propõe, através das informações que fornece para que avancem rapidamente na resolução, Ana não lhes dá tempo para que possam efetivamente envolver-se nas tarefas propostas. Estas ações são consistentes com as referidas por Stein e Smith (2009), na redução do nível cognitivo das tarefas mais desafiantes.

Ambas as professoras referem a falta de tempo associada ao *cumprimento do programa* como razão para não alargarem significativamente o tipo de tarefas que propõem nas aulas de Matemática. Contudo, apesar de o EA estar associado à disciplina de Matemática (por via do PM) e proporcionar mais tempo para trabalhar Matemática, a diversificação de tarefas não é uma realidade nas práticas destas professoras, nem nas aulas de Matemática nem nas de EA. Sendo o manual adotado a fonte primordial de seleção de tarefas, sobretudo para as aulas de Matemática, a diversificação de tarefas parece depender da qualidade e adequabilidade ao programa deste instrumento de trabalho. De notar ainda que as professoras, quando se referem ao *cumprimento do programa*, parecem perspetivá-lo apenas como um conjunto de unidades temáticas, não evidenciando uma visão integradora das suas várias dimensões e, em particular, não tendo em conta a diversidade de tarefas e sua articulação como dimensões constitutivas do programa.

Apesar de, nos seus projetos, as duas escolas terem definido estratégias para as aulas de Matemática e para as de EA, as professoras parecem associar as suas práticas ao PM apenas no que se refere ao EA e não à Matemática. Ou seja, as práticas concretizadas em Matemática parecem ser uma opção individual (de cada professora) sem qualquer ligação ao PM da respetiva escola; pelo contrário, as práticas de EA parecem ser uma opção individual e/ou do grupo de professores de Matemática da escola mas são sempre, de alguma forma, associadas ao PM de cada escola. De facto, nas razões apresentadas para a seleção de tarefas, as professoras referem-se ao(s) objetivo(s) do PM para esta área curricular não disciplinar, mas refugiam-se preferencialmente no fator tempo associado ao *cumprimento do programa* para a disciplina de Matemática. Assim, parece-nos que o PM tem uma maior influência nas práticas das professoras nas aulas de EA do que nas de Matemática. Reconhecendo que se trata de uma realidade local, os resultados sugerem que devemos olhar com cuidado para certas tendências observadas na implementação do PM a nível nacional, em que a diversificação de tarefas em sala de aula teve uma expressão progressivamente significativa, apesar de persistir uma preferência pelos exercícios (Santos *et al*., 2009).

Referências

APM (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da matemática (Relatório final)*. Lisboa: APM e IIE.

Bishop, A. & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.

Christiansen, B. & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Orgs), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.

Cosme, A., & Trindade, R. (2001). *Área de Estudo Acompanhado: O essencial para ensinar a aprender*. Porto: ASA.

Delgado, F. (2011). *A articulação entre a Matemática e o Estudo Acompanhado: Conceções e práticas de professores*. Tese de Mestrado, Universidade do Minho.

ME (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais*. Lisboa: ME-DEB.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: ME-DGIDC.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Org.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. & Serrazina, L. (2004). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Quadrante, 13*(2), 51-74.

Santos, L., Brocardo, J., Pinheiro, A., Santos, E., Pires, M., Amado, N., Ferreira, R., & Canelas, R. (2009). *Plano da Matemática. Relatório final 2006-2009*. ME-DGIDC. Acedido em http://www.dgidc.min-edu.pt/outrosprojetos/index.php?s=directorio&pid=104#i, a 6/10/2011.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema*, *14*, 66-91.

Stein, M. K. & Smith, M. S. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para reflexão: Da investigação à prática. *Educação e Matemática*, *105*, 22-28.

Vieira, F., Pessoa, J. F., Silva, A. & Lima, C. (2004). Para a compreensão da área de Estudo Acompanhado. Acedido em http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/4120, a 1/2/2007.

PRÁTICAS DE ENSINO EXPLORATÓRIO DA MATEMÁTICA: O CASO DE CÉLIA[1]

Ana Paula Canavarro
Universidade de Évora & Unidade de Investigação do IE da Universidade de Lisboa
apc@uevora.pt

Hélia Oliveira
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ul.pt

Luís Menezes
Escola Superior de Educação de Viseu/ CI&DETS
menezes@esev.ipv.pt

Resumo: Este estudo foi desenvolvido no âmbito do projeto de investigação P3M, Práticas profissionais dos professores de Matemática. Um dos seus principais objetivos é a proposta de um quadro de referência para a prática de ensino exploratório da Matemática, combinando perspetivas teóricas e a análise da prática de professores experientes que regularmente conduzem aulas de natureza exploratória – neste artigo centramos-nos no caso de Célia, uma professora de 1.º ciclo a lecionar uma turma de 4.º ano. O quadro adota um modelo de quatro fases para a estrutura aula: 1) Introdução da tarefa; 2) Desenvolvimento da tarefa; 3) Discussão da tarefa, e 4) Sistematização das aprendizagens matemáticas. Para cada fase, procuramos descrever as ações que a professora desenvolve com dois principais objetivos: promover a aprendizagem matemática dos alunos e gerir os alunos e a turma. As ações da professora adquirem significado quando entendidas à luz destes dois objetivos, interrelacionados, observando-se que a maioria das ações que executa com o propósito de gestão tem uma enorme importância para conseguir concretizar um ensino exploratório eficaz, na qual os alunos aprendam o que pretende. Sublinha-se também a variedade de papéis que a professora desempenha, destacando a importância da sua condução na fase de sistematização das aprendizagens. O quadro evidencia o carácter multidimensional e relacional do ensino, reconhecidamente complexo no ensino exploratório, sendo as ações da professora, ainda que previstas e planeadas, decorrentes da interpretação que faz do que observa nos alunos no decurso da aula.

Palavras-chave. Práticas de ensino; ensino exploratório; intenções e ações do professor; estrutura e fases da aula.

Contexto e objetivo do estudo

Em Portugal, como em muitos países, as atuais orientações curriculares para o ensino da Matemática apresentam metas desafiantes para a aprendizagem dos alunos. No entanto, também colocam desafios significativos às práticas de sala de aula dos professores. A prática de ensinar Matemática centrada na exposição dos tópicos por parte do professor e seguida da realização de exercícios com vista à repetição de procedimentos por parte dos alunos, tem

[1] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

sido dominante um pouco por todo o lado (Franke, Kazemi, & Battey, 2007), mas não é a mais adequada para lidar com todas as atuais exigências curriculares. Hoje em dia, os alunos precisam de oportunidades de realizar tarefas matemáticas significativas que lhes permitam raciocinar matematicamente sobre ideias importantes e atribuir sentido ao conhecimento matemático que surge a partir da discussão coletiva dessas tarefas (NCTM, 2000; Ponte, 2005). Isso exige do professor uma abordagem exploratória do ensino, centrada no trabalho dos alunos quando se envolvem na exploração matemática de tarefas ricas e valiosas (Ponte, 2005; Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008). O nosso objetivo é comprender a prática de ensino exploratório, identificando quais são as principais intenções do professor em cada fase da aula e descrever com detalhe as ações que realiza enquanto ensina. É nossa expectativa que a elaboração de um quadro de referência para o ensino exploratório da Matemática poderá constituir um recurso útil para usar em programas de formação de professores e um contributo para promover o desenvolvimento profissional do professor. Neste artigo optamos por nos focar no caso de Célia, professora de 1.º ciclo, descrevendo e analisando a sua prática de ensino exploratório, o que constituiu um contributo para o objetivo de elaboração do quadro de referência referido.

Perspetivas teóricas

A prática de ensino exploratório da Matemática exige do professor muito mais do que a identificação e seleção das tarefas para a sala de aula. A seleção de uma tarefa adequada e valiosa é muito importante pois ela tem implícita uma determinada oportunidade de aprendizagem mas, uma vez selecionada, é crucial que o professor equacione como explorar as suas potencialidades junto dos alunos e se prepare para lidar com a complexidade dessa exploração na sala de aula (Stein *et al*., 2008).

Uma aula exploratória típica é geralmente estruturada em três ou quatro fases: a fase de "lançamento" da tarefa, a fase de "exploração" pelos alunos, e a fase de "discussão e sintetização" (Stein *et al*., 2008). Na primeira fase, o professor apresenta uma tarefa matemática à turma. A tarefa é frequentemente um problema ou uma investigação, exigindo interpretação por parte dos alunos. O professor deve assegurar, em poucos minutos, que estes entendem o que se espera que façam e que se sintam desafiados a trabalhar na tarefa. O professor tem também de organizar o desenvolvimento do trabalho pela turma, estabelecendo o tempo a dedicar às diferentes fases, gerindo os recursos a usar e definindo os modos de trabalho dos alunos (Anghileri, 2006).

Na segunda fase, o professor apoia os alunos no respetivo trabalho autónomo sobre a tarefa, realizado individualmente ou em pequenos grupos, procurando garantir que todos participam e de forma produtiva. É importante que os comentários e as respostas do professor às eventuais dúvidas dos alunos não reduzam o nível de exigência cognitiva da tarefa (Stein & Smith, 1998) e não uniformizem as estratégias de resolução, a fim de não frustrar a hipótese de em seguida promover uma discussão matemática interessante e desafiante para cada aluno. O professor precisa também de garantir que os alunos se preparam para apresentar o seu trabalho à turma toda e que produzem os materiais adequados em tempo útil para a fase de discussão. Enquanto isso, o professor tem de selecionar, a partir da sua rápida observação e apreciação das produções dos alunos em resposta à tarefa, as soluções que avalia como contribuições positivas para a discussão coletiva e estabelecer a sequência da sua apresentação pelos alunos (Stein *et al*., 2008).

Depois desta fase, a turma retorna ao plenário para a discussão coletiva das resoluções selecionadas. O professor tem de orquestrar essa discussão, não apenas gerindo as intervenções e interações dos diferentes alunos, mas também promovendo a qualidade

matemática das suas explicações e argumentações (Ruthven, Hofmann, & Mercer, 2011), e cuidando da comparação de distintas resoluções e da discussão da respetiva diferença e eficácia matemática (Yackel & Cobb, 1996).

O professor precisa também de manter um clima positivo e de genuíno interesse na discussão, tentando garantir a participação de todos os alunos. É importante que a discussão tenha como objetivo mais do que a comparação e o confronto das resoluções dos alunos, e contribua para que estes realizem novas aprendizagens relevantes, não só sobre os conceitos, procedimentos ou processos em presença, mas também sobre os modos legítimos de produção do conhecimento matemático (Boavida, 2005). O professor tem aqui um papel crucial na orientação dos alunos para o apurar das principais ideias matemáticas que surgem a partir da discussão (Anghileri, 2006). O final da discussão é um momento de institucionalização das aprendizagens, que toda a turma deve reconhecer e partilhar, no qual tanto podem surgir novos conceitos ou procedimentos emergentes da discussão da tarefa como serem revistos e aperfeiçoados conceitos e procedimentos já conhecidos e aplicados, estabelecidas conexões com situações anteriores, e/ou reforçados aspetos fundamentais dos processos matemáticos transversais como a representação, a resolução de problemas, o raciocínio matemático ea comunicação matemática (Canavarro, 2011; Stein *et al*., 2008).

O desenvolvimento do ensino exploratório constitui uma prática complexa para a maioria dos professores, nomeadamente no que diz respeito à orquestração das discussões matemáticas (Franke, Kazemi & Battey, 2007; Stein *et al*., 2008). As práticas dos professores podem ser entendidas como as atividades que realizam regularmente, tendo em consideração o seu contexto de trabalho e os seus significados e intenções (Ponte & Chapman, 2006). Lampert sublinha que a "prática de ensino é aquilo que os professores fazem, mas é mais do que o modo como se comportam com os seus alunos ou do que as ações de cada professor individual; a ação é um comportamento com significado, e a prática é a ação informada por um contexto organizacional" (Lampert, 2004, p. 2). Assim, para descrever e compreender a prática de ensino do professor é essencial não só identificar as suas ações, mas também as intenções que estão incorporados nessas ações, as razões que justificam que se comporte de determinada maneira, nomeadamente as que derivam do seu contexto de ensino.

É igualmente importante sublinhar que o ensino é uma atividade relacional e multidimensional (Franke, Kazemi, & Battey, 2007). A dimensão relacional advém das relações que se estabelecem entre o professor, os alunos e o conteúdo do ensino, que só podem ser entendidos uns em função dos outros: "O professor trabalha para orquestrar o conteúdo, as representações do conteúdo, e as pessoas na sala de aula em interação uns com os outros" (Franke, Kazemi, & Battey, 2007, p. 227). A dimensão multidimensional do ensino resulta da diversidade de cenários e exigências que a sala de aula coloca em simultâneo. O professor precisa de criar um ambiente de aprendizagem que acolha todos os alunos, de gerir as suas participações e interações de modo a que se relacionem produtivamente com o conteúdo matemático e as suas representações, de identificar e interpretar o que os alunos fazem e dizem de modo a orientá-los por trajetórias em que se possam desenvolver matematicamente. Isso exige do professor um processo contínuo de tomada de decisões que combina os seus conhecimentos, crenças e propósitos (Franke, Kazemi, & Battey, 2007).

Abordagem metodológica

Este artigo reporta-se a um estudo desenvolvido na primeira fase do Projeto P3M (Ponte *et al*., 2012), visando a construção de casos multimédia de professores participantes do projeto que ilustram práticas de ensino exploratório da Matemática em diversos contextos (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2012). Para a elaboração dos casos focados nas práticas de professores,

adotámos uma abordagem interpretativa para a investigação, considerando a importância de conhecer as perspetivas dos professores para compreender as suas ações enquanto ensinam (Sowder, 2007).

Escolhemos trabalhar com professores experientes que se sentem confortáveis com o ensino de natureza exploratória da Matemática para que possam proporcionar um contexto favorável e rico para a recolha dos dados. Optámos também por trabalhar com professores de diferentes níveis, desde o 1.º ciclo ao ensino secundário, e focando aulas sobre diferentes temas matemáticos para que possamos ter uma panorâmica mais ampla da prática de ensino exploratório, independentemente do nível de escolaridade e do conteúdo matemático.

Para cada um dos professores (um por ciclo de ensino), são observadas uma ou das aulas, de modo a registar-se todo o trabalho realizado com base na exploração de uma mesma tarefa. Os dados são recolhidos em três momentos: antes, durante e depois da(s) aula(s). Antes é feita uma entrevista inicial para a compreensão da planificação dos professores, nomeadamente das principais opções sobre a tarefa e as orientações metodológicas pensadas para o seu desenvolvimento com a turma, registando-se igualmente a antecipação, por parte do professor, de eventuais estratégias e dificuldades dos seus alunos. Esta entrevista foi acompanhada pela análise do plano da aula previamente preparado pelo professor.

A recolha de dados em sala de aula envolve o uso de duas câmeras de vídeo para registrar tanto os momentos de trabalho com toda a turma, bem como alguns episódios de interação entre o professor e os alunos enquanto trabalham de forma autónoma na realização da tarefa. A partir dessa recolha vídeo, são selecionados pelo investigador segmentos específicos que constituem episódios de ensino a usar na entrevista pós-aula ao professor.

No final é realizada uma entrevista de reflexão sobre a prática, a qual inclui a análise dos episódios de ensino selecionados, com o objetivo de registrar as explicações do professor sobre o desenvolvimento da aula e as justificações das suas ações, confrontando ainda o que foi planeado e o que foi implementado durante a aula. Nesta entrevista, a observação dos episódios vídeo de ensino selecionados ajuda o professor a concentrar-se na realidade concreta da sua aula em análise, evitando que se refira apenas a ideas superficiais ou distorcidas ou a princípios gerais relativos ao ensino da Matemática.

A preparação e a condução das entrevistas baseia-se em categorias gerais que consideramos à priori, inspiradas pela nossa experiência e por perspetivas teóricas que adotamos, nomeadamente sobre a estrutura da aula exploratória e sobre dois propósitos da atividade do professor quando ensina: a promoção da aprendizagem matemática dos alunos e a gestão da turma. Isto significa que durante a recolha de dados (observação e entrevistas) procuramos obter dados que nos permitam descrever as ações e intenções do professor em cada uma das fases da aula, bem como adaptar e completar as nossas categorias para a realidade da prática de cada docente. Por exemplo, no início não tínhamos muita certeza sobre a adoção de um modelo de três ou quatro fases para a aula mas a análise do primeiro caso deu-nos convicção para distinguir duas fases da aula após a realização da tarefa pelos alunos, pelo que apontámos para um modelo de quatro fases.

Seguindo este método, obtemos um retrato das ações intencionais de cada professor ao praticar um ensino exploratório da Matemática. Numa segunda fase, pretendemos realizar uma análise transversal dos diferentes casos que nos permitirá apurar um quadro global com as intenções e ações comuns aos casos de todos os professores, bem como outras mais particulares mas que se tenham revelado importantes para a condução eficaz do ensino exploratório.

A prática de ensino exploratório da professora Célia

Neste artigo centramo-nos no caso de Célia, uma professora experiente de 1.º ciclo, que ensina há 14 anos. Analisamos a sua prática de ensino correspondente à aula de exploração da tarefa "Cubos com autocolantes" (Anexo 1), numa turma do 4.º ano, a qual tinha como objetivo geral o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, em particular o reconhecimento de uma sequência e das variáveis nela implícitas, a identificação da relação entre elas, e a expressão da regra geral da relação entre as variáveis, em linguagem natural e em linguagem simbólica. A professora selecionou esta tarefa em continuidade com a realização de uma outra que também proporcionou aos alunos a oportunidade de generalizar uma regra por uma expressão algébrica com letras.

A aula começou com a apresentação da tarefa para toda a turma, passou a um período de trabalho dos alunos em pares, seguiu-se uma discussão coletiva de algumas resoluções propostas pelos alunos que incluiu uma comparação e confronto das estratégias usadas e, finalmente, encerrou com uma sistematização acerca da forma, significado e valor da regra geral encontrada para resolver a tarefa. As quatro fases foram planeadas por Célia: o plano de aula foi organizado por "introdução da tarefa", "trabalhar em pares", "discussão coletiva" e "sistematização". O plano também revelou, para cada fase, um conjunto de ações que previu executar, a maioria diretamente dedicadas a promover a aprendizagem matemática dos alunos (por exemplo, colocar algumas questões específicas para os alunos, comparar diferentes soluções específicas, ...) e algumas outras relativas à gestão da turma e do seu trabalho (por exemplo, organizar os alunos em pares, selecionar as resoluções dos alunos a serem discutidas, fornecer transparências e canetas para preparar as apresentações, ...). Célia registou também no plano a previsão do tempo, em minutos, que pretendia dedicar a cada fase da aula.

De seguida, selecionamos alguns trechos da entrevista de pós-reflexão realizada a Célia, em que a professora explica as suas opções e as suas principais intenções, o que nos permite interpretar as ações observadas em cada fase da aula.

Introdução da tarefa

Célia explica muito claramente as suas intenções na apresentação da tarefa à turma. Considera que esse momento é decisivo para o desenvolvimento do trabalho matemático dos alunos, pelo que deve requerer bastante cuidado por parte do professor. Esta preocupação de Célia é justificada pela natureza das tarefas que escolhe quando desenvolve uma abordagem exploratória na sala de aula: tarefas desafiadoras, frequentemente problemas ou investigações que exigem um esforço de interpretação. Célia tenta assegurar que os alunos compreendam bem o contexto e os objetivos da tarefa, ouvindo atentamente os seus comentários e perguntas:

> portanto eu acho que deve ser uma apresentação de um desafio e deve ser uma interpretação e uma compreensão do que é que aquele desafio pretende… Penso que sim, que serão esses os dois objetivos, o interpretar, o compreender o que se pretende. (…) Eu tenho a preocupação de dedicar o tempo suficiente para eles perceberem e dar também tempo para eles colocarem as questões e as dúvidas… O estar a questioná-los e o estar à espera que perguntem ou que tenham dúvidas é também para que eu própria perceber se eles perceberam.

Na perspetiva de Célia, se os alunos não entendem a tarefa "eles vão criar confusões e então... às vezes é tarde demais na aula para esclarecer e para os recuperar". Além de garantir a

compreensão da tarefa pelos alunos, Célia também quer que eles se envolvam com esta e assumam o desafio de a resolver:

> É impeli-los para a tarefa, predispô-los para a tarefa. Não é só compreender, mas assumir a tarefa como sua… no fundo aqui entra também um bocado a parte do desafio, assumir como uma questão minha que eu quero resolver.

Desenvolvimento da tarefa

Célia centra a sua reflexão sobre esta fase da aula no seu apoio aos alunos para a resolução autónoma da tarefa. Confessa as suas dificuldades em monitorar o progresso do trabalho dos alunos. Isto exige, na sua opinião, "um equilíbrio" entre deixá-los por conta própria e dar-lhes alguma orientação. Mas, acima de tudo, quer dar-lhes a oportunidade de resolver a tarefa pelas suas próprias estratégias, nem que isso represente ser ela mesma a fazer o esforço de tentar compreender o pensamento dos alunos:

> Quando eu procuro ir de par em par ou de grupo em grupo, procuro perceber como é que eles estão, o que é que eles perceberam, como é que eles estão a trabalhar – e procuro fazer isto com perguntas e às vezes não é fácil. (…) Tenho um bocado esta preocupação de tentar seguir os raciocínios deles, que não é fácil, porque às vezes há situações em que a gente está muito longe e estamos a ver que é correcto… Mas como é que ele pensou?

Outra preocupação de Célia é não validar a correção das estratégias ou respostas dos alunos, nem quando estão certos, nem quando estão enganados, embora saiba que às vezes a sua expressão facial revela mais do que ela gostaria. Quando identifica algum grupo cujo trabalho não evolui de forma produtiva, coloca-lhe perguntas com a intenção de fazer com que os alunos reflitam sobre a abordagem à tarefa e os seus erros e adotem uma outra estratégia para a sua resolução ou corrijam os erros:

> Se eu estou a ver que eles estão a ir por um caminho completamente errado, tento não dizer "isto não está bem"… Tento dizer "mas como é que começaste? Então volta lá atrás… Será que isto se verifica?". Por exemplo, se eles pensaram mal para os 10 cubos, pergunto "essa forma de pensar verifica-se da forma como pensaste para os 3 cubos?"… Tentar fazer com que eles cheguem ao caminho correcto.

Mas Célia também se refere à dificil função que tem de desempenhar enquanto acompanha o trabalho dos grupos, relativa à organização da discussão da tarefa. A professora escolhe cuidadosamente as resoluções dos grupos que identifica como relevantes para contribuir para a discussão matemática coletiva que quer promover com o objetivo de cumprir o seu propósito matemático específico da aula:

> escolher quais daquelas resoluções são importantes para a discussão colectiva – e isso é muito difícil porque… às tantas, é quase um distanciamento que é complicado gerir na aula (…) com todas aquelas solicitações. (…) Destas oito resoluções diferentes, porque não podem ser todas, qual aquela que me interessa discutir nesta aula em particular?

Célia estabele também a ordem de discussão das resoluções que seleciona em função do potencial que lhe reconhece com vista a promover uma maior clarificação e compreensão da tarefa e também para explorar representações matemáticas produtivas e esclarecedoras:

> O eu ter escolhido esta primeiro tem a ver com a tal questão da visualização… era a mais clara para eles entenderem as construções e a regra. Esta (outra) era mesmo por causa da imagem e da forma como eles representaram, eles foram aqui muito claros, 1+1+1… portanto eram os 8 cubos a representar as diferentes faces (…) Esta [outra] era das representações mais claras desta questão da visualização, como eles visualizavam as construções – eu achei que se ainda havia dúvidas ou se ainda havia problemas, esta era mais uma tentativa de resolver.

Discussão da tarefa

Célia explicitamente valoriza esta fase da aula, pois para si constitui uma importante oportunidade de aprendizagem matemática para todos os alunos em sala de aula:

> é extremamente importante porque não é só eles terem estado a pares a trabalhar, mas é… Depois o que é que isso é em termos da aula de Matemática, o que é que fica no colectivo, o que é que é discutido?

A professora pede aos autores das resoluções selecionadas que exponham as suas estratégias e expliquem o seu raciocínio aos colegas, bem como que respondam às questões uns dos outros. Evita interferir na discussão, pois pretende que os alunos sejam protagonistas e eles parecem aceitar bem esse papel:

> a tentativa é que o momento seja deles, a apresentação seja deles, que as questões sejam colocadas ao grupo que apresenta (…) E eles estão constantemente a questionar os colegas e estão interessados…

Nesta fase, as principais preocupações da professora centram-se na orquestração das intervenções dos alunos, de modo a promover o esclarecimento das ideias matemáticas emergentes. Para esta professora, a discussão vai muito além da correção da tarefa, e o confronto de diferentes estratégias e resoluções constitui um enriquecimento que quer proporcionar aos alunos, mesmo quando eles discutem resoluções com erros:

> Eu acho que se apresentar diferentes [resoluções], se eles tiverem capacidade de apresentar diferentes representações e eu, depois, puder ligá-las e estabelecer as conexões entre elas, é muito mais rico do que apresentar uma só (…). A ideia também é deixar surgir aquilo que sai deles (…) e, às vezes, até pegar em situações que não estão certas.

Apesar de na aula observada manter nesta fase um papel discreto de orientação a professora conduziu uma discussão específica por ela proposta, confrontando três das diferentes resoluções já apresentadas pelos alunos, que expôs em simultâneo no retroprojetor, recorrendo aos acetatos dos grupos. A sua explicação para esta ação aparentemente contraditória baseia-se na sua visão do papel da discussão da tarefa:

> Há uma altura em que eu confronto três resoluções. A ideia é essa, de haver o confronto. [A discussão] é um momento de aprendizagem, portanto… Não pode ser uma apresentação, nem é uma correcção, porque não é isso… o momento é de pôr em confronto, pensarmos em conjunto nas diferentes resoluções, nas diferentes representações, isso tem de sair dali, da apresentação… é um objetivo. (…) É colocá-los a eles a ter esse sentido crítico: "nesta situação, qual é aquela representação, aquela resolução… qual é a forma de pensar que, de facto, me ajuda mais? Porque posso ter duzentas mas, se calhar, há ali uma que eu posso escolher…."

Sistematização da aprendizagem matemática

Após a discussão, que concluiu sobre uma regra que permite determinar quantos autocolantes são utilizados numa construção com um determinado número de cubos, Célia adotou um papel mais diretivo para realizar um "momento de sistematização". Ela mostra aos alunos uma tabela incompleta, projetada numa transparência que previamente preparou, que relaciona o número de cubos e o número de autocolantes, e desafia-os a uma outra questão que estende a tarefa anterior. A professora quer tirar proveito da discussão da tarefa para reforçar a importância e o poder das regras com letras ao explorar situações em que se lida com uma variável. Recorda também as operações inversas, procurando que a regra seja lida "ao contrário", estabelecendo assim conexões com conhecimentos e procedimentos já abordados com os alunos em situações anteriores.

> Depois deles trabalharem em pares e de discutir coletivamente o que fizeram, há uma parte de sistematização onde eu confronto… Começo por esta tabela – este número de cubos [52] até foi uma coisa que eles trabalharam – [e pergunto]: "Como é que descobrimos o número de autocolantes?". Então, fizemos e escrevemos a regra… "E agora, sabendo o número de autocolantes, como é que sabemos o número de cubos?". E depois há o confronto das regras no sentido de se ver as operações inversas que foram trabalhadas. E isso foi feito na sistematização, no momento de sistematização.

Conclusões e considerações finais

O quadro 1 apresenta, de forma sintética, o conjunto de ações que Célia executa enquanto ensina e as intenções principais que tem subjacentes a essas ações. As ações foram observadas na sala de aula de Célia e as intenções foram identificados a partir das entrevistas, em especial da de reflexão final. Identificámos também, entre as intenções explicitadas, em qual dos dois grandes objetivos se enquadrava: promover as aprendizagens matemáticas dos alunos ou gerir os alunos e a turma e o funcionamento da aula.

Quadro 1: Ações intencionais de Célia na sua prática de ensino exploratório da Matemática

	Promoção da aprendizagem matemática	**Gestão da aula**
Introdução da tarefa	*Garantir a apropriação da tarefa pelos alunos:* - Familiarizar com o contexto da tarefa (material cubos e autocolantes para apresentação) - Esclarecer a interpretação da tarefa (como?) - Estabelecer objetivos (o que se quer saber?) *Promover a adesão dos alunos à tarefa:* - Estabelecer conexões com experiência anterior - Desafiar para o trabalho	*Organizar o trabalho dos alunos:* - Definir formas de organização do trabalho (grupos de dois alunos para o trabalho autónomo e turma toda para a discussão colectiva) - Organizar materiais da aula (folhas com enunciado da tarefa e cubos e autocolantes para todos os grupos)
Realização da tarefa	*Garantir o desenvolvimento da tarefa pelos alunos:* - Colocar questões e dar pistas - Sugerir representações - Focar ideias produtivas - Pedir clarificações e justificações *Manter o desafio cognitivo e autonomia dos alunos:* - Cuidar de promover o raciocínio dos alunos - Cuidar de não validar a correcção matemática das respostas dos alunos (nem respostas, nem expressões faciais)	*Promover o trabalho de pares/grupos*: - Regular as interações entre alunos - Providenciar materiais para o grupo *Garantir a produção de materiais para a apresentação pelos alunos:* - Pedir registos escritos - Fornecer materiais a usar (acetatos e canetas) *Organizar a discussão a fazer:* - Identificar e selecionar resoluções variadas (clarificadoras, com erro a explorar, e com representações relevantes) - Sequenciar as resoluções selecionadas

Discussão da tarefa	*Promover a qualidade matemática das apresentações dos alunos*: - Pedir explicações claras das resoluções (Porquê?) - Pedir justificações sobre os resultados e as formas de representação utilizadas - Discutir a diferença e eficácia matemática das resoluções apresentadas (tabelas e regras escritas como expressões com letras) *Regular as interações entre os alunos na discussão:* - Incentivar o questionamento para clarificação de ideias apresentadas ou esclarecimento de dúvidas - Incentivar a resposta às questões colocadas	*Criar ambiente propício à apresentação e discussão:* - Dar por terminado o tempo de resolução da tarefa pelos alunos - Providenciar a reorganização dos lugares/espaço para a discussão - Promover atitude de respeito e interesse genuíno pelos diferentes trabalhos apresentados *Gerir relações entre os alunos:* - Definir a ordem das apresentações - Promover e gerir as participações dos alunos na discussão
Sistematização das aprendizagens matemáticas	*Institucionalizar ideias ou procedimentos relativos ao desenvolvimento do pensamento algébrico suscitado pela exploração da tarefa:* - Identificar representações produtivas para obter generalizações (tabela) - Reconhecer o valor de uma regra com letras *Estabelecer conexões com aprendizagens anteriores:* - Evidenciar ligações com conceitos matemáticos e procedimentos anteriormente trabalhados (ideia de regra com letras; ideia de operação inversa).	*Criar ambiente adequado à sistematização:* - Focar os alunos no momento de sistematização coletiva - Promover o reconhecimento da importância de apurar conhecimento matemático a partir da tarefa realizada *Garantir o registo escrito das ideias resultantes da sistematização*: - Registo pela professora em acetato que previamente estruturou

Para organizar estas ações adotamos um modelo de quatro fases, baseado na forma como a professora desenvolveu a sua aula relativa à tarefa "Cubos e autocolantes": Introdução da tarefa pela professora em interação com os alunos; Realização da tarefa pelos alunos e acompanhada pela professora; Discussão da tarefa pelos alunos, orquestrada pela professora; Sistematização das aprendizagens matemáticas, conduzida pela professora com a colaboração dos alunos. Esta opção permite distinguir dois fins diferentes do trabalho coletivo da turma posterior à resolução da tarefa, identificados nas práticas de Célia: a discussão da tarefa, com base na comparação e confronto de estratégias dos alunos, e o colocar em evidência e institucionalizar da aprendizagem matemática (um conceito, uma ideia, um procedimento, ...) pretendida pela professora como um propósito matemático da aula, ancorada na exploração da tarefa e sua discussão. A identificação destes dois propósitos distintos, correspondentes também a momentos distintos da aula, reforça a possibilidade de o ensino exploratório ser adequado não apenas ao desenvolvimento de capacidades transversais dos alunos como, por exemplo, a resolução de problemas e a comunicação matemática, mas também como contexto de aprendizagem de conceitos e procedimentos que anteriormente não foram ainda trabalhados pelo professor com osa lunos e que assim surgem com significado e relevância perante estes (Canavarro, 2011; Stein *et al*., 2008).

Ao conduzir a sua aula, Célia age motivada por dois propósitos principais que se distinguem e se revelaram no seu discurso: a promoção das aprendizagens matemáticas dos alunos e a gestão das relações e do trabalho dos alunos e da turma como um todo. A maioria das ações

realizadas dedicadas à gestão da turma têm a intenção, como se pode perceber nas reflexões de Célia, de criar melhores condições para a aprendizagem matemática dos alunos. No entanto, Célia aparentou ter uma maior predisposição para se referir às ações que incidem diretamente sobre a promoção das aprendizagens e menos às relacionadas com a gestão (tempo, ritmo, organização, sequência, funcionamento, recursos), apesar de existirem apontamentos deste domínio no plano da aula. Esta constatação parece ir ao encontro da ideia de que os professores tendem a considerar estes aspectos de modo implícito e não explícito, apesar do impacto significativo que podem ter nas aprendizagens dos alunos (Anghileri, 2006).

Outro aspeto interessante a destacar é a diversidade de papéis que a professora e os alunos assumem nesta aula. A prática de um ensino exploratório da Matemática não implica necessariamente que os alunos estão no comando da aula a cada momento. É muito claro que Célia assume uma atitude de condução da aula mais centrada em si mesma na fase final de sistematização das aprendizagens dos alunos, enquanto que nas fases em que os alunos trabalham autonomamente e discutem a tarefa, tenta ser, ainda que de formas diferentes, o mais discreta possível. O papel do professor e dos alunos na sala de aula é certamente um aspeto marcante da experiência matemática dos alunos (NCTM, 2000; Ponte, 2005).

A elaboração deste quadro evidenciou-nos a dimensão relacional que está muito presente nas práticas de ensino exploratório. Na realidade, esta caracterização das práticas de Célia deve ser vista no contexto das suas relações com os alunos: a esmagadora maioria das ações da professora surge como resposta à sua interpretação do que são as necessidades da turma ou de alguns alunos particulares tendo em vista os propósitos matemáticos para a aula. Ela interpreta ouvindo e observando os alunos, e decide a sua ação seguinte em função da apreciação do que ouve e observa, ancorada no que foi a sua preparação da aula (Franke, Kazemi, & Battey, 2007; Stein *et al*., 2008).

O quadro da prática de Célia também reforça a idéia da complexidade do desenvolvimento das práticas de ensino exploratório da Matemática (Franke, Kazemi, & Battey, 2007). Durante a aula, a professora precisou de prestar atenção a vários aspectos e em simultâneo, e precisou de tomar decisões que afetaram as oportunidades de aprendizagem matemática dos alunos.

É nossa expectativa de que uma análise transversal de casos de diferentes professores nos permita a elaboração um quadro geral que constitua uma referência real e detalhada da prática de ensino exploratório dos professores de Matemática, e que este possa servir como um recurso para o desenvolvimento do professor que pretende experimentar e consolidar este tipo de ensino a fim de proporcionar aos seus alunos oportunidades de aprendizagem da Matemática mais significativas.

Referências

Anghileri, J. (2006). Scaffolding practices that enhance mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9,* 33–52.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática, 115*, 11-17.

Franke, K. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Mathematics teaching and classroom practice. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 225-356). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lampert, M. (2004). Response to teaching practice/Teacher learning practice group. In J. Spillane, P. Cobb, & A. Sfard (Org.), *Investigating the practice of school improvement: Theory, methodology and relevance.* Bellagio, Italy.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2012). Recursos didáticos numa aula de ensino exploratório: Da prática à representação de uma prática. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática – Práticas de ensino da Matemática*, 2012.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Cavarro, A. P., Moreira, D., Martinho, H., Menezes, L., & Ferreira, R. (2012). Projeto P3M – Práticas profissionais dos professores de Matemática. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática – Práticas de ensino da Matemática*, 2012.

Sowder, J. T. (2007). The Mathematical Education and Development of Teachers. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 157-223). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Helping teachers learn to better incorporate student thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313-340.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3,* 268–275.

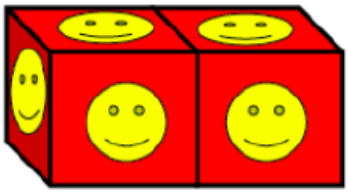
Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27,* 458-477.

Anexo 1*

Tarefas "Cubos com autocolantes"

A Joana está a construir um jogo com cubos e autocolantes. Ela une os cubos por uma das faces e forma filas de cubos. Depois cola um autocolante em cada uma das faces.

A imagem mostra a construção que a Joana fez com 2 cubos. Nessa construção ela usou 10 autocolantes.



1. Descobre quantos autocolantes a Joana usa numa construção com:

   1.1. Três cubos.

   1.2. Quatro cubos.

   1.3. Dez cubos.

   1.4. Cinquenta e dois cubos.

2. Consegues descobrir qual é a regra que permite saber quantos autocolantes a Joana usa numa construção com um qualquer número de cubos? Explica como pensaste.

* Tarefa adaptada de Moss, J., Beaty, R., McNab, S. L., & Eisenband, J. (2005). *The potential of geometric sequences to foster young students' ability to generalize in Mathematics.* http://www.brookings.edu/gs/brown/algebraicreasoning.htm

PERSPETIVAS TEÓRICAS NO ESTUDO DAS PRÁTICAS PROFISSIONAIS DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA[1]

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

Neusa Branco
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Santarém e
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
neusacvbranco@gmail.com

Marisa Quaresma
Escola Básica José Saramago, Poceirão, Palmela e
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
mq@campus.ul.pt

Isabel Velez
Agrupamento de Escolas Dr. Azevedo Neves, Damaia, Amadora e
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
velez@ie.ul.pt

Joana Mata-Pereira
Escola Básica 2,3 Francisco Arruda, Lisboa e
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
joanamatapereira@gmail.com

Resumo: Este texto discute a noção de prática tendo em vista analisar o trabalho do professor na sala de aula. Começa por analisar duas abordagens, a cognitiva e a sociocultural e, de seguida, procura delimitar o conceito de prática profissional do professor de Matemática, com especial atenção para as práticas letivas. Percorrendo diversos estudos internacionais, alguns dos quais particularmente marcantes, identifica dois elementos-chave destas práticas – as tarefas e a comunicação na sala de aula. Finalmente, o texto apresenta elementos de um modelo para o estudo das práticas profissionais dos professores de Matemática, que combina as duas abordagens indicadas.

Palavras-chave: Práticas profissionais, Ensino da Matemática, Tarefas, Comunicação, Currículo.

Introdução

Existe uma vastíssima literatura sobre práticas profissionais dos professores. Num artigo que analisa os estudos sobre conhecimentos e práticas profissionais realizados no âmbito do PME, ao longo de 30 anos, Ponte e Chapman (2006) analisam estudos realizados numa variedade de

[1] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (contrato PTDC/CPE-CED/0989311/2008). O trabalho, embora da responsabilidade dos autores, é devedor das múltiplas discussões sobre o tema realizadas no seio do projeto.

perspetivas: psicologia cognitiva, interação na sala de aula, estudos socioculturais, estudos biográficos e colaborativos, e estudos baseados nas orientações curriculares. No entanto, o conceito de "prática profissional" continua a ser algo escorregadio, sendo com frequência identificado com as ações do professor ou então com a sua perspetiva curricular geral. Deste modo, este texto pretende dar um contributo para a conceptualização do conceito de prática profissional dos professores de Matemática, organizando-se em três partes: (i) uma discussão sobre o conceito de prática e, em particular, de prática profissional; (ii) uma análise de literatura de educação matemática em que o conceito de prática profissional desempenha um papel relevante; e (iii) a apresentação de um modelo para o estudo das práticas profissionais dos professores de Matemática, informado pelos pontos anteriores.

O conceito de prática profissional

Começamos por discutir e delimitar o conceito de prática, distinguindo duas grandes abordagens – sociocultural e cognitiva. De seguida, consideramos as práticas profissionais dos professores de Matemática e fazemos diversas distinções, nomeadamente no que se refere às suas dimensões e níveis de abrangência.

Abordagens sociocultural e cognitiva

O conceito de "prática" é muito usado na literatura de educação matemática, mas raramente é definido ou caracterizado de forma aprofundada. Uma notável exceção é a conferência de Saxe (1999) no PME que define práticas como sendo "atividades recorrentes e socialmente organizadas que permeiam a vida diária". Desta definição há a retirar vários elementos importantes. Assim, práticas são, antes de mais, atividades, o que remete para a teoria da atividade. Além disso, têm um carácter recorrente, isto é, realizam-se com frequência e não apenas esporadicamente. São socialmente organizadas, ou seja, não são compreensíveis apenas pela consideração de um ator individual, mas requerem a consideração do grupo social relevante. E, finalmente, são reconhecíveis na vida de todos os dias.

Esta caracterização de práticas decorre de uma *abordagem sociocultural* e remete para uma caraterização de "atividades". Even e Schwartz (2002, p. 2-341) dizem que "atividades são cadeias de ações relacionadas pelo mesmo objeto e pelo mesmo motivo". O objeto da atividade é a realização de uma certa tarefa e o motivo é o conjunto de razões que leva um dado indivíduo a realizar essa tarefa. Temos então três elementos principais nas atividades: (i) as ações, que são os componentes básicos das atividades, sendo apenas compreensíveis no quadro dessa atividade e devendo ser distinguidas das operações através das quais se concretizam; (ii) os motivos que levam à realização da atividade; e (iii) o objeto ou tarefa, que dirige e dá unidade a toda a atividade. A caracterização feita por Ponte e Chapman (2006) vai numa direção semelhante, embora enfatizando um pouco mais os significados dos atores. Para estes autores, as práticas dos professores podem ser vistas como as atividades que regularmente conduzem, tendo em atenção o contexto de trabalho e os seus significados e intenções.

Um aspeto que é importante sublinhar, e que decorre desta abordagem sociocultural, é a ideia que as práticas profissionais do professor são coconstruídas com outros intervenientes – colegas, alunos, diretores, formadores e outros atores sociais. Em particular, as práticas letivas na sala de aula são o resultado de uma construção conjunta de professor e alunos. Ambos são fundamentais nessa construção, embora com papéis diferenciados e assimétricos. Neste texto centramos a nossa atenção no professor, mas sem perder de vista este caráter coconstruído das práticas.

As práticas profissionais podem também ser abordadas numa *perspetiva cognitiva*. Por exemplo, Leinhardt (1988) efetua diversos estudos sobre o trabalho do professor na sala de aula recorrendo a conceitos como "guião curricular", "rotina" e "agenda". Numa perspetiva teórica semelhante, Schoenfeld (2000) propõe um modelo para o estudo do processo de ensino do professor, em que o centro da atenção está nas decisões e ações que este assume na sua prática e que o autor procura explicar, tendo por base o conhecimento, as crenças e os objetivos do docente. Este modelo apoia-se na literatura de diversas áreas, incluindo os campos da tutoria de sistemas inteligentes, da inteligência artificial e dos estudos sobre "fatores humanos". Atende também aos estudos sobre o conhecimento profissional do professor, incluindo os trabalhos de Leinhardt e também os estudos sobre o conhecimento e crenças do professor, em especial os apoiados na noção de "conhecimento pedagógico do conteúdo" de Shulman (1986).

Para Schoenfeld (2000), o seu modelo não é avaliativo, isto é, não privilegia nenhum tipo de ensino em relação a qualquer outro. Além disso, considera que pode ser usado em diversas escalas *(different levels of grain size)*, desde a planificação anual e mensal até à aula, segmento de aula e micro episódio de interação professor-aluno. O modelo procura ter em atenção o modo como o professor toma decisões, atendendo às prioridades que estabelece e aos planos de ação que formula, e atende também ao modo como estes planos são depois concretizados ou não em sequências de ação. A ilustrar as suas ideias, apresenta o que se podem considerar duas práticas profissionais, a exposição e a conversa simples *(minilectures* e *simple talk)*.

Even e Schwartz (2002) argumentam que as abordagens sociocultural e cognitiva são incompatíveis. Para ilustrar a sua tese, apresentam uma análise de uma aula, que designam de "análise cognitiva", e que se enquadra nesta perspetiva. Esta análise tem por base a caracterização das formas de resposta (ou seja, um certo tipo de ações) que um professor dá durante a realização de uma determinada tarefa: (i) acompanhamento, (ii) elaboração, (iii) oposição, (iv) confusão, e (v) ausência de resposta. No fundo, caracteriza o discurso do professor, sendo comparável a tipologias sobre o questionamento, como a que distingue diversos tipos de perguntas a que o professor pode recorrer durante a aula (nomeadamente, perguntas de teste, focalização e inquirição). Note-se que, recolhendo elementos relativos às formas de resposta de um professor durante a aula, fazendo médias e calculando outras estatísticas, é possível obter um quadro global da aula a partir deste tipo de abordagem.

Aspetos das práticas letivas dos professores de Matemática

As práticas profissionais dos professores decorrem do exercício das suas funções. Ponte e Serrazina (2004) classificam-nas em três grandes domínios: práticas letivas, práticas profissionais na instituição e práticas de formação. Por sua vez, estes autores distinguem cinco aspetos principais nas práticas letivas: (i) tarefas propostas aos alunos, (ii) materiais usados, (iii) comunicação na sala de aula, (iv) gestão curricular, e (v) avaliação. Neste documento ocupamo-nos apenas das práticas letivas, dando atenção sobretudo às tarefas e à comunicação.

Convém assinalar desde já a importância da delimitação dos níveis de abrangência das práticas. Assim, por vezes, fala-se das práticas a um nível de grande generalidade. Isso acontece, por exemplo, quando fazemos distinção entre dois grupos de práticas de ensino da Matemática, como os ensinos tradicional e inovador (*reformed teaching*) (Boaler, 2003) ou os ensinos direto e exploratório (Ponte, 2005). Neste caso, uma aula ou até uma sequência de aulas corresponde a uma e uma só prática.

Outras vezes consideram-se como práticas certos tipos de atuação na sala de aula que ocorrem em momentos muito específicos, como depois de uma resposta incorreta de um aluno, pedir a outro aluno para dar outra resposta. É o que acontece, frequentemente, quando

se identificam as práticas com as ações, seja no quadro de uma abordagem cognitivista ou sociocultural. Neste caso, numa aula de 90 minutos existem necessariamente muitas práticas, uma vez que o professor está constantemente em ação, tornando-se necessário atender a segmentos mais delimitados de trabalho.

Outras vezes, ainda, fala-se de práticas de um nível intermédio, correspondendo a segmentos significativos da aula (eventualmente, toda a aula). Por exemplo, uma aula em que o professor faz "chamadas", solicitando a um aluno, à vez, para vir ao quadro e resolver perante toda a turma um ou mais exercícios sobre os assuntos já lecionados. Outro exemplo são os momentos de resolução individual de exercícios, pelos alunos no seu lugar, depois do professor ter dado uma explicação e resolvido um ou outro exemplo. No quadro de um outro estilo de ensino, identificamos momentos em que os alunos trabalham em grupo ou a pares na resolução de tarefas de complexidade significativa ou momentos de discussão coletiva em que os alunos apresentam os resultados do trabalho que anteriormente realizaram (por exemplo, Ponte, Quaresma & Branco, 2012, em publicação).

No nosso entender, todos os níveis merecem a atenção da investigação. As práticas entendidas a um nível mais geral são importantes para se aferir das condições de aplicação e dos resultados de certas orientações curriculares. As práticas de nível intermédio são de grande importância para concretizar as orientações curriculares, indicando modos específicos de trabalho na sala de aula. E finalmente, as práticas entendidas como ações específicas são também importantes, uma vez que são elas que permitem concretizar (ou não) o que é assumido nos dois níveis anteriores.

A noção de prática profissional em estudos sobre o ensino da Matemática

Neste ponto, analisamos alguns estudos, uns mais recentes outros mais antigos, que ilustram uma variedade de abordagens ao estudo das práticas profissionais no ensino da Matemática, e que têm o seu foco nas tarefas e na organização da aula, na comunicação, ou em aspetos transversais do trabalho do professor.

Num artigo em que analisa os resultados de diversos estudos de caso sobre o ensino da Matemática na escola primária (*elementary and middle school*), Fey (1981) indica que se observava uma ênfase generalizada num currículo de *basic skills*. Assinala que o estilo de ensino mais comum encontrado nas escolas assume um primeiro momento de explicação e questionamento do professor, seguido por trabalho individual do aluno (*student seatwork*) em tarefas (*assignments*) de papel e lápis. Embora sem falar em práticas profissionais, podemos dizer que estão aqui em causa práticas profissionais de nível intermédio. É curioso assinalar que os professores demonstram pouco entusiasmo pela abordagem exploratória (*inquiry*), incentivada durante o período anterior, marcado pela Matemática moderna. Analisando os resultados de diversos estudos de caso sobre o ensino da Matemática na escola secundária, no que respeita a estilos de ensino, o autor refere um quadro em tudo semelhante. Questionados sobre as grandes ideias em Matemática, a maior parte dos professores primários respondia "que a Matemática é uma coleção de regras e procedimentos para serem aprendidos ao nível da proficiência quase mecânica. Os professores do ensino secundário também pareciam subscrever este sentimento de ênfase na performance algorítmica" (p. 31).

Na sua conferência no PME, Boaler (2003) toma como ponto de partida as práticas de sala de aula para argumentar que os educadores matemáticos devem dar mais atenção às práticas de ensino dos professores. Esta autora considera diversos níveis de práticas, referindo as duas grandes famílias, atrás mencionadas: práticas tradicionais e práticas inovadoras (*reform teaching*) e afirmando, a certa altura, que "ensinar é uma prática que ocorre na intersecção de

centenas de variáveis que interferem constantemente" (p. 1-12). Simultaneamente, faz uma análise mais específica das práticas e concluiu que as principais atividades em que professores e alunos se envolvem são a discussão coletiva, o discurso do professor e a forma como este questiona os alunos, o trabalho individual do aluno, os alunos distraídos, apresentação de trabalhos pelos alunos, e realização de provas. Podemos dizer que neste ponto a autora faz uma análise de práticas ao nível intermédio, referindo-se a aspetos que agrupa nos grandes chapéus de "aulas tradicionais" e "aulas inovadoras" (Quadro 1).

É de notar que a percentagem temporal de questionamento coletivo dos alunos é superior em aulas inovadoras (32% do tempo) do que em aulas tradicionais (15%). É também interessante verificar que existem aspetos comuns aos dois tipos de ensino (os professores a falar para os alunos ou a questioná-los coletivamente). Desta forma, surge a questão se devemos referir que existem práticas comuns aos dois tipos de ensino ou, se pelo contrário, estando enquadradas em abordagens diferentes, deverão ser encaradas como práticas de nível intermédio essencialmente distintas. Ou seja, valorizamos os aspetos mais salientes das práticas, ou fazemos uma análise mais aprofundada, procurando ver o que, nesse plano, caracteriza as práticas?

Quadro 1. Atividades frequentes em aulas de Matemática (adaptado de Boaler, 2003).

	Aulas Tradicionais	Aulas Inovadoras
- Os professores falam para os alunos	21% do tempo	16% do tempo
- Os professores questionam, coletivamente, os alunos	15% do tempo	32% do tempo
- Os alunos trabalham individualmente em problemas (exercícios) de resolução relativamente rápida (2,5 minutos em média)	48% do tempo	–
- Os alunos trabalham em grupo, resolvendo problemas de resolução demorada (6,8 minutos em média)	–	32% do tempo

Boaler apresenta como exemplos de práticas mais específicas em salas de aula tradicionais inglesas a "prática repetitiva" e "seguir exemplos" (*procedure repetition and cue based methods)* (2003, p. 1-7). No que se refere a aulas inovadoras, fala em práticas matemáticas ("processos" ou "estratégias"), que incluem ações tais como explorar, orientar, representar, generalizar e justificar (p. 1-8). Por outro lado, afirma que as aulas inovadoras envolvem maior variedade de práticas que as aulas tradicionais, considerando que o grande fator que marca a diferença é o professor. Nota, por exemplo, que alguns professores, seguindo o mesmo tipo de currículo e organizando o tempo de modo semelhante, mantêm ambientes de sala de aula consideravelmente diferentes. Nestas aulas situa três modelos diferenciados: (i) demasiada estrutura e orientação para os alunos, inibindo o raciocínio; (ii) muita liberdade para os alunos, com o objetivo de construírem o conhecimento por si mesmos, geradora de alguma dispersão, e (iii) um nível intermédio de estrutura e liberdade que designa como abordagem "conceptual".

Um outro trabalho onde também sobressai a noção de tarefa foi realizado por Potari e Georgiadou–Kabouridis (2009). As autoras situam as práticas em duas grandes abordagens de ensino, o exploratório e o instrutivo. Parecem influenciadas pela teoria da atividade, falando

em "ações" e "motivos". No entanto, o seu discurso sobre a prática acaba por dar pouco espaço à atividade e estar muito associado às ações e até aos comportamentos do professor (*behaviour*). Como elementos estruturantes das práticas salientam as tarefas, falando em diferentes tipos de exercícios (*practice exercices, structured exercices)* e em tarefas que levem os alunos a "investigar ideias matemáticas" (p. 18). Também referem aspetos da comunicação na sala de aula, por exemplo, quando dizem que a professora colocava "questões de natureza mais aberta e encorajava as crianças a agir e a explicar as suas ações" (p. 18).

Diversos trabalhos trazem para o primeiro plano aspetos ligados à comunicação que tem lugar na sala de aula. É o caso de Newton (2009), que procura compreender as alterações nas motivações de futuros professores do 1.º e 2.º ciclos para trabalhar com frações, antes e depois de frequentarem uma disciplina na universidade, e analisar como as práticas de ensino dos professores da disciplina podem estar relacionadas com as alterações detetadas nas suas motivações. Embora sem usar explicitamente o termo "práticas", a autora considera que, globalmente, as práticas dos três professores da universidade (que identifica como A, B e C) são semelhantes, verificando-se diferenças em dois aspetos: (i) discurso/atividade do aluno (que inclui fazer conjeturas, justificar respostas, ou sugerir estratégias alternativas na resolução de problemas); e (ii) direção do professor (que inclui não só a atividade do professor, mas também a do aluno, e a organização da aula). Situando-se a um nível macro, considera que o professor C se inclina para um estilo de ensino mais tradicional e diretivo (*teacher directed*), com uma maior tendência para modelar ou expor para toda a turma. Os professores A e B parecem seguir práticas de ensino mais inovadoras (*reform oriented practices*). No entanto, enquanto o professor A encoraja os alunos a usar estratégias, raciocínio, e autoreflexão, o professor B tende a promover o discurso a um nível cognitivo elevado e é muito positivo (*welcoming and afirming*) relativamente aos pensamentos e ações dos alunos. A autora conclui que os professores que têm as práticas de ensino mais inovadoras são os que mais contribuem para reduzir o nível de ansiedade dos futuros professores.

Diversos trabalhos focam a sua atenção sobre os momentos de discussão coletiva que ocorrem em muitas salas de aula. É o caso de Stein, Engle, Smith e Hughes (2008) que sugerem que o professor deve recorrer a cinco práticas fundamentais: antecipar, monitorizar, selecionar, sequenciar e estabelecer conexões entre as respostas dos alunos. A sua perspetiva parece situar-se ao nível das práticas micro. Um outro trabalho recente que também se centra na discussão coletiva na sequência da realização de uma tarefa em pequenos grupos foi recentemente apresentado no PME por Ruthven, Hofmann e Mercer (2011). Os autores definem uma abordagem dialógica como aquela que assume "de modo sério diferentes pontos de vista (…), encorajando os alunos a falar de modo exploratório, o que apoia o desenvolvimento da compreensão" (p. 4-81). Assumem que a sequência triádica do discurso convencional de ensino não é necessariamente incompatível com a fala dialógica. Assim, consideram que "promover o discurso interativo, multívoco e dialógico depende de se usar a estrutura triádica de formas particulares, tais como mudando da avaliação autoritária no [passo 3] para a promoção de mais reflexão e argumentação" (p. 4-82). Finalmente, vale a pena considerar trabalhos em que não se descrevem propriamente práticas, mas se analisam importantes características ou propriedades das práticas. É o caso de uma comunicação no PME por McDonough e Clarke (2003) cujo objetivo era compreender as práticas de professores altamente eficientes (*effective teachers*), desde o ensino pré-escolar até ao 2.º ano de escolaridade, sendo realizados seis estudos de caso. Nesta investigação, usa-se um procedimento indutivo – em vez de se definirem os diversos tipos de práticas a partir de um quadro conceptual prévio, define-se um conjunto de professores reconhecidos como competentes e estudam-se as suas práticas. Os pontos encontrados são agrupados em 10 conjuntos. Os três primeiros dizem respeito às tarefas e às representações (*mathematical focus*, *features of tasks*, *materials, tools and representations*). Os três seguintes dizem respeito ao trabalho na aula, com destaque para a comunicação que tem seis itens

(*adaptions/connections/links*, *organisational style(s), teaching approaches, learning community and classroom interaction*). Um ponto respeita à avaliação e os outros três pontos são aspetos transversais, afetivos ou reflexivos (*expectations, reflection*, *personal attributes of the teacher*). Neste estudo, mais do que "práticas profissionais", consideram-se "propriedades" das práticas, que podem aparecer com maior ou menor expressão no trabalho da sala de aula.

Finalmente, devemos referir ainda a revisão alargada de literatura sobre o ensino e as práticas de sala de aula realizada por Franke, Kazemi e Battey (2007). Os autores conceptualizam a prática de ensino tendo por base as ideias de Lampert que refere que não se trata da coleção de ações realizadas pelo professor individual mas da evolução das relações. E citam esta autora quando diz que a ação é o comportamento com significado e a prática é a ação informada por um contexto organizacional particular. Para estes autores, os aspetos fundamentais da prática de ensino são (i) a criação de um discurso matemático na sala de aula; (ii) o desenvolvimento de normas na sala de aula que apoiam oportunidades para a aprendizagem matemática, e (iii) a construção de relações interpessoais que promovam a aprendizagem da Matemática.

Contributos para um modelo

Elementos estruturantes das práticas

Todos os artigos referidos abordam de diferentes ângulos as práticas profissionais do professor de Matemática na sala de aula, mas em todos eles evidenciam-se dois aspetos: as tarefas propostas e o tipo de comunicação que se desenvolve. Comecemos pelas tarefas. A importância decisiva das tarefas para a aprendizagem dos alunos é uma ideia central da educação matemática atual (NCTM, 2007; Stein, Remillard & Smith, 2007). Sabemos que faz toda a diferença propor aos alunos exercícios de aplicação de conhecimentos, problemas que requerem um esforço deliberado de compreensão e a formulação de uma estratégia de resolução, tarefas exploratórias e de investigação que requerem interpretação e formulação de questões, ou projetos de longa duração que envolvem a elaboração de um plano, recolha de dados, sua análise e interpretação.

As tarefas podem distinguir-se em muitos aspetos, incluindo o contexto (que pode ser matemático/não matemático e familiar/não familiar), o modo de apresentação (oral, escrito, com e sem recurso a materiais) e o tempo previsível para a sua realização. Ponte (2005) propõe duas dimensões fundamentais para a análise das tarefas, a estrutura (aberta/fechada) e o grau de complexidade, e argumenta que os diferentes tipos de tarefa que daí resultam (exercício, problema, exploração, investigação) têm um papel próprio a desempenhar no processo de ensino-aprendizagem. Considera que a insistência num tipo de tarefa, o exercício, e a insuficiente atenção ao trabalho exploratório, contribuem de forma significativa para as dificuldades de aprendizagem dos alunos.

Stein, Remillard e Smith (2007), pelo seu lado, categorizam as tarefas em dois grandes grupos: com elevado e reduzido nível cognitivo. Chamam a atenção que, por vezes, uma tarefa é proposta a um nível cognitivo elevado mas, depois, com o decorrer do trabalho, muitas vezes devido a uma sugestão ou esclarecimento do professor, o nível cognitivo desce fortemente, mudando completamente a natureza da tarefa e comprometendo os seus possíveis benefícios em termos de aprendizagem. Também McDonough e Clarke (2003), a partir de um estudo com professores reconhecidos pelos resultados dos seus alunos, propõem uma caracterização das práticas profissionais, em que as tarefas (incluindo os materiais e representações) surgem como um aspeto fundamental.

A comunicação que se desenvolve na sala de aula pode ser considerada outro elemento estruturante das práticas profissionais dos professores. Numa comunicação baseada num discurso unívoco existe uma voz que prevalece sobre todas as demais. Em contrapartida, numa comunicação dialógica participam diversos interlocutores num nível de relativa igualdade. Em muitas aulas predomina claramente o discurso unívoco. No entanto, como vimos, Ruthven, Hofmann e Mercer (2011) consideram que, em situações de ensino, é possível o discurso de tipo dialógico. A investigação educacional assinalou a existência de um tipo de discurso muito frequente nos contextos de ensino o IRA (Iniciação-Resposta-Avaliação) (Franke, Kazemi & Battey, 2007), em que o professor começa por fazer uma pergunta (Iniciação), a que se segue uma Resposta de um aluno que, por sua vez, dá origem a uma Avaliação do professor. Este tipo de discurso é frequentemente criticado por não deixar margem para a participação criativa dos alunos, mas começa a questionar-se se nele não cabem também possibilidades de fala dialógica (Ruthven, Hofmann, & Mercer, 2011).

Um dos aspetos fundamentais do discurso é o questionamento do professor. Ponte e Serrazina (2000) sublinham o papel das questões de inquirição (que admitem uma variedade de respostas legítimas), confirmação (para as quais esta sabe de antemão a resposta) e focalização (para captar a atenção de todos os alunos). Pelo seu lado, Bishop e Goffree (1986) discutem o processo de negociação de significados matemáticos e Franke, Kazemi e Battey (2007) sublinham a importância de processos como redizer *(revoicing)*, interrogar o significado e apoiar o desenvolvimento da linguagem dos alunos.

As tarefas e a comunicação constituem duas facetas fundamentais das práticas letivas do professor, mas precisam de uma perspetiva teórica que dê sentido à sua análise. Ao contrário de Even e Schwartz (2002), consideramos que não existe incompatibilidade intransponível entre as abordagens de cunho cognitivista e de cunho sociocultural. No estudo das práticas letivas do professor de Matemática segundo a perspetiva sociocultural é preciso considerar as tarefas propostas e o modo como o professor conduz a comunicação. Isto poderá ser feito procurando identificar (i) a natureza da atividade, ou seja, os motivos do professor, o modo como estes originam os objetivos que pretende alcançar e como são concretizados através de diversas ações profissionais e (ii) a estrutura da atividade, observando as ações e operações envolvidas. Olhando de um ponto de vista cognitivo, podemos dar atenção igualmente às tarefas e comunicação nos planos de ação do professor, decisões e técnicas usadas. Em qualquer dos casos é necessário ter em conta os recursos e ferramentas usadas pelo professor e os modos de trabalho dos alunos (Quadro 2).

Quadro 2. Modelo para o estudo da prática profissional do professor de Matemática na sala de aula.

<table>
<tr><td>Tarefas

- Nível cognitivo, estrutura, contexto
- Representações envolvidas
- Materiais</td><td>Natureza e estrutura da prática

Atividade ----- Ações ----- Operações
Motivos ----- Objetivos ----- Condições

Planos de ação --- Decisões --- Técnicas</td><td>Comunicação

- Unívoca/Dialógica
- Questionamento
- Negociação de significados</td></tr>
<tr><td colspan="3">Recursos e Ferramentas
Modos de trabalho dos alunos</td></tr>
</table>

Neste modelo, o estudo das práticas letivas tem por foco principal a natureza e estrutura da atividade do professor observada na sala de aula e estreitamente ligada aos seus planos de ação e decisões. O estudo destas práticas é o estudo das atividades recorrentes, realizadas com frequência, integradas na estrutura da aula, com os significados que lhes são atribuídos pelos participantes. Conhecemos bem algumas destas práticas, usadas desde há muito: "aula de revisões"; "chamadas orais", "correção de exercícios", "chamada de um aluno ao quadro", "exposição". Mais recentemente, outras práticas têm vindo a ganhar proeminência: "realização de um projeto", "trabalho em grupo", "discussão coletiva". Algumas têm contornos algo indefinidos, outras provavelmente irão surgir, sendo necessário saber que tipo de aprendizagem efetivamente promovem.

As práticas letivas, interpretadas como atividade ou como planos de ação/decisões, têm de ser interpretadas tendo em atenção dois aspetos fundamentais, o contexto e o próprio professor:

1. *Contexto,* no qual se incluem tanto o *contexto social geral* e o *contexto educativo* como o *contexto da turma*. Nos primeiros têm um lugar de destaque as orientações curriculares, tanto as oficiais como as que são assumidas na escola onde o professor trabalha, sendo preciso dar especial atenção ao modo como o professor interpreta e se relaciona com essas orientações. No contexto da turma é particularmente importante o interesse que os alunos têm pela Matemática, o modo como se envolvem no trabalho, a relação que assumem com o professor e a margem de desenvolvimento da cultura da sala de aula.
2. *Professor.* Neste ponto podem considerar-se três dimensões, *o conhecimento profissional, o saber-fazer e a capacidade reflexiva do professor*. Assim o conhecimento profissional envolve os seus diversos domínios, incluindo a Matemática, o currículo, os processos de aprendizagem, a Didática da Matemática e a sua capacidade de localizar e construir recursos para o ensino-aprendizagem. O saber-fazer do professor, traduz-se na capacidade de realizar de modo eficaz as ações e operações necessárias à concretização de cada prática. Finalmente, a capacidade reflexiva do professor é a base da sua aprendizagem e melhoria do desempenho profissional.

Conclusão

O argumento principal de Even e Schwartz (2002) para justificar a sua tese de incompatibilidade das duas abordagens é que elas se centram em níveis muito diferentes – a sociocultural na atividade e a cognitiva nas decisões e ações. Na nossa perspetiva, ambos os níveis são necessários para compreender as práticas. É preciso compreender o sentido global do que faz o professor, tendo em atenção os seus planos de ação e procurando caraterizar a sua atividade, bem como identificar o modo específico como são postos em prática, através de diversas decisões e ações apoiadas em operações e técnicas mais ou menos apropriadas.

Os estudos sobre as práticas profissionais do professor de Matemática têm proporcionado uma quantidade impressionante de informação. No entanto, nem sempre estes estudos têm atendido aos aspetos acima indicados, limitando muitas vezes o seu alcance e o seu possível impacto como conhecimento útil à sociedade e aos atores educativos. Muitos deles focam-se em práticas de nível muito geral, contrastando as grandes orientações curriculares "tradicionais" e "inovadoras". Tratam-se, no entanto, de categorias muito amplas e sujeitas a uma grande variedade de interpretações. Outros estudos situam-se sobretudo ao nível das ações e operações do professor, tornando difícil de perceber o enquadramento subjacente que lhes dá o sentido. Sem recusar a importância dos estudos de nível geral e de nível micro,

consideramos importante prosseguir o estudo de práticas profissionais de nível intermédio, procurando documentá-las, mostrando a sua exequibilidade e a sua relação com aprendizagens significativas dos alunos. O modelo aqui apresentado, mostra como é possível combinar perspetivas teóricas complementares, a cognitivista e a sociocultural, ao mesmo tempo que dá uma atenção especial a dois conceitos fundamentais da Didática da Matemática – tarefa e comunicação.

Referências

Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: Reidel.

Boaler, J. (2003). Studying and capturing the complexity of practice: The case of the 'dance of agency'. In N. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 3-16). Honolulu, Hawaii.

Even, R., & Schwartz, B. (2002). Implications of competing interpretations of practice and research and theory in mathematics education. In A. D. Cokburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 337-344). Norwich, England.

Fey, J. T. (1981). *Mathematics teaching today: Perspectives from three national surveys*. Reston, VA: NCTM.

Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. (2007). Understanding teaching and classroom practice in mathematics. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 225-256). Greenwich, CT: Information Age.

Leinhardt, G. (1988). Expertise in instructional lessons: An example from fractions. In D. Grouws, T. Cooney & D. Jones (Eds.), *Perspectives of research on effective mathematics teaching* (pp. 47-66). Reston: NCTM e LEA.

McDonough, A., & Clarke, D. (2003). Describing the practice of effective teachers of mathematics in the early years. In N. Pateman *et al*. (Eds.), *Proceedings of the 27th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 261-268). Honolulu, Hawaii.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Newton, K. J. (2009). Instructional practices related to prospective elementary school teachers' motivation for fractions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 12*, 89-109.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 461-494). Roterdham: Sense.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Branco, N. (2012). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Avances en Investigación en Educación Matemática, 1, 65-86*.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática para o 1.º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2004). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Quadrante, 13*(2), 51-74.

Potari, D., & Georgiadou–Kabouridis, B. (2009). A primary teacher's mathematics teaching: The development of beliefs and practice in different ''supportive'' contexts. *Journal of Mathematics Teacher Education, 12*, 7-25.

Ruthven, K., Hofmann, R., & Mercer, N. (2011). A dialogic approach to plenary problem synthesis. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. Vol. 4, pp. 81-88). Ankara, Turkey: PME.

Saxe, G. B. (1999). Professional development, classroom practices, and students' mathematics learning. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 121-128). Haifa, Israael.

Schoenfeld, A. (2000). Models of the teaching process. *Journal of Mathematical Behavior, 18*(3), 243-261.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*, 313-340.

Stein, M. K., Remillard, J., & Smith, M. (2007). How curriculum influences student learning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 319-369). Greenwich, CT: Information Age

PROJETO P3M - PRÁTICAS PROFISSIONAIS DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA[1]

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

Hélia Oliveira
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ul.pt

Ana Paula Canavarro
Departamento de Pedagogia e Educação, Universidade de Évora
apc@uevora.pt

Darlinda Moreira
Universidade Aberta

Helena Martinho
Instituto de Educação, Universidade do Minho
mhm@ie.uminho.pt

Luís Menezes
Escola Superior de Educação de Viseu
menezes@esev.ipv.pt

Rosa Tomás Ferreira
Faculdade de Ciências, Universidade do Porto

e ainda:

Ana Gafanhoto, Ana Isabel Silvestre, António Guerreiro, Célia Mercê, Cláudia Domingues, Cláudia Nunes, Cláudia Oliveira, Célia Mestre, Hélia Ventura, Isabel Velez, Joana Mata Pereira, Laura Bandarra, Lígia Carvalho, Maria da Graça Magalhães, Marisa Quaresma, Mónica Patrício, Nelson Mestrinho, Neusa Branco, Paula Gil, Paulo Gil, Renata Carvalho, Sandra Campelos, Sandra Quintas

Resumo: O projeto P3M tem como objetivo estudar as práticas profissionais na sala de aula de professores de Matemática. Visa também produzir recursos multimédia para formação de professores a usar na formação inicial e contínua no ensino básico e no ensino secundário. Neste poster damos a conhecer o trabalho do projeto, apresentando os seus objetivos, quadro conceptual, metodologia de trabalho e resultados preliminares, tanto no que se refere às práticas dos professores como aos materiais produzidos.

Palavras-chave: Professores de Matemática, Práticas profissionais, Formação, Tarefas, Comunicação.

[1] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

Contexto e objetivos

A aprendizagem dos alunos depende de forma crítica da ação do professor na sala de aula. As orientações curriculares atuais para a disciplina de Matemática estabelecem objetivos desafiantes para a aprendizagem dos alunos, o que, por sua vez, coloca fortes desafios às práticas profissionais dos professores. Deste modo, o presente projeto estuda as práticas profissionais dos professores de Matemática na sala de aula, dando especial atenção à natureza das tarefas que selecionam (Ponte, 2005), ao modo como conduzem a sua realização e à comunicação que favorecem, em especial nos momentos de discussão coletiva (Stein, Engle, Smith, & Hughes, 2008). Em todos estes aspetos da prática do professor procura-se ter em atenção os processos que estes utilizam na tomada de decisões (Schoenfeld, 2000) e os fatores que influenciam a sua interpretação dos documentos curriculares oficiais. Além disso, o projeto pretende desenvolver protótipos de recursos multimédia para serem usados na formação inicial e contínua de professores de Matemática dos diferentes ciclos e níveis de ensino, que serão testados nos dois tipos de formação. Esses recursos incluem descrições da prática profissional em aulas de carácter exploratório, tarefas para os professores realizarem e sugestões para os formadores de professores.

Tendo como ponto de partida o conhecimento existente sobre as práticas profissionais do professor (Ponte, Quaresma, & Branco, in press), este projeto assume que as práticas tendem para um estado de equilíbrio relativamente a fatores como tradições pedagógicas, orientações curriculares, perspetivas sobre as capacidades e interesses dos alunos, recursos disponíveis, cultura de escola e influências profissionais, académicas e sociais. Assim, um conhecimento mais aprofundado dos processos subjacentes à constituição das práticas dos professores cria oportunidades para a sua mudança, tendo em conta a necessária articulação entre os objetivos dos documentos curriculares oficiais e as especificidades dos contextos em que atuam.

Metodologia

O projeto P3M está estruturado em quatro tarefas distintas e nele participam professores que investigam a sua prática com o apoio de investigadores académicos e professores que refletem sobre a sua prática com o apoio de um professor investigador. São realizados estudos qualitativos, de cunho interpretativo bem como experiências de ensino e de formação. A recolha de dados é feita sobretudo por observação com gravação áudio e vídeo, sendo também realizadas entrevistas e análise documental.

Resultados

No âmbito da investigação realizada sobre a prática do professor em aulas de carácter exploratório, desenvolvemos um modelo de análise das práticas profissionais do professor na sala de aula, que combina uma perspetiva cognitiva e sociocultural. Este modelo, que dá especial atenção à natureza das tarefas propostas e à comunicação na sala de aula, foi aplicado em diversos estudos parcelares, evidenciando traços significativos de uma abordagem exploratória ao ensino-aprendizagem da Matemática, pautado pela forte presença (embora não exclusiva) de tarefas abertas de nível de desafio moderado e por uma comunicação dialógica onde se evidencia uma significativa presença de questões de inquirição.

No que respeita à produção de casos multimédia, começámos por desenvolver um quadro organizador das ações e intenções do professor para servir de suporte às atividades formativas e orientar a estrutura dos casos. Estes deverão apresentar uma variedade de conteúdos tendo em vista uma utilização diversificada e flexível na formação inicial e contínua de professores. O primeiro caso multimédia tem por base uma aula do 4.º ano em que a investigadora/professora realiza uma tarefa com sequências, para promover o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos e encontra-se em processo de experimentação já há algum tempo.

Referências

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Branco, N. (2012). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Avances en Investigación en Educación Matemática, 1, 65-86*.

Schoenfeld, A. (2000). Models of the teaching process. *Journal of Mathematical Behavior, 18*(3), 243-261.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*, 313-340.

ROTINAS NA MATEMÁTICA ELEMENTAR

Joana Maria Bettencourt Pacheco de Castro
Escola Superior de Educação de Lisboa /FCT-UIED -UNL
joanac@eselx.ipl.pt

Resumo: O estudo pretende refletir sobre momentos da rotina, em duas salas, vividas por crianças (4-7 anos) quando exploravam processos de regulação da sala (leitura do calendário, identificação do nº do dia, marcação de presenças), abordando situações que desenvolvem o sentido de número. A análise das situações problemáticas será feita à luz da perspetiva sócio-cultural de Vygotsky.

Palavras-chave: Matemática nos primeiros anos, sentido do número, teoria sócio- cultural de Vygotsky.

Investigadores têm mostrado que crianças até aos oito anos, conseguem utilizar os seus conhecimentos informais para resolver problemas, em contextos significativos (Baroody, 2002, Clements & Sarama, 2009). Vivemos actualmente nas aulas a implementação do Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) e das Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar (ME, 1997), que defendem uma aprendizagem activa e o desenvolvimento de: resolução de problemas, comunicação e raciocínio matemático. Considerando que muito do que se aprende é definido por propostas que são apresentadas aos alunos, é desejável monitorizar essas propostas e reflectir sobre as aprendizagens que promovem.

Neste estudo, apresentamos tarefas emergidas aquando do uso de artefatos de regulação da sala (pré escolar e de 1º ano de escolaridade): (mapas de presença, calendários) construídos pelo docente, no início do ano e explorados regularmente, em momentos de trabalho colectivo. Consideramos artefato um objeto particular com caraterísticas intrínsecas concebido de forma a executar uma tarefa particular (Vygotsky (1978) chamou-lhe ferramenta). A análise das respostas às tarefas terá como referencial teórico a perspetiva sócio-cultural de Vygotsky, na qual a construção do conhecimento e a aprendizagem são consideradas funções da interação social. A mediação, conceito central da teoria de Vygotsky estabelece uma ligação entre o processo histórico social e o processo mental individual. A mediação pode ocorrer a partir da utilização de diferentes tipos de ferramentas: as ferramentas técnicas (externamente orientadas, servem como condutores para orientar a mente para dominar a natureza) e os signos (ferramentas psicológicas e ferramentas de mediação semiótica, que são orientadas para dentro, e que actuam na actividade interna de gerir o eu). A interiorização é um processo que transforma ferramentas em ferramentas psicológicas (pode lidar com representações mentais) e modela novos significados que emergem do envolvimento do sujeito na actividade e das experiências partilhadas socialmente, Vygotsky (1978)

O indivíduo é activo no seu próprio processo de desenvolvimento e nesse percurso é importante, o modo de actuar na mediação dos elementos do grupo social. O discurso comunicativo, que traduz o pensamento em palavras, tem como função um contacto social e a comunicação. Assim os outros, "mais capazes", facilitam o desenvolvimento por "andaimes" na zona de desenvolvimento proximal (ZDP). Vygotsky considera existirem no individuo, 2 níveis de desenvolvimento, o real e o potencial e define ZDP como a distância entre "o nível real de desenvolvimento, determinado quando da resolução independente dum problema, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da apropriação da resolução desse problema mas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com pares mais capazes. Para Vygotsky, é essencial compreender a relação entre o desenvolvimento da linguagem e o

pensamento. O pensamento e a linguagem têm origens diferentes e desenvolvem-se segundo trajetórias diferentes e independentes.

O estudo apresentado pertence a outro que segue uma metodologia de investigação qualitativa de caráter interpretativo. A recolha de dados foi realizada, em duas salas (pré escolar e 1.º ano de escolaridade) dum mesmo agrupamento, onde gravações de vídeo e notas de campo foram transcritos para análise. Os dados foram recolhidos em dois anos sequenciados, parte das crianças do 1º ano foram crianças observadas no pré escolar.

O poster apresenta tarefas onde os artefatos de regulação da sala foram usados e analisa opções pedagógicas, tipos de mediação, e o processo de interiorização.

Referências

Baroody, A. (2002). Incentivar a aprendizagem matemática das crianças. in B. Spodek (Ed), *Manual de Investigação em Educação de Infância* (pp. 333-391) Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Clements, D., & Sarama, J. (2009). *Learning and Teaching Early Math:the learning trajectories.* New York, USA: Routledge.

M. E. (1997). *Orientações Curriculares para a Educação Pré-Escolar*. Lisboa: Departamento da Educação Básica, Ministério de Educação.

M. E. (2007). *Programa de Matemática para o Ensino Básico*. Lisboa: Direcção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular, Ministério de Educação.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society. The development of higher psychological processes*. Cambridge: Harvard University Press.

Desenvolver capacidades transversais

ENSINAR MATEMÁTICA DESENVOLVENDO AS CAPACIDADES DE RESOLVER PROBLEMAS, COMUNICAR E RACIONAR: CONTORNOS E DESAFIOS

Ana Maria Boavida
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Setúbal, UIDEF-IEUL
ana.boavida@ese.ips.pt

Luís Menezes
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viseu, CI&DETS
menezes@esev.ipv.pt

Introdução

A investigação realizada nos últimos anos tem mostrado que não é possível os alunos aprenderem Matemática com compreensão sem se apropriarem de um conjunto de tópicos matemáticos e, simultaneamente, desenvolverem capacidades que lhes permitam compreender e mobilizar os conhecimentos sobre esses tópicos em contextos diversificados. Esta visão sobre a aprendizagem da Matemática tem tido repercussões significativas nos currículos de Matemática de muitos países, entre os quais Portugal. Com efeito, o atual Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB), publicado em 2007, sublinha que a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática são capacidades que devem ser transversais a toda a aprendizagem da Matemática, isto é, devem ser objeto de atenção sistemática durante o ensino de qualquer tópico matemático seja qual for o ano de escolaridade considerado (ME, 2007). A importância destas capacidades transparece nas finalidades e objetivos gerais do ensino da Matemática aí enunciados e nos objetivos de aprendizagem indicados. Transparece, também, na maior visibilidade que lhes é dada relativamente a anteriores programas de Matemática. É um facto que nestes programas, especialmente nos do 2.º e 3.º ciclos, já havia referências a estas capacidades mas eram, sobretudo, limitadas à sua enunciação nos objetivos gerais. Diferentemente, o PMEB considera-as ao mesmo nível dos temas matemáticos, ou seja, são perspetivadas enquanto conteúdos de aprendizagem, explicitando-se, a exemplo do que acontece com os temas, um conjunto de tópicos e objetivos específicos que devem balizar o trabalho a desenvolver ao longo da escolaridade: "Na introdução de cada tema matemático e das capacidades transversais (…) [enunciam-se] os objetivos gerais de aprendizagem (desse tema ou capacidade), as indicações metodológicas (específicas do tema ou capacidade) e os respetivos tópicos e objetivos específicos de aprendizagem" (ME, 2007, p.1).

Trata-se, pois, de criar contextos de ensino e aprendizagem que permitam a articulação fecunda entre as referidas capacidades e a sua integração sistemática com os temas matemáticos, de modo a que os alunos progridam na sua maturidade matemática. Esta ideia da integração, a que se associa a de progressividade, reforça a transversalidade que as três capacidades mantêm entre si e com os tópicos matemáticos.

Neste documento procurar-se-á abordar questões relacionadas com o desenvolvimento das capacidades transversais articulando-as com os textos relativos ao tema apresentados nesta secção.

A resolução de problemas e o raciocínio matemático

Das capacidades transversais referidas no PMEB, a resolução de problemas é a que tem maior tradição na investigação em educação matemática tanto a nível internacional, como nacional. Em Portugal, desde o final da década de oitenta do século XX e, sobretudo, a partir da década seguinte, foi desenvolvido um amplo conjunto de estudos sobre esta problemática. Como evidencia uma meta análise da investigação portuguesa realizada por Ponte, Matos e Abrantes (1998), estes estudos centraram-se tanto em conceções e práticas dos professores sobre resolução de problemas, como na forma como os alunos aprendem a resolver problemas.

Apesar de se reconhecer, desde há muito, a importância da resolução de problemas no ensino e aprendizagem da Matemática, este reconhecimento não se tem materializado em práticas de ensino que a coloquem em primeiro plano, como bem salientam Isabel Vale e Teresa Pimentel no texto *Um novo-velho desafio: da resolução de problemas à criatividade em Matemática*. Com efeito, em muitas aulas, não apenas portuguesas, continua a predominar um ensino da Matemática baseado na metáfora da transmissão e em que ao aluno se atribui o mero papel de memorizar ideias, técnicas e procedimentos mesmo que não lhes atribua significado nem compreenda a sua razão de ser. Simultaneamente, não é invulgar a existência de perspetivas muito redutoras sobre o papel e lugar da resolução de problemas no ensino da Matemática. Com frequência, os problemas são encarados *apenas* como um meio de motivar os alunos ou de lhes permitir aplicar conhecimentos anteriormente aprendidos.

As atuais orientações curriculares sobre resolução de problemas distanciam-se desta perspetiva indo ao encontro do que alguns autores designam por ensinar Matemática com problemas (por exemplo, Lampert, 2001; Fi & Degner, 2012). Trata-se de uma abordagem de ensino que tem por pano de fundo a ideia de que a exploração e discussão de tarefas cognitivamente desafiadoras que favoreçam a construção de ideias matemáticas poderosas e incentivem o raciocínio e o pensamento reflexivo, é essencial para que os alunos aprendam Matemática com compreensão. Esta perspetiva tem fortes ressonâncias com a resolução de problemas considerada como uma capacidade transversal ao ensino e aprendizagem de qualquer tema e tópico matemático, tal como é proposto pelo PMEB.

Ensinar Matemática com problemas é reconhecidamente um empreendimento muito complexo para os professores, pois está em jogo uma multiplicidade de fatores de natureza cognitiva, afetiva e social (Lampert, 2001). É essencial compreender melhor a natureza deste empreendimento, entender como dar corpo à resolução de problemas enquanto meio para aprender tópicos matemáticos, conhecer as dificuldades com que o professor se depara, qual a sua origem e que pode ser feito para que estas dificuldades sejam ultrapassadas. Esta compreensão é fundamental para que se possam, nomeadamente delinear contextos de formação que permitam ao professor, ou ao futuro professor, lidar com toda essa complexidade.

A resolução de problemas e o seu lugar e papel no ensino da Matemática, é o cerne da comunicação de Isabel Vale e Teresa Pimentel que analisam o seu contributo para o desenvolvimento do pensamento criativo. Há alguma investigação a nível internacional sobre a criatividade em Matemática e suas relações com a aprendizagem, mas, em Portugal, é um campo em que estamos a dar os primeiros passos. Compreender de que modo é que a exploração, por futuros professores, de tarefas que incentivem a fluência, a flexibilidade e a originalidade — consideradas como componentes essenciais do pensamento criativo — e que sejam favoráveis ao entendimento de conceitos matemáticos essenciais, pode contribuir não só para iluminar o papel da criatividade na aula de Matemática, como para equacionar novas formas de fazer face ao desafio de criar condições para ensinar Matemática com problemas.

A problemática do raciocínio matemático e seu desenvolvimento, tem vindo a ser discutida desde há alguns anos, tendo-se, em Portugal, assistido à intensificação da investigação sobre esta problemática na última década. Esta situação não é de estranhar pois, para além do raciocínio sempre ter desempenhado um papel central em Matemática, cada vez mais se reconhece que ser capaz de raciocinar matematicamente é essencial para que alunos aprenderem com compreensão (NCTM, 2000). Há, no entanto, muitas questões que permanecem em aberto. De que falamos quando nos referimos ao raciocínio matemático? Como se aprende a raciocinar matematicamente? Que contextos e recursos favorecem o seu desenvolvimento? É que o termo raciocínio é amplamente usado como se houvesse um acordo universal sobre o seu significado e, na realidade, a maior parte dos matemáticos e educadores matemáticos usam-no sem o clarificarem (Yakel & Hanna, 2003). Como refere Steen (1999), não sabemos, realmente, o que é o raciocínio matemático.

Se nos situarmos num ponto de vista epistemológico, raciocinar remete para calcular, mas também para usar a razão ao julgar, compreender, examinar, avaliar, justificar e concluir. Assim, em Matemática, não raciocinamos apenas quando provamos algo. Também raciocinamos ao apresentar razões que justificam ideias ou posicionamentos, ao argumentarmos para nos convencermos, ou para convencer outros, da plausibilidade de conjeturas que enunciamos e da razoabilidade de afirmações que fazemos ou ao procurarmos explicar a coerência entre o que se aceita como válido e as suas consequências (Boavida, 2008). Esta perspetiva é consistente, por um lado, com as orientações do PMEB e, por outro, com o que referem Yakel e Hanna (2003): "o raciocínio matemático é uma atividade partilhada em que quem aprende participa enquanto interage com outros para resolver problemas matemáticos" (p. 228).

Adotar este significado de raciocínio matemático conduz à necessidade de considerar que são aspetos-chave da experiência dos alunos, a formulação e análise de conjeturas, a explicação, a justificação, a argumentação e a produção de provas, pelo que raciocinar matematicamente é indissociável da resolução de problemas e da comunicação.

Vários dos textos associados apresentados nesta secção focam questões relacionadas com estas atividades. António Domingos e Maria João Vieira, em *Pavimentações com o geometer's sketchpad*, abordam, nomeadamente a aprendizagem da demonstração por alunos do 10º ano de escolaridade tendo por recurso Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD) e tarefas que envolvem a formulação e validação de conjeturas. Os resultados deste estudo vão ao encontro do que é destacado por vários outros autores: embora os AGD possam constituir um amplificador conceptual dos conhecimentos dos alunos, o que pode facilitar a apropriação de importantes conceitos e processos matemáticos, nem sempre lhes é simples compreender a necessidade e papel da atividade de demonstrar, entender as funções da demonstração e elaborar raciocínios demonstrativos. Por vezes, quando constatam que uma conjetura se verifica em todas as construções feitas, consideram-na validada para todos os casos, confundindo, assim, experimentação com demonstração. Além disso, embora tenham facilidade em usar *software* de Geometria Dinâmica para fazerem construções, têm dificuldades em identificar o que é invariante e, por isso mesmo, não lhes é simples formular conjeturas. Simultaneamente, esta facilidade parece boicotar a necessidade de procurarem argumentos que poderiam ser úteis na elaboração de demonstrações.

A conceção de que *evidência é prova* (Chazan,1993), ou seja, que a validade de uma conjetura reside na sua mera verificação por exemplos, e, por isso, não é necessário lidar com a generalidade dos objetos referidos no seu enunciado, é comum a muitos alunos de diversos níveis de ensino, como revelam várias investigações realizadas em Portugal (por exemplo, Brocardo, 2001; Fonseca, 2000; Oliveira, 1998). A questão de como tornar inteligível para os alunos que uma generalização feita a partir da observação de regularidades em vários

exemplos não constitui uma prova matemática e de como os ajudar a produzir provas com sentido para si, continua em aberto.

Três dos textos apresentados abordam a questão do raciocínio tendo por referência uma categorização dos tipos de raciocínio associada aos objetos/temas matemáticos com que lida quem raciocina. Consideramos aqui os que incidem sobre o pensamento algébrico. Em *A integração da folha de cálculo no estudo do tópico equações do 2.º grau no 9.ºano de escolaridade*, Sandra Nobre, Nélia Amado e João Pedro da Ponte, focam o papel da folha de cálculo no desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 9.º ano. Os resultados apresentados incidem no caso de uma aluna e revelam que este desenvolvimento ocorreu. A aluna compreendeu o significado de conceitos essenciais, estabeleceu conexões entre diferentes tipos de representação de ideias matemáticas e aprofundou o seu entendimento de conceitos antes estudados, passando da compreensão instrumental à relacional.

A folha de cálculo é, igualmente, um dos recursos usados no estudo que está na base do texto de Laura Bandarra — *O pensamento algébrico e a aritmética* — que também se revelou útil para o desenvolvimento do pensamento algébrico por alunos dos 5.º e 9.º anos de escolaridade. As conclusões do estudo permitem evidenciar que em qualquer dos níveis de ensino, a folha de cálculo agilizou a realização de cálculos, possibilitando que os alunos explorassem propriedades e relações entre números, tratassem algebricamente os números e focassem a sua atenção em regularidades e relações numéricas. Os do 9.º ano de escolaridade, além de desenvolverem formas de pensamento algébrico relacionadas com a Aritmética generalizada — tal como aconteceu com os de 5º ano — também desenvolveram o pensamento funcional.

O pensamento algébrico, perspetivado como um *fio condutor curricular*, e o seu desenvolvimento por alunos do 4.º ano de escolaridade, é, ainda, o cerne do texto de Célia Mestre e Hélia Oliveira. Em particular, foca-se o modo como a professora/investigadora conduziu a discussão coletiva de uma tarefa matemática e orientou a sistematização das aprendizagens, tendo por referência os objetivos matemáticos visados. As conclusões permitem evidenciar que a integração de conteúdos e procedimentos algébricos na aula e a reconstrução coletiva de ideias matemáticas, se relaciona com a necessidade e importância de se dedicar atenção a três aspetos interdependentes. Em primeiro lugar, é essencial selecionar tarefas propícias ao desenvolvimento do pensamento algébrico: a tarefa apresentada revelou-se muito poderosa para promover, nomeadamente o pensamento funcional. Em segundo lugar, é indispensável cuidar da sua exploração na aula: foi fundamental o professor ter "*olhos e ouvidos algébricos"* e incentivar os alunos a refletirem sobre a atividade desenvolvida. Por último, é imprescindível construir e manter uma certa cultura de sala aula: na altura em que a tarefa foi apresentada, a aula tinha já os contornos de uma comunidade de investigação, assumindo os alunos uma significativa responsabilidade pela apresentação de explicações sobre os seus modos de pensar e pela compreensão das ideias dos colegas.

Como se ilustrará, em seguida, Rosário Monteiro e Leonor Santos, tal como Cláudia Domingues e Helena Marinho, abordam a questão do desenvolvimento do raciocínio matemático e sua relação com as práticas comunicativas da aula, evidenciando, em particular, o papel da discussão coletiva na construção das ideias matemáticas dos alunos.

A comunicação matemática

A partir da década de noventa do século XX, o estudo da comunicação matemática que ocorre na aula de Matemática atraiu, em Portugal, a atenção de um número crescente de autores. Estes trabalhos acompanharam o movimento internacional que mudou o foco dos estudos das

questões da linguagem para as questões da comunicação, ou seja, a linguagem em ação na sua ligação com os processos de aprendizagem da Matemática (Ellerton e Clarkson, 1996; Sierpinska, 1998).

O trabalho de Bishop e Goffree (1986), intitulado "Classroom organization and dynamics", propõe uma nova forma de conceber a comunicação na aula de Matemática, que contrasta com a visão da comunicação como transmissão de informação do professor para os alunos. Estes autores introduzem a ideia da comunicação como um processo interativo, de sucessivas aproximações visando a compreensão através da negociação de significados. A comunicação é, assim, entendida como um processo de interação social que, para se concretizar, necessita de ser "alimentada" por tarefas matemáticas ricas, enquadradas num ambiente de sala aula desafiante e no qual o professor desempenha um papel chave (Guerreiro, 2012; Menezes, 2005).

A preocupação com a figura do professor na promoção de dinâmicas comunicativas da aula de Matemática tem estado presente em diversos estudos que têm sido realizados, nesta área, em Portugal (Guerreiro, 2012; Martinho, 2007; Menezes, 1996, 2005). O questionamento do professor, pela sua natureza, é um instrumento com potencialidades para promover aulas de Matemática onde esta visão da comunicação como interação, baseada na partilha de ideias e significados matemáticos, está presente, como sustenta Menezes (1996).

Nesta secção, as práticas de questionamento, em Matemática, de professores do 1.º ciclo do ensino básico, são analisadas no texto *O que é que a Maria quer saber?*, de António Guerreiro. O autor refere que, nas aulas observadas e no decorrer do processo de ensino-aprendizagem, há uma forte centralidade do conhecimento do professor, o que na sua perspetiva, origina um significativo predomínio de questões de *confirmação* do conhecimento adquirido pelos alunos e também de questões *focalização* nas soluções antecipadas pelo professor das tarefas matemáticas. Ainda assim, o autor assinala, com o decorrer do trabalho colaborativo, o progresso das interações comunicativas entre os alunos e o professor, salientando-se um acréscimo de questões de inquirição visando o conhecimento das ideias e estratégias dos alunos.

A negociação de significados matemáticos ocorre durante toda a aula, mas tem o ponto alto nos momentos de discussão coletiva, em que os alunos partilham as suas ideias com os restantes colegas e o professor e se pronunciam sobre os raciocínios apresentados pelos seus pares. Apresentar e seguir raciocínios consubstancia um tipo de discurso, que Cobb *et al.* (1997) designam por *discurso reflexivo*, que é fundamental na intercompreensão e na aprendizagem dos temas matemáticos e no desenvolvimento das capacidades de raciocínio e de comunicação.

A discussão coletiva não ocorre espontaneamente e precisa de ser preparada e devidamente acompanhada pelo professor. Conseguir que esta discussão seja matematicamente produtiva, é uma tarefa "extremamente exigente e intrincada" em que o "papel do moderador da discussão é particularmente difícil" (Sfard, 2003, p. 375). Stein *et al*. (2008) descrevem bem as complexidades deste trabalho, propondo a metáfora da *orquestração* para descrever o papel desempenhado pelo professor neste momento da aula cognitivamente forte. Os desafios com que tem que lidar são muitos, a sua origem é fortemente variada e a sua natureza é bastante diversa (Boavida, 2005). Por exemplo, que papel/papéis deve o professor assumir? A que aspetos deve dar especial atenção? Quais são os particularmente problemáticos? Que cuidados deve ter na preparação e orquestração de uma discussão para que esta contribua para a apropriação, pelos alunos, de novo conhecimento matemático? Como promover e sustentar, o envolvimento dos alunos na apresentação e defesa de explicações e justificações que, do seu ponto de vista, validam as ideias que enunciam e, concomitantemente, assegurar o caráter matemático de tais práticas argumentativas? Como lidar com os alunos que agem

com uma certa "irresponsabilidade matemática" (Chevallard, Bosch, & Gascón, 2001), como se não fizesse parte do seu papel comprometerem-se com a coerência, avaliação ou justificação dos seus raciocínios, nem com a análise crítica e fundamentada do que ouvem dos colegas? Como controlar o andamento da discussão de modo a que haja espaço para a expressão de outras vozes além das valorizadas na turma? Como ensinar aos alunos o valor da expressão audível e da escuta atenta? Como selecionar e seriar as estratégias usadas pelos alunos na resolução de uma tarefa, de modo a que a sua discussão contribua para a aprendizagem de todos? Como equacionar a articulação entre a(s) fase(s) dedicada(s) à discussão coletiva e as outras fases da aula? Estas são questões atuais do campo das práticas profissionais de professores de Matemática algumas das quais são analisadas em alguns textos desta secção.

Sílvia Semana e Leonor Santos, em *A comunicação oral numa discussão matemática em grupo-turma: o papel da professora*, focam-se no desenvolvimento da capacidade de comunicação matemática, analisando, precisamente, o papel de uma professora de Matemática durante uma discussão coletiva, na introdução do tópico "monómios e polinómios", numa turma do 8.º ano de escolaridade. As autoras identificam nas intervenções comunicativas da professora questões relativas à dinâmica, foco, direção pedagógica e significado, sublinhando a importância e complexidade do papel que desempenha na comunicação oral numa aula, em particular na promoção de discussões matemáticas produtivas.

Cláudia Domingues e Maria Helena Martinho, no texto *Desenvolvimento do raciocínio matemático e as práticas de comunicação numa aula*, analisam o contributo da comunicação, nos momentos de discussão coletiva, para o desenvolvimento do raciocínio de alunos do 9.º ano, após trabalho autónomo, a partir da realização de uma tarefa. As autoras sublinham, em particular, a importância da discussão coletiva para o desenvolvimento de noção de prova matemática dos alunos, destacando a preponderância da capacidade de comunicação na explicitação e desenvolvimento dos raciocínios dos alunos. A ligação entre a comunicação e o raciocínio é analisada, também, por Rosário Monteiro e Leonor Santos no texto *Desenvolvimento da capacidade de argumentação matemática de alunos do 11.º ano de Matemática a e práticas avaliativas dos professores: o caso de Laura*. O estudo, realizado no ensino secundário, tem como objetivo estudar as práticas avaliativas de professores sobre a argumentação matemática dos alunos. Os resultados obtidos evidenciam que, para a professora, a argumentação é a expressão de um raciocínio possível. Na conceção das tarefas, dirigidas ao desenvolvimento da capacidade de argumentação dos alunos, a professora privilegia a justificação, considerando, do ponto de vista cognitivo, a explicação um processo menos exigente do que a justificação. No estudo, a professora evidenciou preocupação em proceder a uma avaliação com intencionalidade reguladora, recorrendo, essencialmente, ao *feedback* escrito.

O poder de uma discussão coletiva, bem conduzida pelo professor, de estratégias de resolução usadas pelos alunos, está bem patente em *Práticas de ensino com cálculo mental* da autoria de Renata Carvalho e João Pedro da Ponte. Este texto incide sobre a análise das potencialidades de uma tarefa de cálculo mental com números racionais e a sua exploração numa turma do 6.º ano de escolaridade. A partilha das estratégias usadas pelos alunos e o debate e reflexão sobre os seus erros, foram favoráveis a que contactassem com estratégias de cálculo diferentes das suas, compreendessem o porquê das suas dificuldades e, por esta via, aprofundassem a sua compreensão dos números racionais. Além disso, a discussão que ocorreu a este propósito levou a que a tarefa, considerada à partida de baixo nível cognitivo, fizesse surgir uma outra, com um nível de exigência mais elevado, em que os alunos se envolveram em processos de formulação, teste e validação de conjeturas, estabelecendo conexões com outros temas matemáticos.

A concluir

O PMEB foi generalizado em 2010. Esta generalização coloca à investigação portuguesa um conjunto vasto de desafios. Alguns foram já apresentados anteriormente. A estes vários outros se poderiam acrescentar. Como impulsionar a integração e transversalidade de capacidades transversais e temas matemáticos? Que tarefas importa explorar na aula e qual o seu papel? Como perspetivar a formação de modo a que estas capacidades sejam valorizadas? Como dotar os professores de recursos que lhes permitam concretizar práticas de ensino consistentes com o que é preconizado no PMEB relativamente às três capacidades?

No seu conjunto, os textos apresentados nesta secção são um contributo para refletir sobre estes desafios. Permitem evidenciar que o desenvolvimento das três capacidades transversais referidas no PMEB requer a criação de ambientes de aprendizagem com características bem diferentes da dita "aula tradicional de Matemática". Em particular, é essencial a criação e manutenção de uma cultura de sala de aula com certas características, o que requer a negociação de normas de ação e interação que favoreçam e não boicotem a constituição e desenvolvimento de uma *comunidade de discurso matemático* (Sherin, 2002). Uma aula com este tipo de cultura, que pode designar-se por "cultura de argumentação" (Boavida, 2005, p. 95), é uma comunidade de aprendizagem em que as respostas imprevistas não são descartadas meramente por serem inesperadas; em que se encoraja a partilha e análise de várias estratégias de resolução e suas relações; em que se incentiva a reflexão sobre a inventariação e uso criativo de ideias matemáticas que podem ser úteis para fazer face a uma dada situação; em que se fomentam e apoiam discussões focadas na avaliação crítica e fundamentada de diferentes contribuições e abordagens; e em que se favorece a liberdade de expressão de modo a que os alunos se sintam seguros para assumir riscos e partilhar ideias emergentes e titubeantes.

Constituir e manter uma cultura de argumentação é, também, um forte desafio para o professor. Como mostram vários textos desta secção, a escolha de boas tarefas é importante, mas não basta, tal como não basta fazer emergir ideias dos alunos. Há que saber o que fazer com estas ideias de modo a que a turma trabalhe coletivamente no sentido de chegar a consensos fundamentados e matematicamente relevantes sobre o significado de ideias matemáticas importantes. Além disso, as oportunidades para que os alunos desenvolvam as referidas capacidades geram-se no interior das interações da aula, podendo surgir durante a resolução de qualquer tipo de tarefa. Assim, é essencial que o professor esteja atento aos acontecimentos e os rentabilize de modo a incentivar a apresentação de explicações e justificações e a delegar nos alunos a responsabilidade de avaliarem as ideias apresentadas e de posicionarem relativamente a elas.

Globalmente, os desafios referidos relacionam-se com a forma como diversos protagonistas educativos, em especial o professor e os alunos, lidam com a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática. Importa conhecer e discutir o que está a ser feito, nomeadamente em Portugal, nos diversos níveis de ensino e, simultaneamente, delinear caminhos que permitam fazer-lhes face e avançar na compreensão dos seus principais contornos. Afinal, o que está em causa é o desenvolvimento da *proficiência matemática*, uma expressão escolhida por Kilpatrik, Swafford e Findell (2001) para designar o que significa, hoje, uma aprendizagem bem sucedida da Matemática.

Referências

Bishop, A. J., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: Reidel.

Boavida, A. M. (2008). Raciocinar para aprender e aprender a raciocinar. *Educação e Matemática, 100*, 1.

Boavida, A. M. (2005). *A argumentação em Matemática: Investigando o trabalho de duas professoras em contexto de colaboração*. Lisboa: APM.

Brocardo, J. (2001). *As investigações na aula de Matemática: Um projecto curricular no 8º ano*. Lisboa: APM.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justifications for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics, 24*(4), 359-387.

Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (2001). *Estudar Matemáticas: O elo perdido entre o ensino e a aprendizagem*. Porto Alegre: Artmed Editora.

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K., & Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research in Mathematics Education*, 28(3), 258-277.

Ellerton, N., & Clarkson, P. (1996). Language factors in mathematics teaching and learning. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 987-1033). Dordrecht: Kluwer.

Fi, C., & Degner, K. (2012). Teaching through problem solving. *Mathematics Teacher, 105*(6), 455-458.

Fonseca, H. (2000). *Os processos matemáticos e o discurso em actividades de investigação na sala de aula*. Lisboa: APM.

Guerreiro, A. (2011). C*omunicação no ensino-aprendizagem da Matemática: Práticas no 1.º ciclo do ensino básico* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa).

Kilpatrick, J., Swafford, J., & Findell, B. (Eds). (2001). *Adding It Up: Helping Children Learning Mathematics.* Washington: National Academy Press.

Lampert, M. (2001). *Teaching problems and the problems of teaching*. New Haven, CT: Yale University Press.

Martinho, M. H. (2007). *A comunicação na aula de Matemática: Um projecto colaborativo com três professoras do ensino básico* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa).

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME – DGIDC.

Menezes, L. (1996). C*oncepções e práticas de professores de Matemática; Contributos para o estudo da pergunta*. Lisboa: Lisboa: APM.

Menezes, L. (2005). *Investigar para ensinar Matemática: Contributos de um projecto de investigação colaborativa para o desenvolvimento profissional de professores*. Lisboa: APM.

NCTM (Ed.). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. VA: NCTM.

Oliveira, H. (1998). *Actividades de investigação na aula de Matemática: Aspectos da prática do professor*. Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Matos, J. M., & Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática: Implicações curriculares*. Lisboa: IIE.

Sfard, A. (2003). Balancing the unbalanceable: The NCTM Standards in light of theories of learning mathematics. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 353-392). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Sherin, M. (2002). A balancing act: Developing a discourse community in a mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *5*(3), 205-233.

Sierpinska, A. (1998). Three epistemologies, three views of classroom communication: Construtivism, sociocultural approaches, interactionism. In H. Steinbring, M. Bartolini Bussi, & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 30-62). Reston, VA: NCTM.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313-340.

Steen, L. (1999). Twenty questions about mathematical reasoning. In L. Stiff, & F. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (pp. 270-288). Reston, VA: NCTM.

Yackel, E., & Hanna, G. (2003). Reasoning and proof. In J. Kilpatrick, W. Martin, & D. Schifter (Eds.*), A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 227- 236). VA: NCTM.

O QUE É QUE A MARIA QUER SABER? [1]

António Guerreiro
Escola Superior de Educação e Comunicação, Universidade do Algarve
aguerrei@ualg.pt

Resumo: O presente texto reporta-se à caracterização das práticas de questionamento na sala de aula de matemática no 1.º ciclo do ensino básico. Os dados empíricos constam nos *casos* referentes a uma investigação com três professoras deste ciclo de ensino, sobre a evolução das conceções e práticas de comunicação matemática, no decorrer de um trabalho de natureza colaborativa focado na reflexão sobre as práticas comunicativas em sala de aula. Os dados revelam a existência de uma centralidade do processo de ensino-aprendizagem no conhecimento dos professores, originando um significativo predomínio das questões de confirmação do conhecimento dos alunos e de focalização destes nas soluções, idealizadas pelo professor, das tarefas matemáticas. O desenvolvimento das interações comunicativas entre os alunos e o professor originou um acréscimo de questões de inquirição pautadas por extensões das tarefas matemáticas realizadas e pela inquirição dos alunos, com vista ao conhecimento das suas ideias e estratégias matemáticas.

Palavras-chave: Comunicação matemática, questionamento, práticas de ensino.

All in all it was just a brick in the wall.
All in all it was all just bricks in the wall.
PINK FLOYD (1982)

Introdução

As características das interações entre o professor e os alunos resultam de práticas de sala de aula distintas e extremam-se entre um questionar tradicional, baseado na tentativa de testar o conhecimento e a memória dos alunos (Matos & Serrazina, 1996), tendo por referência o conhecimento do professor, e uma prática de diálogo em que os alunos desempenham um papel significativo, contribuindo com as suas opiniões e ideias nas discussões e explicando o seu próprio pensamento sobre os assuntos matemáticos (Wood, 1994). Nestas interações do professor com os alunos, a natureza das perguntas é determinante no desenvolvimento da interação social e nas características da aprendizagem matemática, originando uma dicotomia entre um ensino circunscrito ao saber do docente e uma aprendizagem resultante da partilha de conhecimentos na comunidade de sala de aula.

No ensino direto, a aprendizagem ocorre quando os alunos são capazes de responder corretamente às perguntas do professor, tendo por referência o conhecimento do docente. No ensino-aprendizagem exploratório, o questionamento por parte dos alunos e do professor gera um modo de comunicação que promove a aprendizagem, a qual se transforma num processo interativo em que o tipo de perguntas desempenha um relevante papel na caracterização das interações sociais que ocorrem na sala de aula (Guerreiro, 2011; Menezes,

[1] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia no âmbito do Projeto *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

1995; Ponte & Serrazina, 2009). O professor tem assim uma função primordial no questionamento que ocorre na sala de aula, ao contribuir para a negociação de significados matemáticos (Bishop & Goffree, 1986) por parte dos alunos e do docente.

Este texto pretende identificar a natureza das questões enunciadas pelos docentes do 1.º ciclo do ensino básico, em função da sua focalização no conhecimento dos professores ou no dos alunos, e mapear o questionamento na aula de matemática, na assunção da existência, numa mesma aula, de questões de diferentes tipos e naturezas. As práticas de sala de aula parecem revelar uma redução da aprendizagem dos alunos ao conhecimento do professor em detrimento de uma partilha de conhecimentos entre o professor e os alunos. O desenvolvimento das interações comunicativas entre os alunos e entre estes e o professor parece suavizar a omnipresença do docente na sala de aula, gerando uma maior discussão em torno das ideias e estratégias matemáticas singulares dos alunos. Os dados empíricos constam de *casos* referentes a uma investigação com três professoras do 1.º ciclo do ensino básico, sobre a evolução das conceções e práticas de comunicação matemática, no decorrer de um trabalho de natureza colaborativa focado na reflexão sobre as práticas comunicativas em sala de aula.

Questionamento na sala de aula

A centralidade do questionamento na similaridade entre o conhecimento do aluno e do professor é apontada por Mason (1998, 2000) como uma das características dos três tipos de perguntas em sala de aula: questões de *confirmação* (*testing*), de *focalização* (*focusing attention*), e de *inquirição* (*enquiry*). Para este autor, segundo a perspetiva dos alunos, todas as questões do professor têm por objetivo a confirmação de conhecimentos, resultando numa interpretação extensiva das questões de focalização e inquirição à confirmação de saberes, tornando assim o questionamento como um processo sistemático de avaliação e ajustamento do conhecimento dos alunos ao conhecimento do professor. Neste sentido, quando o professor faz uma pergunta, os alunos tentam adivinhar a resposta pretendida por este, resultando numa assunção do pensamento do docente em detrimento do pensamento próprio do aluno.

As perguntas de *confirmação* procuram certificar os conhecimentos dos alunos através de questões diretas que requerem respostas curtas e imediatas, similares às idealizadas pelo professor. Estas questões assumem o papel de certificação de conhecimentos, de articulação ou conexão entre diferentes ideias matemáticas e de regulação da atenção e comportamento dos alunos na sala de aula. As perguntas de *focalização* têm por objetivo central a atenção do aluno num aspeto específico, identificado pelo professor. Estas questões podem determinar uma mudança de evidência, ao descentrar a visão do aluno do conhecimento do professor e assumir uma dimensão metacognitiva ao realçar o conhecimento do próprio aluno (Mason, 1998, 2000).

As perguntas de *inquirição* são consideradas as *genuínas* perguntas que o docente coloca aos seus alunos quando está à procura de informação ou que os indivíduos trocam entre si em situações de busca de informação ou entendimento. Para Mason (2000), o professor é *incapaz* de inquirir genuinamente os seus alunos sobre problemas ou tarefas matemáticas com respostas conhecidas, limitando a sua inquirição ao propósito de conhecer o pensamento e as estratégias dos alunos. A ausência de questões de inquirição na sala de aula pode refletir a existência de um professor omnisciente e de alunos não questionadores, incapazes de construir o seu próprio conhecimento matemático através da análise, conjetura e justificação de relações.

Apontamentos sobre a metodologia

Os dados empíricos deste texto resultam de uma investigação sobre a comunicação no ensino-aprendizagem da matemática (Guerreiro, 2011) desenvolvida segundo uma metodologia qualitativa, adotando o paradigma interpretativo, com um *design* de estudo de caso (Stake, 1994). Integraram este estudo três professoras do 1.º ciclo do ensino básico (Alexandra, Carolina e Laura), num contexto de trabalho de natureza colaborativa, ao longo de dois anos, consubstanciado na análise das práticas de comunicação matemática em sala de aula. A recolha e análise de dados decorreu da utilização das técnicas de *observação participante* (Stake, 2000), num total de catorze aulas por docente, de *inquirição* (*idem*), através da realização de entrevistas semiestruturadas no inicio e no final do trabalho de campo, e de *colaboração* (*idem*), com a realização de catorze encontros coletivos ou individuais entre o investigador (eu próprio) e as professoras, em conjugação com a *redução de dados* (Goetz & LeCompte, 1984), espelhando a complexidade dos fenómenos e dos contextos na escrita dos *casos*. Neste texto, optei por selecionar episódios de sala de aula das três professoras envolvidas, tentando ilustrar diferentes tipos de questionamentos em sala de aula do 1.º ciclo do ensino básico, bem como caracterizar a sua utilização no processo de ensino-aprendizagem da matemática.

Confirmar para focalizar

As práticas de matemática de sala de aula dos professores, no 1.º ciclo do ensino básico, parecem evidenciar uma preocupação constante em focalizar os alunos para as estratégias e resultados matemáticos corretos e reconhecidos socialmente pela comunidade educativa. As questões de *confirmação* assumem uma função de regulação do comportamento dos alunos e do seu entendimento sobre as tarefas matemáticas propostas pelo professor e sobre os procedimentos matemáticos realizados. Este enfoque na resolução das tarefas matemáticas parece submeter todas as questões dos professores a um sentido de focalização do aluno com vista à memorização de definições e procedimentos matemáticos.

Com o intuito de regular o comportamento dos alunos, nomeadamente através da implicação destes nas tarefas de sala de aula, as professoras, com especial incidência em Alexandra, recorreram a questões de confirmação, para as quais não esperavam qualquer resposta:

> Professora: − Aqueles nove metros são o quê? São o quê, Fábio? Aqueles nove metros? Ao que é que aquilo corresponde? À distância daqui à casa de banho? À distância da baliza de futebol? O que é que é aquilo? O que são aqueles nove metros? Diz lá, Ariana?
>
> [Aula _ 4.º ano _ Alexandra]

Para além do *retorno* à sala de aula dos alunos desatentos, as professoras evocaram as questões de confirmação com o intuito de clarificar o enunciado das tarefas matemáticas, de rever os conhecimentos dos alunos com vista à sua resolução e de validar as soluções das referidas tarefas. As questões de *confirmação* surgiram na certificação da compreensão do enunciado das tarefas matemáticas pelos alunos:

> Francisco (lê): – Uma maçã pesa 100 gramas e uma laranja pesa 150 gramas. Quais são mais pesadas, oito maçãs ou seis laranjas?
>
> Professora: – O que é que nós queremos saber aí?
>
> Aluno: – Qual é mais pesada?

Professora: – O quê?

Alunos: – As laranjas ou as maçãs?

Professora: – Quantas são as laranjas?

Alunos: – Oito.

Professora: – E as maçãs?

Alunos: – Seis.

Professora: – Ah é?

Alunos: – Não, oito maçãs e seis laranjas.

Professora: – E nós já sabemos o quê?

Aluno: – Que uma maçã pesa 100 gramas e uma laranja pesa 150 gramas.

[Aula _ 2.º ano _ Laura]

Acresce à certificação da compreensão da tarefa matemática, a referência a conhecimentos anteriores com vista à resolução das referidas tarefas pelos alunos. Numa aula em que se construiu as diferentes planificações do cubo, Laura começou por explorar algumas das caraterísticas deste sólido geométrico, abordadas na aula anterior:

Professora: – Tem quantos vértices?

Alunos: – Oito.

Professora: – E viram as arestas…

Aluno: – Tem doze.

[Aula _ 3.º ano _ Laura]

Este sentido de *confirmação* dos conhecimentos dos alunos ocorre também no decorrer do seu trabalho autónomo, tendo em vista o ultrapassar de dificuldades e o encaminhar dos alunos para a resolução da tarefa matemática – Como é que se calcula a área? [Aula _ 4.º ano _ Alexandra]. As questões de confirmação ocorrem igualmente como validação das resoluções matemáticas com o propósito de síntese e certificação dos conhecimentos adquiridos:

Professora: − Afinal de contas, quanto é que gastou a Rita?

Alunos: − Quatro e meio.

Professora: − Quatro e meio. Quatro batatas e meia?

Alunos: − Quatro euros e meio.

Professora: − Ah! Quatro euros e meio a comprar franja.

Aluno: − É a mesma coisa.

Professora: − Quanto é que ela comprou de franja?

Aluno: − Seis metros.

Professora: − Seis metros. Ela para comprar seis metros de franja, que era o que precisava para a toalha, gastou quatro euros e meio.

Alunos: − Quatro euros e meio.

Professora: − Toda a gente concorda com isto?

Alunos: − Sim.

[Aula _ 4.º ano _ Alexandra]

As questões de confirmação parecem assumir assim um papel de certificação das condições para a resolução das tarefas matemáticas e dos conhecimentos adquiridos durante a sua resolução. Neste sentido, estas questões avocam uma focalização no desempenho dos alunos, reguladas pelos conhecimentos do professor e pelos conteúdos matemáticos em estudo.

Focalizar para ensinar

As questões de *focalização* antecipam as estratégias dos alunos, centrando as interações comunicativas no conhecimento do professor, e validam ou invalidam as estratégias, procedimentos e resoluções das tarefas matemáticas. Estas questões traduzem um encaminhamento dos alunos para os procedimentos matemáticos com vista à realização das tarefas matemáticas. Por vezes, existe uma conjugação entre perguntas de confirmação e focalização, com o intuito de certificar e encaminhar os alunos para os processos de resolução das tarefas matemáticas:

Professora: − Quanto é que o Vítor mede?

Aluno: − O Vítor mede cento e vinte e três ...

Professora: − Centímetros. Para chegar aos dois metros, aos duzentos centímetros, ainda falta ...

[Aula _ 4.º ano _ Carolina]

Estas intervenções das docentes surgem durante o trabalho autónomo dos alunos como modo de ultrapassar dificuldades e de os conduzir para as resoluções corretas dos problemas matemáticos, apelando por vezes ao conhecimento de conceitos matemáticos facilitadores da resolução dos problemas propostos:

Professora: − A soma de dois números é setenta e seis, o que é que isso significa? É uma parcela ou é o resultado?

(...)

Professora: − Qual é a operação inversa da soma?

[Aula _ 3.º ano _ Carolina]

Por vezes, este antecipar de estratégias dos alunos ocorre ainda durante a apresentação da própria tarefa matemática, originando um contexto em que predomina a focalização delineada pela professora em relação às estratégias de resolução dos problemas apresentadas pelos alunos:

Professora: − Vocês têm que fazer as combinações possíveis. A menina usa as duas saias ao mesmo tempo?

Alunos: − Não.

[Aula _ 1.º ano _ Alexandra]

Esta focalização assume uma forte ligação aos procedimentos matemáticos, nomeadamente aos procedimentos de cálculo. Numa tarefa em que se pedia o número total de cadeiras existentes em quatro filas de cinco cadeiras cada, Laura utiliza questões de focalização para encaminhar um grupo de alunos a usar a multiplicação (conteúdo matemático em estudo) na resolução da tarefa:

> Professora: – Como é que se chega lá sem contar isso tudo? Sem contar um, dois, três… Como é que se pode fazer?
>
> Aluno: – Podemos contar de cinco em cinco.
>
> Professora: – De cinco em cinco. Mais!
>
> Aluno: – De quatro em quatro.
>
> Aluna: – De três em três.
>
> Professora: – Isso já não é muito fácil.
>
> Outro Aluno: – Cinco vezes quatro.
>
> Professora: – Diga. Cinco vezes quatro. Está à espera do quê para fazer?
>
> [Aula _ 2.º ano _ Laura]

Para além da antecipação, as questões de focalização surgem também como forma de validar ou invalidar as estratégias de resolução dos alunos:

> Professora: − Diz lá, Inês, como é que ela pode usar a saia verde?
>
> Inês: − Se tivesse mais uma blusa.
>
> Professora: − Só se tivesse mais uma blusa. Concordam?
>
> Alunos: − Não.
>
> [Aula _ 1.º ano _ Alexandra]

Esta validação ou invalidação é extensiva aos procedimentos matemáticos efetuados pelos alunos – Porque é que reduziste as gramas a quilograma? [Aula _ 4.º ano _ Alexandra] – Seis cancelas equivalem a seis metros? [Aula _ 4.º ano _ Alexandra] – e às soluções das tarefas matemáticas:

> Professora: − Estes dois [números] que estão aqui, toda a gente encontrou? E estão bem? Acham que estão bem? Porque é que estão bem? (…) Têm duas casas decimais. Era um dos requisitos. E mais? Só por isso é que estão bem? (…) Porque não estão repetidos. E mais? (…) Porque não estão os números nas mesmas posições.
>
> [Aula _ 4.º ano _ Alexandra]

Esta focalização nas condições do enunciado do problema resultou também na invalidação das soluções apresentadas pelos alunos:

> Aluna: − Seis vírgula sessenta e seis.
>
> Professora: − Seis vírgula sessenta e seis. Lê lá a pergunta, meu amor. Lê a pergunta.
>
> Aluna: − Utilizando os algarismos 6, 4 e 3 e sem os repetir…
>
> Professora: − Ei! ei! Volta lá um bocadinho para trás. E… na primeira linha…

Aluna: – Sem os repetir…

Professora: – Sem os repetir [em uníssono com a aluna]. O que é que isso quer dizer, amor?

[Aula _ 4.º ano _ Alexandra]

As questões de confirmação e de focalização estruturam o conhecimento dos alunos através da reprodução do conhecimento do professor, conjugando a antecipação das estratégias dos alunos com a certificação da similaridade dos conhecimentos destes com os conhecimentos do professor. Neste sentido, existe uma *imposição* do professor em relação às estratégias e à regulação dos conhecimentos dos alunos, originando uma uniformidade de comportamentos e saberes em detrimento da singularidade de atitudes e conhecimentos dos alunos.

Inquirir para aprender

As questões de focalização podem assumir uma dimensão metacognitiva se o foco deixar de ser o conhecimento do professor (o que o professor esta a ver) e passar para o conhecimento do aluno (o que o aluno quer saber). Esta mudança de atenção pode ser alimentada pelos professores através de questões que focalizam a ação no aluno, nomeadamente através da resolução de problemas e atividades de investigação no 1.º ciclo do ensino básico. A partir da pavimentação do tampo de duas mesas iguais, com quadrados iguais mas diferentes entre as mesas, Laura questiona os alunos:

Professora: – O que é que vocês acham em relação a estas duas mesas?

(...)

Márcia: – Os maiores ocupam mais e os pequenos ocupam menos. Os maiores usam-se menos e os pequenos usam-se mais.

[Aula _ 2.º ano _ Laura]

As questões de focalização sobre a validação das resoluções dos alunos podem também assumir uma atitude inquiridora através da transferência da responsabilidade do questionamento para os alunos:

Professora: – Ninguém tem nada a dizer? Toda a gente lhe deu duas combinações?

Aluna: – Não.

Professora: – Então, e não têm nada a dizer? Concordam que são duas?

Alunos: – Não.

Professora: – Então, e não dizem nada? Vá, Mafalda, fala lá com eles.

[Aula _ 1.º ano _ Alexandra]

De igual modo, a justificação — Porque é que multiplicaram e depois somaram mais três e mais cinco? Qual foi a razão? Expliquem porquê. A gente só quer perceber [Aula _ 4.º ano _ Alexandra] — e validação dos processos matemáticos assume uma natureza inquiridora ao descentrar-se do professor e centrar-se nos alunos:

Professora: – Como é que se faz para calcular a medida do Luís?

Alunos: – Eu sei.

Professora: – Diz lá, Tiago Alexandre. Como é que se faz agora para calcular a medida do Luís?

Tiago: – Tira-se o armário. Vai-se aos duzentos tirar setenta.

Professora: – Sim, Francisco.

Francisco: – Vamos tirar os centímetros do armário aos centímetros do Luís e do armário juntos.

Professora: – É diferente daquilo que o Tiago disse ou é igual?

[Aula _ 2.º ano _ Laura]

Esta atitude inquiridora do professor pode resultar numa expressa vontade dos alunos em conhecer o propósito das resoluções dos outros alunos. Alexandra desafiou os seus alunos do 1.º ano de escolaridade a interagirem e a se questionarem através da inversão do foco do conteúdo matemático para o conhecimento do aluno:

Professora: − O que é que a Maria quer saber? Como é que ele fez o quê?

Maria: − A… a casa.

Professora: − A casa.

[Aula _ 1.º ano _ Alexandra]

As questões de inquirição a propósito da resolução das tarefas matemáticas surgiram associadas à exploração de generalizações e relações entre os dados obtidos. Classifico estas questões de *inquirição* por extravasarem a resolução imediata das tarefas matemáticas e decorrerem no final da exploração das resoluções das tarefas, como extensão ou síntese das atividades. As questões de inquirição tentam generalizar resultados: Como é que teriam que fazer se fossem três toalhas? [Aula _ 4.º ano _ Alexandra]. O sucessivo questionamento dos alunos resultou na descoberta da regularidade numérica existente entre o *número de toalhas* e a medida da franja necessária para debruar a toalha:

Professora: − Então, qual é a regularidade que há aqui?

Aluno: − É só de três em três.

Professora: − É só de três em três. Vai-se sempre acrescentando três. Se, por exemplo, a medida do lado do quadrado não fosse um vírgula cinco mas fosse dois metros, quanto é que se tinha de aumentar?

Aluno: − Quatro.

[Aula _ 4.º ano _ Alexandra]

A generalização desta situação ocorreu em duas dimensões: na relação entre o número de quadrados na composição do retângulo e a medida do seu perímetro e na relação entre a medida do lado do quadrado e o acréscimo da medida do perímetro. Para além da tentativa de generalização dos resultados, as professoras também inquiriram os alunos a propósito da relação existentes entre os dados obtidos. Num problema com duas lâmpadas, que piscavam, respetivamente, de três em três segundos e de cinco em cinco segundos, Alexandra, após a discussão da resolução do problema, elaborou uma nova questão: Qual é a lâmpada que vai fundir-se mais depressa? [Aula _ 4.º ano _ Alexandra]. Laura também questionou os seus alunos, numa extensão, não programada, na resolução do problema dos pesos das maçãs e

das laranjas (referido anteriormente). Os alunos parecem terem reagido ao novo tipo de questão com um «*Oh*»:

Professora: – Duas laranjas fazem quantas maçãs?

Alunos: – Oh…

Professora: – Duas laranjas fazem quantas maçãs?

Aluno: – Três.

Professora: – Diga.

Aluno: – Três.

[Aula _ 2.º ano _ Laura]

As questões de inquirição também decorrem da tentativa do professor conhecer os alunos e os seus processos de aprendizagem. Neste sentido, Laura questiona os alunos a propósito da clarificação dos procedimentos, conjugando a extração de conhecimentos dos alunos com a partilha e discussão de estratégias de resolução entre os alunos, a propósito da soma de oito números inteiros associados à dimensão das barras de um gráfico:

Professora: – Como é que fizeram para não se perderem?

Miguel: – Metemos uma cruzinha nos que já tínhamos juntado.

Teresa: – Juntámos o E com o B que deu 11, e depois fizemos uns tracinhos, um X, para saber (escreve no quadro enquanto fala).

Miguel: – Sim.

Teresa: – Fomos juntar o G, o F e o C (escreve no quadro enquanto fala).

Professora: – Porque esses têm quantos?

Teresa: – Quatro.

Professora: – Cada um.

Miguel: – E nós fizemos pelos maiores.

Teresa: – Juntámos o G com o F, fica oito, mais… (acompanha as letras com o giz) doze (escreve 12).

Professora: – Então e agora têm quantos?

Teresa: – Já temos 23. Depois fomos juntar o H com o A. São três, fica seis. Vinte e três com seis, ficam 29 (vai escrevendo os resultados parciais). Depois fizemos os tracinhos e fomos juntar mais um…

Professora: – Que era a barra que faltava.

Teresa: – E ficámos com 30.

[2008 novembro _ aula _ 3.º ano]

Esta atitude inquiridora da professora em relação as estratégias dos alunos foi extensível às dificuldades sentidas por estes na identificação de todas as planificações do cubo, assumindo o propósito de conhecer o pensamento dos alunos sobre as atividades matemáticas de sala de aula:

> Professora: – Qual foi a [identificação da planificação] que vos custou mais a fazer? Foi ao princípio ou mais para a frente?
>
> (…)
> Aluno: – Ó Professora, a gente lá mais para a frente… «deixa lá ver se esta dá», íamos pensando e a gente não conseguia chegar lá muito bem.
>
> [2008 outubro _ aula _ 3.º ano]

As questões de inquirição assumem uma centralidade nas estratégias, no conhecimento e no pensamento dos alunos, gerando significativos momentos de partilha e negociação de ideias e significados matemáticos. A promoção deste tipo de questões foi originada por uma maior interação comunicativa entre os alunos e as professoras e pela vontade expressas destas de conhecer as ideias e estratégias matemáticas individuais dos seus alunos, mesmo que confusas, incompletas ou erradas. O professor pode descentrar-se e focar a atenção dos alunos sobre si próprios com questões como «O que é que a Maria quer saber?» estimulando assim desde o pré-escolar a identidade singular de cada aluno ao invés da uniformidade de saberes e comportamentos.

Questionar para educar?

O questionamento parece pautado pela resolução correta das tarefas matemáticas propostas em sala de aula, originando uma constante focalização no conhecimento do professor. Neste sentido, as docentes elaboraram questões de confirmação sobre os pré-requisitos necessários à resolução das tarefas, complementaram com questões de focalização tendo em vista as resoluções preestabelecidas por si e retomaram às questões de confirmação na certificação dos conhecimentos adquiridos pelos alunos durante a realização das tarefas matemáticas. O processo educativo decorreu em torno de questões de confirmação e focalização, fundadas no conhecimento do professor e do conteúdo matemático escolar. As questões de inquirição surgiram em consequência do aumento das interações entre os alunos e a professora e na sequência das discussões a propósito das soluções das tarefas matemáticas e das estratégias de resolução utilizadas pelos alunos.

As questões de confirmação surgem como certificação do entendimento da tarefa matemática proposta aos alunos e dos conhecimentos matemáticos adquiridos e como regulação da atenção e comportamento dos alunos. As questões de focalização antecipam e encaminham a resolução das tarefas matemáticas e orientam a exposição descritiva dos procedimentos matemáticos utilizados na resolução das tarefas propostas. As questões de inquirição extravasam a resolução imediata das tarefas matemáticas propostas, surgindo em contextos de extensão das tarefas ou de análise do processo de resolução das tarefas matemáticas, e focalizam-se nas estratégias, conhecimentos e pensamento dos alunos.

O questionamento na sala de aula, assente em questões de confirmação e focalização, em função do conhecimento dos professores, decorre da tentativa de ensinar aos alunos os conteúdos e procedimentos matemáticos, expressos na resolução das tarefas matemáticas, originando uma constante função de focalização no conhecimento matemático preestabelecido e estruturado em manuais escolares e outros recursos educativos. Em rutura, a construção do conhecimento matemático suscita a existência de questões de inquirição que equacionem as relações e promovam o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos para além dos conhecimentos e procedimentos matemáticos escolares do professor. Neste sentido, cabe ao professor integrar nas suas aulas verdadeiras questões, em busca de real informação, sobre os conhecimentos dos alunos e os processos de aprendizagem, bem como centrar as questões de focalização no olhar dos alunos, evidenciando as suas descobertas.

Referências

Bishop, A., & Gofree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspetives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.

Goetz, J., & LeCompte, M (1984). *Ethnography and qualitative design in educational research*. Orlando*:* Academic Press, Inc.

Guerreiro, A. (2011). *Comunicação no ensino-aprendizagem da matemática: Práticas no 1.º ciclo do ensino básico.* (Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa).

Mason, J. (1998). Asking mathematical questions mathematically. *Proceedings of Actes du Colloque DIDIREM, Réussites et/ou apprentissages Nouvelles technologies; Les mathématiques en premier cycle universitaire, où en est-on?.* Université de Versailles.

Mason, J. (2000). Asking mathematical questions mathematically. *International journal of mathematical Education in Science and Technology,* 31 (1), 97-111.

Matos, J., & Serrazina, M. (1996). *Didáctica da Matemática.* Lisboa: Universidade Aberta.

Menezes, L. (1995). *Conceções e práticas de professores de matemática: Contributos para o estudo da pergunta* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2009). O Novo Programa de Matemática: Uma oportunidade de mudança. *Educação e Matemática, 105, 2-6.*

Stake, R. (1994). Case studies. In. Denzin, N. & Lincoln, Y. (Eds.) *Handbook of qualitative research* (pp. 236-247). Londres: Sage.

Stake, R. (2000). Case studies. In. Dezin, N. & Lincoln, Y. (Eds.) *Handbook of qualitative research. Second Edition.* (pp. 435-454*)*. Londres: Sage.

Wood, T. (1994). Patterns of Interaction and The Culture of Mathematics Classrooms *in* S.. Lerman (Ed.). *Cultural Perspetives on the Mathematics Classroom* (pp. 149-168). Dordrecht: KAP.

A COMUNICAÇÃO ORAL NUMA DISCUSSÃO MATEMÁTICA EM GRUPO-TURMA: O PAPEL DA PROFESSORA

Sílvia Semana
Doutoranda do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
silviasemana@yahoo.com.br

Leonor Santos
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
mlsantos@ie.ul.pt

Resumo: Neste texto estudamos o papel de uma professora de matemática durante uma discussão em grupo-turma, que teve por base uma tarefa para introdução ao estudo dos monómios e polinómios, realizada numa turma do 8.º ano de escolaridade. Partindo de uma análise interpretativa dos episódios de sala de aula, é possível identificar um padrão geral nas intervenções da professora, marcado por especificidades para as diferentes fases da discussão, no que se refere à dinâmica, ao foco, à direção pedagógica e ao significado. Os resultados reforçam a importância e a complexidade do papel da professora na comunicação oral na sala de aula e na promoção de discussões matemáticas produtivas.

Palavras-chave: Professor, comunicação oral, discussões matemáticas, grupo-turma.

Introdução

A comunicação oral é uma atividade essencial para a aprendizagem em matemática (Lampert & Cobb, 2003; NCTM, 2007). O modo como o professor questiona, ouve, responde aos alunos e promove e orquestra discussões matemáticas é determinante para caraterizar a comunicação oral que se estabelece na sala de aula e reflete, em certa medida, o papel dos alunos nessa comunicação. No entanto, este tipo de práticas tende a não ser desenvolvida de forma a promover a aprendizagem dos alunos (Black, Harrison, Lee, Marshall, & Wiliam, 2003).

Este estudo é parte de uma investigação mais ampla[1] cujo objetivo principal é compreender práticas avaliativas de professores de Matemática que visam a promoção da autorregulação dos alunos e são concebidas num contexto de trabalho colaborativo. Neste texto, debruçamo-nos sobre uma dessas práticas avaliativas, o investimento numa comunicação oral intencional, por parte de uma das professoras que integra o grupo colaborativo. Em particular, procuramos compreender o papel da professora durante uma discussão matemática em grupo-turma, caraterizando as suas intervenções no que se refere a quatro dimensões – dinâmica, foco, direção pedagógica e significado – e identificando eventuais especificidades para as diferentes fases da discussão.

Fundamentação teórica

A comunicação oral que se estabelece na sala de aula é uma dimensão essencial do processo de ensino e aprendizagem (Voigt, 1995; Wood, 1998). Em função do papel que o professor e os

[1] Investigação financiada pela FCT - Bolsa de Investigação SFRH / BD / 74620 / 2010.

alunos desempenham nessa comunicação, é possível identificar diversas formas de comunicação, desde uma comunicação unidirecional – fortemente associada à transmissão de conhecimentos e aos padrões de interação Iniciação-Resposta-Avaliação e de funil (Wood, 1998) – até uma comunicação reflexiva e instrutiva (Brendefur & Frykholm, 2000) – promotora da reflexão e da argumentação, utilizada para informar e adaptar a prática letiva e associada a um padrão de discussão (Voigt, 1995).

As discussões na sala de aula apresentam-se como excelentes oportunidades para o desenvolvimento de uma comunicação reflexiva e instrutiva e, mais geralmente, para a aprendizagem em Matemática. Nesse sentido, é importante que as discussões sejam intencionais e tenham um objetivo bem definido e aceite por todos, se centrem em conteúdos ou processos matemáticos, incluam contribuições efetivas dos alunos e decorram de forma interativa (Pirie & Schwarzenberger, 1988). Adicionalmente, diferentes formas de pensar devem ser respeitadas e valorizadas, o erro deve ser entendido como natural e a turma, reconhecida como um campo legítimo de validação e correção (Santos, 2008). Tais pressupostos, exigem do professor a adoção de práticas no sentido de orquestrar discussões produtivas (Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008). O professor é responsável por envolver os alunos nas práticas discursivas, incentivando-os a pensarem publicamente e a construírem, explicarem, justificarem e avaliarem as suas ideias e as dos colegas (Forman, 2003; Stein *et al*., 2008). O questionamento oral, em particular, é uma estratégia com potencialidades para encorajar e apoiar estes processos (Santos, 2008). Cabe, ainda, ao professor promover o estabelecimento e o respeito por normas de interação e orientar o foco das discussões, acautelando o desenvolvimento de aspetos matemáticos importantes (Chazan & Ball, 1995). As discussões devem portanto ser centradas na compreensão conceptual dos objetos matemáticos, nos processos, nos produtos, e também na autorregulação, criando condições para os alunos autoavaliarem o seu trabalho, encorajando-os a refletirem sobre ele e a agirem no sentido de o melhorarem (Hattie & Timperley, 2007).

O Programa de Matemática do Ensino Básico vai ao encontro destas ideias, ao enfatizar o papel do professor nas discussões matemáticas:

> Os momentos de discussão de processos de resolução e de resultados de problemas na turma devem ser frequentes. O professor assume um papel relevante, nomeadamente na colocação de questões que estimulem o pensamento dos alunos, na condução do discurso, centrando-o nos conhecimentos matemáticos, e na organização e regulação da participação dos alunos nos momentos de discussão. (DGIDC, 2007, p. 30)

Este tipo de práticas, em particular de questionamento, revela-se extremamente exigente para o professor, na medida em que implica mudanças no quotidiano da sala de aula e a necessidade de um conhecimento profundo, quer sobre a área científica de ensino, quer sobre o processo de aprendizagem (Moyer & Milewicz, 2002).

Metodologia

Este estudo segue uma metodologia qualitativa e interpretativa (Goetz & LeCompte, 1984), com recurso ao design de estudo de caso (Yin, 2009). Estudamos o papel de uma professora de Matemática, Joana, durante uma discussão em grupo-turma, que teve como ponto de partida uma tarefa para introdução ao estudo dos monómios e polinómios (anexo), numa turma de 8.º ano (19 alunos), ainda abrangida pelo anterior Programa de Matemática.

Joana é uma professora do 3.º ciclo do ensino básico, com 42 anos de idade, cerca de 18 anos de tempo de serviço e licenciada em Matemática – ramo educacional, que integra um grupo colaborativo, constituído no âmbito do estudo mais amplo, em maio de 2010. Nessa altura,

Joana reconhece a importância da comunicação oral para a aprendizagem dos alunos, mas assume que, quando a comunicação se desenvolve em grupo-turma, é ela que ocupa o lugar central e não "reage" muito bem às interações aluno-aluno. Revela-se muito preocupada com a gestão e a falta de tempo e admite que, por vezes, não dá aos alunos oportunidade para partilharem as suas ideias, chegando ela própria a apresentar as respostas esperadas.

A implementação da tarefa em sala de aula decorreu em maio de 2011 (um ano após o início do estudo mais amplo) e foi planeada pelo grupo colaborativo seguindo as seguintes linhas orientadoras: (i) exploração da tarefa em pequenos grupos, seguida de apresentações dos grupos e discussão em grupo-turma; (ii) o professor como orquestrador de discussões matemáticas produtivas (Stein *et al.*, 2008) e responsável pela promoção de uma comunicação oral reflexiva e instrutiva (Brendefur & Frykholm, 2000), seguindo um padrão de discussão (Voigt, 1995). A exploração da tarefa pelos grupos decorreu durante uma aula de 90 minutos e a discussão em grupo-turma aconteceu na aula imediatamente seguinte, ocupando quase a sua totalidade.

Os dados foram recolhidos principalmente através da observação participante (Lessard-Hébert, Goyette & Boutin, 2005) das duas aulas, registadas em vídeo e áudio, e de duas sessões de trabalho colaborativo (STC), registadas em áudio. Para a análise de dados, considerou-se uma grelha de análise, desenvolvida a partir de uma proposta de Santos e Pinto (2008) e aperfeiçoada através da sua aplicação a episódios de sala de aula, relativos a discussões matemáticas em grupo-turma. A última versão da grelha inclui quatro dimensões: dinâmica, foco, direção pedagógica e significado. Para cada uma dessas dimensões são consideradas várias categorias (Quadro 1).

Quadro 1 - Dimensões e categorias de análise

Dinâmica		**Foco**	**Direção Pedagógica**	**Significado**
Quem produz	**A quem se dirige**			
Professor Aluno Grupo de alunos	Professor Aluno Grupo de alunos	Tarefa (T) Processo (Pc) Produto (Pd) Concetualização (C) Autorregulação (AR) Gestão de sala de aula (GSA) Externo ao ensino e aprendizagem	Questionar (Q) Responder (R) Apresentar (A)	Repetir (Rpt) Corrigir (Cor) Validar (Val) Resolver (Rsl) Justificar/Explicar (Ju/Ex) Orientar (Or) Apreciar (Apc) Comparar (Cmp) Informar que ouviu (IO)

Algumas das categorias contêm subcategorias: (i) a categoria *Aluno* da subdimensão *A quem se dirige* contém as subcategorias *Identificado* e *Não Identificado* (I/NI), respetivamente para as intervenções dirigidas a um aluno específico identificado pela professora e as intervenções que surgem no decurso de um diálogo com um aluno, mas não limitam a participação dos restantes alunos; (ii) a categoria *Grupo de Alunos* também da subdimensão *A quem se dirige* contém as subcategorias *Turma* e *Grupo de Trabalho* (T/GT), distinguindo as intervenções dirigidas a toda a turma, daquelas dirigidas a um dos grupos de alunos constituídos para trabalhar sobre a tarefa (iii) a categoria *Questionar* contém as subcategorias *Aberta* e *Fechada* (A/F).

Neste texto, apenas analisamos as intervenções produzidas pela professora. Procuramos situar cada intervenção em apenas uma categoria ou subcategoria de cada dimensão, privilegiando o sentido dominante. No entanto, para a dimensão *Significado*, por vezes, é necessário combinar duas categorias (por exemplo, há questões da professora que, simultaneamente, solicitam uma justificação/explicação e fornecem orientações). Importa salvaguardar que, por isso, os totais apresentados nos quadros 6 a 9 não correspondem ao somatório dos valores correspondentes.

A análise incide sobre as intervenções de Joana em cada uma de três fases da discussão em grupo-turma: fase de lançamento (Lnç); fase de desenvolvimento (Dsv) e fase final (Fin), a fim de se estudarem eventuais especificidades associadas a cada uma. As três fases são sequenciais e constituem a totalidade da discussão (TDis).

Resultados

Dinâmica

O Quadro 2 revela que Joana é responsável por 39% do total de intervenções orais durante a discussão em grupo-turma, permitindo uma participação dos alunos correspondente a 61%. No entanto, estes valores, isoladamente, carecem de significado, não permitindo formular juízos sustentados relativamente ao domínio da professora sobre os alunos na discussão, em parte por não serem considerados dados relativos a outras aulas que possam ser usados como referência.

Quadro 2 - Caraterização genérica das intervenções da professora nas diferentes fases da discussão

Fases da discussão	Duração aprox. (min)	Intervenções da professora (n.º)	Intervenções da professora (%)
Lnç	5	7	78
Dsv	45	167	36
Fin	20	78	46
TDis	70	252	39

O Quadro 2 revela ainda diferenças na distribuição das intervenções da professora ao longo das várias fases da discussão. As intervenções de Joana são substancialmente mais frequentes na fase de lançamento (78%), facto associado à necessidade de dar aos alunos indicações que se prendem com a gestão da sala de aula, situação aprofundada na subsecção relativa ao foco. No desenvolvimento, a participação da professora decresce para 36% do número total de intervenções orais registadas nessa fase e, na fase final, volta a aumentar, aproximando-se de metade das intervenções registadas (46%). Este aumento parece associado, pelo menos parcialmente, ao facto de a própria aula estar a aproximar-se do final e à preocupação que Joana sente de apressar a discussão para conseguir concluí-la:

> Na parte do fim, acho que não correu muito bem (…) eu estava a ver, já só faltava meia hora para o final e eles ainda tinham que fazer as reflexões, acho que acabei por falar de mais, porque queria mesmo acabar a discussão… (STC, 26/05/11)

Relativamente ao tipo de interações estabelecidas, o Quadro 3 sugere que predominam as interações entre professora e alunos, registando-se em 76% dos casos nenhuma ou apenas uma intervenção de alunos entre duas intervenções da professora. Apesar disso, merece realce o facto de nos restantes 24% dos casos se registarem duas ou mais intervenções de alunos entre duas intervenções da professora, chegando a registar-se 15 intervenções consecutivas de alunos sem qualquer intervenção da professora.

Mais uma vez, registam-se diferenças nos valores encontrados para as várias fases da discussão. Vemos que em 0%, 30% e 14% dos casos, respetivamente para as fases de lançamento, desenvolvimento e final, registam-se duas ou mais intervenções de alunos entre duas intervenções consecutivas da professora. Estas diferenças são concordantes com as evidenciadas pelo Quadro 2, no sentido em que revelam uma discussão mais participada pelos alunos no desenvolvimento, comparativamente com as restantes duas fases.

Quadro 3 – N.º de intervenções de alunos entre duas intervenções consecutivas da professora, por fases da discussão

Fases da discussão	N.º de intervenções de alunos entre duas intervenções consecutivas da professora				
	0 - 1	2 - 5	6 - 10	Mais de 10	N.º máximo*
Lnç	100 %	0 %	0 %	0 %	1
Dsv	70 %	26 %	2 %	2 %	15
Fin	86 %	14 %	0 %	0 %	3
TDis	76 %	22 %	1 %	1 %	15

* Número máximo de intervenções de alunos entre duas intervenções consecutivas da professora

Da leitura do Quadro 4 constata-se que as intervenções da professora dirigem-se predominantemente a mais do que um aluno (61%), sendo que 31% dirigem-se à turma e 30%, a um dos grupos de trabalho. Saliente-se ainda que é nas fases de lançamento e final que as intervenções dirigidas a vários alunos têm maior expressividade comparativamente com as intervenções dirigidas a apenas um aluno (71% vs 29% no lançamento e 76% vs 24% na fase final). Essa diferença esbate-se na fase de desenvolvimento (53% vs 47%).

As intervenções dirigidas a um aluno incluem dois tipos de intervenções: as mais frequentes, que surgem no decurso de um diálogo com um aluno, mas não limitam a participação dos restantes alunos (NI, 34%); e, em muito menor número, intervenções dirigidas a um aluno específico identificado pela professora (I, 5%), como acontece no exemplo "Acham possível que aquela expressão represente, depois de eles terem explicado ali por decomposição da figura… B., o que é que achas?" (Dsv). Uma situação que exemplifica o primeiro tipo de intervenções desenrola-se a partir da resposta de uma aluna, M., que a professora pede para justificar, acabando por ser outra aluna, A., do mesmo grupo de trabalho, a dar uma explicação para a resposta apresentada pela colega:

> M: Era com onze.
>
> P: Eu não percebi. Donde vem os onze? (…)
>
> A: A figura tem que ter duas colunas pintadas, cada uma com onze, onze quadrados, e nós depois somamos onze mais onze, que deu vinte e dois. (Dsv).

Quadro 4 - A quem se dirigem as intervenções da professora

Fases da discussão	A quem se dirigem as intervenções da professora					
	Aluno			Grupo de Alunos		
	NI	I	Total	T	GT	Total
Lnç	0	29	29	14	57	71
Dsv	42	5	47	22	31	53
Fin	20	4	24	53	23	76
TDis	34	5	39	31	30	61

Todos os valores apresentados no quadro são percentagens

Foco

Os principais *focos das intervenções da professora* (Quadro 5) são o processo (37%) e o produto (23%), seguidos da gestão de sala de aula (16%) e da concetualização (11%).

Quadro 5 - Foco das intervenções da professora

Fases Discussão	T	Pc	Pd	C	AR	GSA
Lnç	0	0	0	0	0	100
Dsv	6	33	17	15	12	17
Fin	3	47	37	4	3	6
TDis	4	37	23	11	9	16

Todos os valores apresentados no quadro são percentagens

No lançamento da discussão todas as intervenções da professora focam-se na gestão da sala de aula e incluem: indicações sobre quais os grupos a apresentar o seu trabalho "Então pode ser o grupo da B. Ao quadro e muito rapidamente desenham a primeira figura (…)" (Lnç); sugestões de ordem prática para facilitar a comunicação "Oh I., se calhar fazia sentido começar a escrever daquele lado" (Lnç), "Não sei se se acender aí a luz se consegue ver melhor…" (Lnç); chamadas de atenção face à postura/atitude dos alunos em termos disciplinares "C., queres virar-te para a frente se faz favor" (Lnç). Na verdade, ao longo de toda a discussão as intervenções da professora com foco na gestão da sala de aula assumem a forma de indicações/sugestões ou chamadas de atenção semelhantes às dos exemplos apresentados em cima: "Então podem ir ao quadro se faz favor. E já agora escreviam por cima daquelas"(Dsv); "Pega num marcador de cor diferente, se calhar…" (Fin).

Nas fases de desenvolvimento e final, o foco das intervenções de Joana é diversificado, mas é possível identificar algumas tendências. Enquanto o número de intervenções com foco no processo e no produto aumentam da segunda para a terceira fases da discussão (de 33% para 47% e de 17% para 37%, respetivamente para processo e produto), o das intervenções com foco na gestão da sala de aula e na concetualização decrescem (de 17% para 6% e de 15% para 4%). O aumento registado pode ser explicado devido ao facto de, na fase final, a professora, por um lado, dirigir muitas das suas intervenções no sentido de recuperar resultados e processos apresentados previamente pelos alunos e, por outro lado, confrontar os alunos com questões/problemas, sobre os quais, eles, na sua generalidade, não haviam pensado

previamente e/ou revelam dificuldades. Uma análise mais aprofundada destes fatores é realizada na subsecção seguinte.

A diminuição do número das intervenções com foco na gestão da sala de aula acontece, aparentemente, devido ao contexto e ao formato em que ocorre a discussão na fase final: um dos grupos de trabalho está no quadro, onde permanece até ao término da discussão, e a comunicação oral é controlada pela professora, através de intervenções mais dirigidas, atenuando-se a necessidade de outro tipo de orientações mais relacionadas com aspetos da gestão da sala de aula. Já a diminuição registada no número de intervenções com foco na concetualização pode ser explicada pelo facto de as questões de linguagem e significado dos conceitos envolvidos na realização da tarefa, terem sido já respondidas no desenvolvimento da discussão, não se sentindo tanto essa necessidade na fase final.

As intervenções com foco na autorregulação são menos frequentes do que as anteriores (9%), mas na fase de desenvolvimento assumem um peso significativo (cerca de 12% do número de intervenções realizadas pela professora nessa fase, correspondendo a 20 intervenções).

Direção Pedagógica e Significado

As *intervenções da professora com foco no processo* (Quadro 6) assumem a forma de questões (70%) ou apresentações (30%), não havendo qualquer intervenção da professora como resposta a intervenções de alunos ou a suas próprias intervenções. As questões são maioritariamente para resolver (22%) ou justificar/explicar (32%), podendo incluir orientações para os alunos (4%). Já no que se refere às apresentações da professora, o seu principal significado é justificar/explicar (16%), geralmente partindo da repetição de ideias ou resultados apresentados pelos alunos (9%).

Identificam-se diferenças consideráveis entre as fases de desenvolvimento e final da discussão. Em particular, na fase de desenvolvimento, o número de questões é claramente superior ao número de apresentações da professora (80% vs 20%) e na fase final esta diferença é esbatida (54% vs 46%). Além disso, na fase de desenvolvimento registam-se apenas 5% de apresentações da professora para justificar/explicar e na fase final este valor aumenta para 32%. Estas diferenças estão associadas ao facto de Joana, na fase de desenvolvimento, procurar centrar a comunicação oral nos alunos, criando condições para que discutam entre si os processos utilizados, enquanto, na fase final, recupera, em muitas das suas apresentações, processos apresentados previamente pelos alunos (o que se traduz em 16% de repetições), aperfeiçoando ou acrescentando-lhes uma justificação/explicação adicional (32%). Segue-se um exemplo desse tipo de apresentações constituído por duas intervenções consecutivas realizadas pela professora:

> Os dois grupos que tinham chegado a esta expressão, apesar de a terem escrito com aspetos diferentes, tinham pensado em termos de contar quantas colunas existiam, que correspondia ao comprimento. (Fin)
>
> E fizeram n vezes dois porque aparecia aqui o n, voltava a aparecer aqui o n, era duas vezes, mais um (vai apontando para as várias partes que constituem a quarta figura, desenhada no quadro), e isto correspondia ao comprimento. A largura, correspondia o número da figura, que era n. (Fin)

Quadro 6 - Direção pedagógica e significado das intervenções da professora com foco no processo

	Dsv			**Fin**			**TDis**		
	Q (F)	A	Total	Q (F)	A	Total	Q (F)	A	Total
Rpt	5 (0)	4	9	3 (0)	16	19	4 (0)	9	13
Cor				3 (3)		3	1 (1)		1
Val	4 (2)	2	5		5	5	2 (1)	3	5
Rsl	22 (2)		22	22 (3)		22	22 (2)		22
Ju/Ex	36 (0)	5	42	24 (0)	32	57	32 (0)	16	48
Or	5 (0)	2	7	3 (0)	5	8	4 (0)	3	8
Apc	11 (5)	2	13	3 (0)	3	5	8 (3)	2	10
Cmp	9 (7)	4	13				5 (4)	2	8
IO		4	4					2	2
Total	80 (16)	20	-	54 (5)	46	-	70 (12)	30	-

Todos os valores apresentados no quadro são percentagens
Os valores entre parêntesis correspondem à percentagem de questões fechadas, F

As *intervenções da professora com foco no produto* (Quadro 7) também assumem exclusivamente a forma de questões (69%) ou apresentações (31%). As questões são maioritariamente para resolver (29%) – "Há alguma figura que tenham onze quadrados pintados?" (Dsv), "n vezes dois n quanto é que dá?" (Fin) – ou comparar (19%) – "E vocês, o que é que acham da expressão da Mariana em relação à vossa?" (Fin). Já no que se refere às apresentações da professora, são principalmente para apreciar os resultados apresentados (12%) – "Resultou! Ficou muito bem (…) mas a ideia era encontrarem uma expressão algébrica e vocês não escreveram uma expressão algébrica" (Dsv).

Comparando as diferentes fases da discussão, é possível identificar algumas diferenças. Em particular, no desenvolvimento regista-se um equilíbrio entre o número de questões e o número de apresentações da professora (52% vs 48%), enquanto na fase final o número de questões é manifestamente superior ao de apresentações (86% vs 14%). Esta situação parece associada ao facto de, de uma fase para a outra, assistir-se, por um lado, a uma redução das apresentações da professora como apreciação dos resultados apresentados pelos alunos (21% vs 3%) e, por outro lado, a um aumento significativo nas questões para corrigir (7% vs 14%), comparar (14% vs 24%) e, ainda mais acentuadamente, resolver (17% vs 41%). O aumento nas questões com estes significados deve-se ao facto de na fase final, a discussão desenrolar-se em larga medida a partir de duas solicitações da professora: (i) resolver uma parte da tarefa, que não havia sido conseguida pelos grupos de trabalho e (ii) comparar expressões algébricas diferentes, decidindo sobre a sua equivalência. Ambas as solicitações acarretam dificuldades para os alunos e levam-nos a cometer erros, que justificam a necessidade da professora ir colocando progressivamente subquestões até as tarefas serem concretizadas corretamente. Por exemplo, para levar os alunos a simplificar a expressão algébrica (2n+1)n, a professora vai colocando um conjunto de subquestões orientadoras, cujo significado é resolver ou corrigir:

P: Digam como é que vamos fazer.

A: Dois n mais um.

P: Consegues somar dois n com um?

E: Não, tem que ser n vezes dois n (…) mais n vezes um.

(…)

P: n vezes dois n quanto é que dá?

E: Dois n.

B: Dois n.

P: n vezes n?

E: n ao quadrado. (Fin)

Quadro 7 - Direção pedagógica e significado das intervenções da professora com foco no produto

	Dsv			**Fin**			**TDis**		
	Q (F)	A	Total	Q (F)	A	Total	Q (F)	A	Total
Rpt		10	10					5	5
Cor	7 (3)		7	14 (3)		14	10 (3)		10
Val	7 (0)	3	10	3 (3)	3	7	5 (2)	3	9
Rsl	17 (3)		17	41 (7)		41	29 (5)		29
Ju/Ex		3	3					2	2
Or	7 (3)	7	14	10 (3)		10	9 (3)	3	12
Apc	7 (3)	21	28	3 (0)	3	7	5 (2)	12	17
Cmp	14 (7)		14	24 (10)	7	31	19 (9)	3	22
IO		3	3					2	2
Total	52 (17)	48		86 (24)	14		69 (21)	31	

Todos os valores apresentados no quadro são percentagens

As *intervenções da professora com foco na concetualização* (Tabela 8) assumem também unicamente a forma de questões (39%) ou apresentações (61%), assistindo-se, contudo, a um predomínio das apresentações sobre as questões, contrariamente ao que se vem registando para os focos anteriores. As questões são maioritariamente para solicitar explicações relativas ao sentido de conceitos ou termos, matemáticos ou não (29%) – "O que é uma linha e uma coluna aí?" (Dsv). Já as apresentações incluem, quer explicações relativas ao significado de conceitos (25%), quer sugestões/recomendações sobre a linguagem/terminologia que os alunos devem usar (21%), conforme ilustrado pelos exemplos seguintes:

> Nós desembaraçamos ali de parêntesis, fomos simplificando a nossa expressão algébrica e chegamos exatamente à mesma expressão algébrica. Estas duas expressões (…) apesar de não serem iguais, dizem-se equivalentes. (Fin)

Olhem, eu acho que era preferível, (…) em vez de ser a questão do para baixo e para cima (...) é melhor falarem em linhas e colunas. Se estivermos a falar na vertical, falamos em colunas, na horizontal, em linhas. Ou então, se considerarem a figura como um retângulo, falar em largura e em comprimento. (Dsv)

Não é de estranhar que os dados obtidos para a totalidade da discussão sejam semelhantes aos do desenvolvimento, uma vez que é nessa fase que se concentra quase a totalidade das intervenções da professora com foco na concetualização, registando-se apenas três

apresentações na fase final (correspondentes a 100% das intervenções registadas nessa fase com foco na concetualização).

Quadro 8 - Direção pedagógica e significado das intervenções da professora com foco na concetualização

	Dsv			**Fin**			**TDis**		
	Q (F)	A	Total	Q (F)	A	Total	Q (F)	A	Total
Rpt									
Cor	8 (4)		8				7 (4)		7
Val	4 (0)	12	16				4 (0)	11	14
Rsl									
Ju/Ex	32 (0)	16	48		100	100	29 (0)	25	54
Or	4 (0)	24	28				4 (0)	21	25
Apc		4	4					4	4
Cmp		4	4					4	4
IO									
Total	44 (4)	56	-	0 (0)	100	-	39 (4)	61	-

Todos os valores apresentados no quadro são percentagens

As *intervenções da professora com foco na autorregulação* (Quadro 9) são sobretudo questões que apelam a uma apreciação dos alunos (36%) ou apresentações que fornecem orientações para os alunos regularem a sua atividade e aprendizagem (64%). São apresentados de seguida dois exemplos de apresentações desta natureza:

> A stora já imagina como é que vocês pensaram porque nós falámos, deves explicar aos teus colegas. (Dsv)

> Têm que pensar como vão apresentar o vosso trabalho à turma, para serem claros na descrição do trabalho. Esse é um dos critérios de avaliação, não é? Se calhar era preciso um bocadinho mais de cuidado nesse aspeto. (Dsv)

As questões para os alunos apreciarem o seu desempenho ou a sua compreensão, ainda que relativamente frequentes, são geralmente pobres, uma vez que, na maioria das vezes, são questões fechadas (32% num total de 36%), tal como acontece na intervenção seguinte: "O grupo do P. o que é que acha? Perceberam a estratégia que eles usaram?" (Dsv).

Tal como aconteceu com a concetualização, também na autorregulação os dados obtidos para a totalidade da discussão são semelhantes aos da fase de desenvolvimento, uma vez que é nessa fase que se concentra quase a totalidade das intervenções da professora com foco na autorregulação, registando-se apenas duas intervenções na fase final, uma questão fechada para apreciar (50%) e uma apresentação para orientar (50%).

Quadro 9 - Direção pedagógica e significado das intervenções da professora com foco na autorregulação

	Dsv			**Fin**			**TDis**		
	Q (F)	A	Total	Q (F)	A	Total	Q (F)	A	Total
Or	5 (0)	65	70		50	50	5 (0)	64	68
Apc	35 (30)		35	50 (50)		50	36 (32)		36
Total	35 (30)	65	-	50 (50)	50	-	36 (32)	64	-

Todos os valores apresentados no quadro são percentagens

Conclusões

É possível identificar um padrão geral nas intervenções da professora, marcado por especificidades em cada uma das diferentes fases da discussão em grupo-turma. A *fase de lançamento* é caraterizada por uma intervenção dominante da professora, que é tendencialmente dirigida a um grupo de alunos e tem foco na gestão da sala de aula, traduzindo a necessidade de a professora, principalmente no início da discussão, estabelecer e fazer respeitar normas de conduta e interação (Chazan & Ball, 1995) e gerir a organização e a participação dos alunos (DGIDC, 2007).

Na *fase de desenvolvimento*, Joana revela preocupação em proporcionar oportunidades para uma participação efetiva dos alunos na discussão, com interações entre eles. Ela direciona as suas intervenções, preferencialmente, a um aluno ou a um grupo de trabalho, mas raramente limita a participação dos restantes alunos. O processo é o principal foco das suas intervenções, seguido do produto e da gestão da sala de aula, em paralelo, e da concetualização em quarto lugar. Nesta fase, Joana parece orientar a discussão de forma a focar-se, essencialmente, em processos matemáticos, sem esquecer os resultados obtidos e a compreensão dos conceitos envolvidos, promovendo, assim, o desenvolvimento de aspetos matemáticos importantes (Chazan & Ball, 1995). A autorregulação, ainda que surja como um foco menos frequente, assume também um peso significativo nesta fase. Qualquer que seja o foco (processo, produto, concetualização e autorregulação), as intervenções da professora assumem a forma de questões ou apresentações, não se registando qualquer resposta, seja a intervenções de alunos ou a questões próprias, de resto como acontece ao longo de toda a discussão.

Em relação ao significado das intervenções, ainda na fase de desenvolvimento, varia em função do foco. As intervenções com foco no processo e na concetualização remetem principalmente para a justificação/explicação e as intervenções com foco no produto têm um significado mais diluído, destacando-se, ainda assim, as intervenções para apreciar ou resolver. Já as intervenções com foco na autorregulação, tendem a fornecer orientações, mas também a encorajar a apreciação do desempenho dos alunos. No entanto, a maioria das questões tendem a ser fechadas, o que restringe as suas potencialidades para a aprendizagem dos alunos (Black *et al.*, 2003). Apresentações da professora no sentido de corrigir, validar ou resolver são muito raras, nomeadamente se dirigidas ao processo ou ao produto, sugerindo, em particular, que a apresentação, a validação e a correção de procedimentos e resultados fica à responsabilidade dos alunos/turma (Santos, 2008). A justificação/explicação também é, na maior parte dos casos, remetida para os alunos, uma vez que as questões com este significado tendem a ser mais frequentes do que as apresentações correspondentes.

Na *fase final* da discussão, a professora volta a ter um papel mais interventivo, anulando-se as interações entre alunos. As intervenções da professora dirigem-se principalmente à turma e o seu foco é maioritariamente o processo ou o produto. As intervenções com foco no processo

remetem principalmente para a justificação/explicação, com uma superioridade das apresentações sobre as questões, enquanto as intervenções com foco no produto solicitam a apresentação de resultados pelos alunos. As especificidades desta fase parecem associadas, por um lado, às preocupações e necessidades sentidas por Joana, no sentido de sistematizar e aperfeiçoar as ideias apresentadas pelos alunos e, simultaneamente, gerir o tempo disponível para finalizar a discussão atempadamente. Por outro lado, podem advir do facto de, neste caso, a fase final coincidir com um momento em que a discussão incide sobre situações que levantam dificuldades à generalidade dos alunos, exigindo uma intervenção mais diretiva da professora.

A professora promove uma discussão participada pelos alunos e centrada em matemática relevante (NCTM, 2007), encorajando e orientando os alunos na apresentação, explicação e justificação de processos e resultados e, com menos expressividade, na autorregulação, em direção a uma comunicação reflexiva e instrutiva (Brendefur & Frykholm, 2000). Apesar disso e de se mostrar consciente do que pretende, Joana revela algumas dificuldades no desempenho do seu papel no sentido de uma efetiva regulação das aprendizagens (Black *et al.*, 2003), só possíveis de atenuar através de um ciclo de reflexão e prática.

Referências

Black, P., Harrison, C., Lee, C., Marshall, B., & Wiliam, D. (2003). *Assessment for learning. Putting into practice*. London: Open University Press.

Brendefur, J., & Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: two preservice teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*, 125-153.

Chazan, D., & Ball, D. (1995). *Beyond exhortations not to tell: The teacher's role in discussion-intensive mathematics classes*, NCRTL, Michigan State University. CP 95-2.

DGIDC (Ed) (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME, DGIDC.

Forman, E. (2003). A sociocultural approach to mathematics reform: Speaking, inscribing, and doing mathematics within communities of practice. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 333-352). Reston, VA: NCTM.

Goetz, J., & LeCompte, M. (1984). *Ethnography and qualitative design in educational research*. New York: Academic Press.

Hattie, J., & Timperley, H. (2007). The power of feedback. *Review of Educational Research,* 77(1), 81-112.

Lampert, M., & Cobb, P. (2003). Communication and language. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Schifter (Eds.), *A research companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 237- 249). Reston, VA: NCTM.

Lessard-Hébert, M., Goyette, G., & Boutin, G. (2005). Investigação qualitativa. Fundamentos e práticas (2ª edição). Lisboa: Instituto Piaget.

Moyer, P., & Milewicz, E. (2002). Learning to question: categories of questioning used by preservice teachers during diagnostic mathematics interviews. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*(4), 293-315.

NCTM (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. Lisboa: APM. (Trabalho original em Inglês, publicado em 2000)

Pirie, S. E. B., & Schwarzenberger, R. L. E. (1988). Mathematical discussion and mathematical understanding. *Educational Studies in Mathematics* 19, 459-470.

Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In L. Menezes, L. Santos, H. Gomes, & C. Rodrigues (Eds.), *Avaliação em Matemática: Problemas e desafios* (pp. 11-35). Viseu: Secção de Educação Matemática da SPCE.

Santos, L., & Pinto, J. (2008). The teacher's oral feedback and learning. *ICME11* (available in http://tsg.icme11.org/tsg/show/37)

Stein, M., Engle, R., Smith, M., & Hughes, E. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyong show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*, 313-.340.

Voigt, J. (1995). Thematic patterns of interaction and sociomathematical norms. In H. Bauersfeld & P. Cobb (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 163 – 201). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

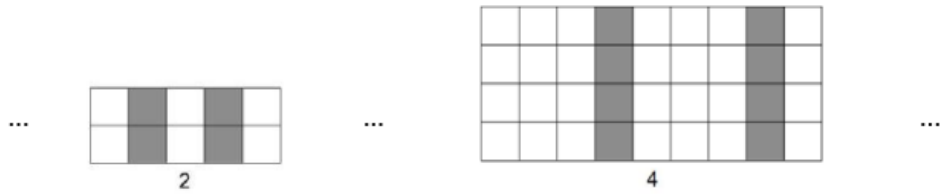
Wood, T. (1998). Alternative patterns of communication in mathematics classes: Funneling or focusing? In H. Steinbring, M. Bartolini Bussi, & A. Sierpinska (Eds.), *Language and communication in the mathematics classroom* (pp. 167-178). Reston, VA: NCTM.

Yin, R. K. (2009) *Estudo de caso: Planejamento e métodos* (4.ª ed.). Porto Alegre: Artemed Editora S.A.

Anexo

Tarefa: 2.º e 4.º termos de uma sequência de quadrados

Na figura seguinte são apresentados os 2.º e 4.º termos de uma sequência, construída pelo Fábio.



1) Construam os 1.º, 3.º e 5.º termos desta sequência. Expliquem o vosso raciocínio.

2) O Fábio perguntou à Mariana se existe algum termo da sequência com 22 quadrados cinzentos. O que acham?
   Caso exista, determinem o número de quadrados brancos e o número total de quadrados desse termo.

3) O Fábio escreveu uma expressão algébrica para calcular o número total de quadrados que constituem o termo de ordem n da sequência. Qual pode ter sido a expressão usada pelo Fábio? Justifiquem.

4) A Mariana sugeriu o seguinte termo geral:

$$n \times (n-1) + n \times (n-1) + n + 2n$$

   Será que esta expressão é equivalente à que encontraram na alínea anterior? Como terá pensado a Mariana?

DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO E AS PRÁTICAS DE COMUNICAÇÃO NUMA AULA[1]

Cláudia Domingues
Escola Secundária de Caldas das Taipas
cmadom@gmail.com

Maria Helena Martinho
CIEd – Universidade do Minho
mhm@ie.uminho.pt

Resumo: Este artigo analisa as práticas comunicacionais presentes numa aula de matemática inserida num estudo sobre o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos de uma turma de 9º ano. Para tal, apresentam-se os raciocínios na realização de uma tarefa de uma aula e analisam-se as práticas comunicacionais envolvidas nessa aula. O estudo seguiu uma metodologia interpretativa com uma estratégia de investigação de estudo de caso em que o caso foi a turma. Os raciocínios dos alunos foram analisados com base em categorias referentes ao *processo* de *generalização* e ao *processo de prova*. Verificou-se que o processo de conjeturar dos alunos foi acompanhado de justificação e que houve alunos que se convenceram com base em argumentos empíricos enquanto outros alunos produziram uma prova a partir dos raciocínios dedutivos realizados na exploração. Constatou-se a importância da discussão coletiva para o desenvolvimento de noção de prova matemática dos alunos. Concluiu-se, ainda, a importância do desenvolvimento da comunicação na explicitação dos raciocínios no desenvolvimento da capacidade de raciocinar matematicamente.

Palavras-chave: Raciocínio matemático, comunicação matemática e práticas letivas

Introdução

A partilha de raciocínios entre todos os presentes numa aula de matemática tem por base a comunicação desses mesmos raciocínios, facto pelo qual as capacidades de raciocinar e de comunicar matematicamente estão intrinsecamente relacionadas.

É objetivo deste artigo analisar a forma como o raciocínio matemático se desenvolve em relação com as práticas comunicacionais na aula de matemática.

Para tal, a primeira autora do artigo apresenta alguns raciocínios matemáticos dos seus alunos realizados durante uma aula, no ano letivo 2009/10, com uma turma de 9.º ano e a segunda autora do artigo analisa a comunicação matemática envolvida. A aula apresentada fez parte do estudo realizado pela professora na qual foi implementada a tarefa *A área de um retângulo especial* inserida na unidade de ensino "equações de 2º grau". A professora foi pela primeira vez professora da turma naquele ano letivo.

[1]Trabalho realizado no âmbito do *Projecto PPPM - Práticas Profissionais de Professores de Matemática*, apoiado pela FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia (contrato PTDC/CPECED/098931/2008).

Raciocínio matemático e comunicação matemática na sala de aula

Para que as aulas de matemática promovam o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos é necessário refletir sobre o que é o raciocínio e quais as melhores estratégias para o desenvolver. O atual programa de matemática do ensino básico (Ponte, et al., 2007) ao colocar o raciocínio matemático como uma capacidade transversal, pode contribuir para aumentar a preocupação dos professores em como agir para desenvolver o raciocínio matemático dos seus alunos. No entanto, não é a mera leitura do programa que modifica as práticas, razão pela qual a professora sentiu necessidade de procurar os fundamentos em que se baseiam as orientações programáticas. Na procura de compreensão sobre o que é o raciocínio matemático encontrou o raciocínio distinguido pela sua natureza (indutivo, abdutivo, por analogia e dedutivo) e também a descrição dos processos de raciocínio que ocorrem desde a formulação de conjeturas até à prova das descobertas realizadas como se fundamenta a seguir.

Os processos que ocorrem durante a fase de *generalização*, com a preocupação de encontrar as justificações matemáticas que acompanham essas mesmas conjeturas, são descritos por Mason, Burton e Stacey (1985). As vantagens apresentadas por Polya (1968) sobre o uso do raciocínio plausível na construção de conhecimento dos alunos apoiam a ideia de envolver os alunos na descoberta matemática.

Para que a aula facilite o desenvolvimento do raciocínio matemático é necessário que o professor proponha aos alunos tarefas, adequadas ao seu nível de desenvolvimento, que proporcionem a construção de conjeturas e a compreensão do "porque será assim" (Mason *et al.*, 1985; Tall, 1999). Segundo Balacheff (1988), a passagem de uma verdade assente em afirmações de factos para uma verdade assente em razões encontra, frequentemente, como obstáculo a natureza da conceção das ideias matemáticas dos alunos e/ou dos meios linguísticos que possuem. Garuti, Boero e Lemut (1998) concluíram que a existência de unidade cognitiva entre a fase de conjeturar e a fase da construção da prova é favorável à promoção da atividade de descoberta na aula. Desse modo, os alunos sentem necessidade de reorganizar os argumentos formulados, tornando-os mais coerentes e lógicos (Mariotti, 2006).

Os níveis de prova (empirismo naïf, experiência crucial, exemplo genérico e experiência conceptual) de Balacheff aferem o desenvolvimento cognitivo de prova através da forma como os alunos se convencem da validade de uma afirmação ou solução produzida (Balacheff, 1987). Estes quatro níveis ajudam a compreender se o aluno se convence com base em argumentos empíricos ou gerais e de que forma é que o faz. Balacheff (1987) afirma ser entre o *exemplo genérico* e a *experiência conceptual* que ocorre a passagem da prova pragmática para a prova conceptual, passagem essa que é feita através da linguagem com referência apenas às qualidades genéricas da situação.

Stylianides e Stylianides (2008), considerando que um argumento válido para ser qualificado de prova usa raciocínio dedutivo, esclarecem que esse uso não está relacionado com o nível de formalização e exemplificam com três diferentes formas válidas de apresentar uma prova: linguagem pictórica, linguagem verbal e linguagem algébrica. Definem, assim, prova matemática como um argumento matemático que: usa afirmações aceites sem mais justificação, aplica formas de raciocínio (modos de argumentação) válidas e conhecidas, e é comunicado at ravés de formas de expressão (modos de representação de argumentos) adequadas e conhecidas dentro do alcance conceptual da comunidade turma.

A comunicação presente numa aula de matemática tem um papel fundamental no desenvolvimento do raciocínio. Para que essa comunicação seja produtiva, é necessário que professor e alunos compreendam e aceitem as posições e argumentos dos outros, reconhecendo quais as perspetivas partilhadas (Alrø & Skovsmose, 2002). Os diferentes

significados são construídos através das interações ao longo do processo de ensino-aprendizagem. A procura de consensos só é possível se forem incentivados a argumentar, a explicitar os raciocínios, a refutar e a contestar aquilo que é partilhado.

Segundo Ruthven, Hofmann e Mercer (2011), os momentos de discussão coletiva após a realização de trabalho de grupo revelam-se importantes para o desenvolvimento da compreensão matemática. Se os alunos forem incentivados a apresentar e ouvir diferentes pontos de vista, o diálogo constitui um apoio do pensamento no sentido de dar significado às aprendizagens.

Metodologia do estudo

O estudo referido foi realizado no âmbito da dissertação de mestrado de Domingues (2011) cujo objetivo principal de investigação consistiu em compreender como raciocinavam os alunos de uma turma de 9.º ano. A metodologia de estudo seguiu o modelo de investigação interpretativo de abordagem de interacionismo simbólico com uma estratégia de investigação de estudo de caso (Bogdan & Biklen, 1994; Cohen & Manion, 1994; Ponte, 2006). O caso foi a turma, constituída por quinze raparigas e quatro rapazes, com quatro alunos selecionados como subcasos (Yin, 2005). Os instrumentos de recolha de dados foram: a observação participante, registos escritos em forma de notas da professora/investigadora, os registos escritos dos alunos, questionário, entrevista semiestruturada e gravações áudio e vídeo. Na experiência foram aplicadas várias tarefas, planificadas para diagnosticar e promover o desenvolvimento do raciocínio matemático, das quais aqui se trabalha uma: "um retângulo especial".

A atividade dos alunos foi observada relativamente ao *processo de generalização* e ao *processo de prova*. O *processo de generalização* foi analisado de acordo com as categorias seguintes: i) processo de conjeturar – forma como os alunos formulam uma conjetura, como a testam e como a reformulam de acordo com os testes realizados e com os contraexemplos que surgem e como generalizam (Lakatos, 1999; Mason, Burton, & Stacey, 1985; Polya, 1968); ii) nível de aceitação da generalização – forma como os alunos aceitam a conjetura como válida de acordo com o nível de prova de Balacheff (1987); iii) natureza e padrões seguidos nos raciocínios usados (Reid & Knipping, 2010). O *processo de prova* teve as seguintes categorias de análise: i) questionamento – análise do modo como os alunos questionam as generalizações que fazem (Mason, 1998; Mason *et al*., 1985); ii) construção da prova com toda a turma – análise da atividade matemática conjunta no que concerne a justificar as conjeturas formuladas e a produzir um argumento geral (Balacheff, 1987; Mariotti, 2006; Stylianides & Ball, 2008; Stylianides & Stylianides, 2009).

A aula onde foi trabalhada a tarefa "um retângulo especial", teve dois momentos de trabalho: o primeiro de trabalho autónomo em pequeno grupo e o segundo de explicitação dos raciocínios com toda a turma por forma a desenvolver um argumento geral. As categorias finais consideradas foram sendo reformuladas, ao longo do estudo, de acordo com a interpretação dos dados recolhidos com base na fundamentação teórica revista.

Prática letiva

As práticas letivas resultam da interação que se estabelece entre alunos e professora e alunos na sala de aula, pelo que as ações realizadas dependem, em certa medida, do conjunto de alunos e forma de agir dos mesmos face à Matemática. Este facto faz com que logo que a

professora conhece os seus alunos faça interpretações sobre os seus atos e aja de acordo com a interpretação que faz desses mesmos atos.

Os primeiros dados recolhidos, através de questionário e de observação participante, revelaram que a aula de matemática era descrita por grande parte dos alunos como um espaço onde "o professor explica e nós fazemos exercícios". Para além disso, o tipo de trabalho predominante era o trabalho individual e a participação voluntária era quase sempre das cinco alunas com melhores resultados na disciplina. Este diagnóstico levou a professora a desenvolver ações para modificar a aula de matemática considerando que as mudanças tinham de ser conseguidas implicando os alunos no processo e mostrando-lhes as razões que tornavam pertinente a mudança. Os alunos compreenderam que a resolução de exercícios é importante, mas que há outro tipo de tarefas com maior desafio cognitivo necessárias para desenvolver as suas capacidades de raciocínio. Para tal, o trabalho colaborativo em sala de aula tornou-se uma necessidade. Assim, ao mesmo tempo que foram propostas diferentes tarefas para realizar em grupo e se discutiram as estratégias com toda a turma, também foram negociadas as normas de sala de aula necessárias para que a turma funcionasse como comunidade matemática. Foi, contudo, difícil modificar o padrão de comunicação e incentivar os alunos a participar quer nos grupos quer nas discussões com toda a turma. Para que os alunos participassem nos grupos, a professora tentou otimizar a constituição dos grupos de trabalho ao longo do ano. Para promover a participação em turma foi necessário que a professora mostrasse aos seus alunos como se devia processar essa participação e lhes sublinhasse as vantagens para a aprendizagem, procurando sempre dar reforços positivos e ajudando-os a relacionar diferentes aprendizagens e conceitos.

Uma outra dificuldade dos alunos prendia-se com a justificação das suas ações matemáticas. De facto, as justificações dos alunos consistiam essencialmente na explicação dos procedimentos ou no recurso a argumentos de autoridade externa, como por exemplo, "a professora disse que um sistema se fazia assim". Foi possível concluir que, para a maioria dos alunos a matemática consistia num conjunto de regras a aplicar em determinadas situações sem que houvesse necessidade de compreender porquê.

A lecionação da unidade "equações de 2º grau" decorreu no segundo período e foi planificada tendo por base o diagnóstico referente ao conteúdo e aos processos de raciocínio. A professora havia já diagnosticado que os alunos apresentavam muitas dificuldades de manipulação algébrica e não aplicavam os casos notáveis lecionados no 8.º ano. Afirmavam não haver necessidade em sabê-los e mostravam desinteresse em compreendê-los, pelo que a professora resolveu investir na conexão entre os casos notáveis e a geometria.

A tarefa "um retângulo especial" foi planificada para promover a compreensão de um caso notável da multiplicação, diferença de quadrados. Esta tarefa pedia explicitamente para provar.

A tarefa "Um retângulo especial" e a sua implementação

A tarefa foi aplicada numa aula de noventa minutos em que os alunos trabalharam em cinco grupos de três a quatro elementos.

A tarefa continha um diagrama que traduzia o enunciado verbal o que simplificou a sua compreensão. A explicitação das medidas de modo genérico permitiu identificar a natureza do raciocínio dos alunos, como indutivo ou dedutivo, de acordo com o processo de exploração da tarefa.

A área de um rectângulo especial

Um quadrado transforma-se num rectângulo não quadrado quando o seu comprimento cresce e a sua largura decresce o mesmo número de unidades de medida.

Investiga qual é a relação entre a área desse novo rectângulo e a área do quadrado inicial.

Prova essa relação para qualquer quadrado que se transforme em rectângulo nas condições indicadas.

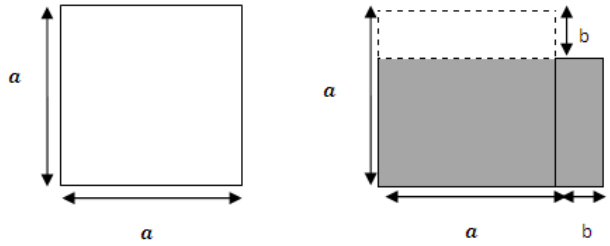


Figura 10: Tarefa proposta aos alunos

A professora agrupou os alunos de acordo com uma previsão pensada antes da aula e distribuiu o enunciado da tarefa. Colocou um gravador em cada grupo e pediu aos alunos para registarem o seu trabalho no papel. Foi definido um tempo de trinta minutos para trabalho autónomo e explicou que no fim desse tempo os alunos discutiriam as suas conjeturas. O diagnóstico do nível de generalização de cada grupo, revelou-se essencial para posteriormente a professora gerir a discussão com toda a turma.

Raciocínio matemático dos alunos

Na análise do trabalho realizado pelos diferentes grupos foi possível sintetizar as estratégias seguidas da seguinte forma: particularização, manipulação algébrica sem relacionar com as áreas, cálculo das áreas parciais das figuras usando medidas genéricas e manipulação mental da figura. Todas as estratégias utilizadas fizeram emergir a compreensão da situação com exceção do raciocínio de manipulação algébrica sem relação com as áreas da figura. Neste artigo apresenta-se os raciocínios, seguidos por dois grupos de alunos, respeitantes à estratégia de particularização e manipulação mental da figura.

Processo de generalização

A atividade matemática dos alunos iniciou-se com a discussão do enunciado seguida da formulação de conjeturas sobre a relação entre as áreas das duas figuras. A primeira intuição dos alunos foi a de considerar que as áreas, do quadrado inicial e do novo retângulo, seriam iguais. Porém, quando apresentaram os seus argumentos no grupo começaram a ter dúvidas e sentiram a necessidade de explorar melhor a situação. Perante as dúvidas, os alunos recorreram menos à professora do que habitual e no seio do grupo exploraram a situação esclarecendo os seus pontos de vista.

Os alunos de um dos grupos, Paulo (P), Manuel (M) e Miguel (Mi), começam por afirmar que as áreas são iguais com base na visualização da figura do enunciado. Posteriormente, ao traduzirem as medidas do quadrado e do retângulo de forma genérica, Manuel apercebe-se que as medidas das figuras podem não ser iguais. Esta constatação leva-os a particularizar.

> **[1] M**: Olha aqui diz que: este quadrado vai-se transformar neste retângulo. Que o que cresce aqui…

[2] P: O que está a mais aqui vai passar para o lado…

[3] M: O que decresce aqui é o mesmo número de unidades. Podemos dizer que este bocado que está aqui passa para o lado direito, por isso dá a mesma área.

(…)

[4] P: Aqui vai ser a vezes a.

[5] M: Vai ser a menos b vezes a mais b. Acho que não vai dar a mesma coisa…

[6]P: Vai vai Manuel, porque esta medida é deste e vai desaparecer daqui e vai ficar aqui.

(…)

[7] P: Olha dá medidas a isto. Este lado é 2. Daqui aqui vai ser 2 e daqui aqui vai ser 1. (2-1)x(2+1) dá 3.

[8] Mi: Não sei porquê mas acho que estamos a fazer mal. (...) Mas eu acho que aqui não é 1, porque isto não é verdade.

Particularizaram de novo atribuindo o valor 3 à medida do lado do quadrado e 1 para o valor de b como se pode ver na figura 2, concluindo que aquelas áreas não são iguais.

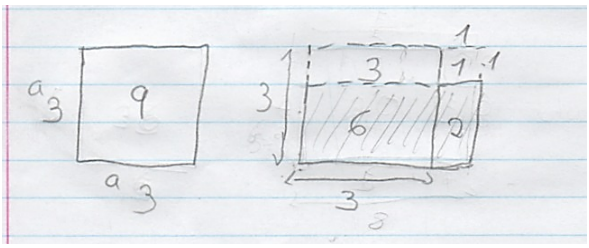


Figura 2: particularização do grupo do Miguel

Chamaram a professora e explicaram o raciocínio realizado até ao momento:

[9] M: Stora nós estávamos a pensar assim… achamos que este bocadinho que tirou aqui e meteu aqui é a mesma área.

[10] Prof: E como é que podem saber se é igual ou não?

[11] P: Estamos a dar medidas.

(mostraram o esquema da figura 2, explicando como pensaram)

[12] Prof: Então não é igual? Pensem melhor.

A reação dos alunos foi a de rever a situação como se pode ler no diálogo seguinte:

[13] M: Não, mas olha esta largura é a mesma que daqui aqui.

[14] P: Mas o comprimento aqui é que não é o mesmo.

[15] M: Pois não, mas a largura vai ser a mesma.

[16] Mi: Porque nós vamos tirar este daqui e era o mesmo que este daqui aqui ao fundo, por isso a este vamos tirar 1. Acho que já estou a perceber.

[17] P: Não, vamos ter que tirar este lado, tirar este quadrado.

[18] M: Não, vamos tirar 1 unidade… ou o quadrado.

[19] P: É 1 porque 1x1 é 1. Tu não sabes as medidas daqui aqui.

[20] Mi: Eu meti aqui x porque não sei as medidas daqui aqui.

[21] M: Já temos aqui as medidas, não é por nada, aqui é b. b vezes b é b ao quadrado. Depois este retângulo é a vezes b… é melhor meter números.

O Manuel volta a tentar trabalhar com as medidas genéricas, mas hesita e decide exemplificar com o caso apresentado na figura 2. Os alunos chamaram a professora para lhe dizer que aqueles cálculos estavam corretos e a professora depois de verificar os cálculos dá-se conta que o valor atribuído a b foi outra vez 1.

[22] Prof: Estão convencidos?

[23] M: Sim.

[24] Prof: Fixaram o b como 1? Experimentem com outro b . Não devem ficar presos num caso, porque pode dar para um caso e não dar para outro.

[25] P: Agora já não vai dar.

[26] M: Vai vai.

(…)

[27] M: Então 6 x 4 é 24 ; 2 x 4 dá 8. 24 - 8? Este mais este 32 e 36 - 4 dá 32.Teatcher. Uhuhuh! Vai dar a mesma coisa. Aqui metemos 6 e depois deste lado metemos 2 e vai dar a mesma coisa: este dá 36 e aqui é 36 - 4 é 32.

[28] Prof: Então qual é a conclusão?

[29] M: A área é a mesma mas só que vamos ter de tirar este quadrado.

[30] P: A área daquele quadradinho.

Este grupo convenceu-se da sua conjetura de "a área do quadrado inicial ser igual à do retângulo tirando um quadradinho" com base em alguns casos, mas não generalizaram a medida desse quadradinho.

Segundo os níveis de prova de Balacheff, estes alunos estão no nível de *empirismo naïf*, pois eles convenceram-se com base em casos concretos.

No grupo das alunas Maria (Ma), Rita (R), Beatriz (B) e Paula (Pa) a primeira intuição foi a de que as áreas das duas figuras seriam iguais. Porém, o diálogo que as alunas estabelecem no grupo tem na base as medidas genéricas.

[31] Ma: Área do quadrado é a^2. A área do retângulo (a-b)(a+b)… não fica igual.

[32] B: Pois não, a do retângulo é menor.

[33] Ma: Não pode ser, não fica igual.

[34] Pa: Falta esta altura.

Seguiram a estratégia de manipulação mental da figura com medidas genéricas e colocaram a hipótese de apenas referirem que uma é menor do que a outra, mas pareceu-lhes insuficiente.

[35] Ma: Temos que dizer qual é a relação. A área do retângulo…

[36] R: É menor que a área do quadrado.

[37] Pa: É só para dizer isso? É para dizer qual é a relação. E vamos só dizer que é menor? A área do retângulo é menor do que a área do quadrado.

Leram de novo o enunciado e deram conta que está lá a palavra "provar". Mostraram-se, no entanto, confusas com a introdução desta palavra. Levantaram mesmo a hipótese de necessitarem de particularizar.

[38] R: E agora prova essa relação para qualquer quadrado... Agora é uma coisa geral. Temos se calhar que pensar noutros quadrados e ver que vai ser sempre assim.

[39] Ma: Podemos fazer alguns e depois escrever uma conjetura. Então?

No entanto, não conseguem avançar sem esclarecer a dúvida sobre o que é "provar". Chamaram a professora que explica a diferença entre concretizar e provar, aproveitando para dar a dimensão de explicação à prova.

[40] Ma: Stora? É para provarmos, como assim? Ou substituir os valores?

[41] Prof: Têm que explicar e conseguir provar que dá para todos. Quando a gente usa valores estamos a dizer que dá para aquele caso. Isso é concretizar.

[42] B: Vai ficar um retângulo, pois um bocado é mais pequeno que o outro. Quando tirarmos uma parte deste quadrado é uma parte de um lado igual, por isso não vai ficar a mesma área.

[43] Ma: Como vamos fazer?

[44] R: Só se pusermos que a área do retângulo novo vai ser igual: pomos este total menos uma parte que se vai tirar aqui. Agora se pusermos este igual a este é porque não vai ser igual.

As alunas continuaram o seu trabalho colocando de lado a ideia de particularizar. No entanto, tiveram dificuldades em decidir qual a estratégia a seguir e discutiram em termos de manipulação da figura. Neste diálogo das alunas percebe-se como a forma de apresentar o raciocínio envolve decisões mais complexas do que podia parecer à primeira vista.

Decidiram colocar as medidas genéricas a acompanhar os esquemas e foram interpretando essas expressões algébricas com a figura. Este processo permitiu-lhes reorganizar o pensamento e analisar as propriedades da figura. É a necessidade de mostrar o seu raciocínio que as motiva a provar.

[45] Ma: Se desenharmos esta parte acrescentada fica até aqui e esta largura é b e aqui é b também.

[46] R: Esta vai ser igual a esta daqui até ao fim.

[47] Ma: Pronto. O outro quadrado é igual a este, mas não é este [todo]. Ele é até aqui. (Maria aponta para o quadrado não preenchido). b^2. $a^2 - b^2$ é a área dele todo.

[48] R: A área deste todo é qualquer coisa desta menos as partes que se tiram.

[49] Ma: O que é que acham?

[50] Pa: É uma hipótese. Vamos tentar.

[51] Ma: Texto ou cálculo? Cálculo! Expressões. Depois podemos pôr em fórmula para se perceber.

[52] B: A área do retângulo…

[53] Ma: Mas a área do retângulo em que, se é uma regra geral, em que a largura…

[54] R: A área o retângulo feito a partir do quadrado é igual à área do quadrado inicial menos uma porção.

[55] B: Menos uma parte.

[56] R: Um lado do retângulo. Depois pomos um desenhinho. Lembras-te do esquema que a Liliana fez? Podíamos fazer um esquema desses para as pessoas perceberem melhor.

[57] Ma: É a construção do quadrado a partir das partes do retângulo. Sim, tu ao fazeres isto e pores ali estás a construir o quadrado com as partes do retângulo.

[58] R: Ao pôr isto aqui vai ser preciso, então. Aqui estamos a dizer que não é, mas é. Ao pormos esta parte daqui para aqui vai ficar até aqui e vai ser preciso isto.

[59] Ma: Mas estamos a fazer o raciocínio ao contrário. A área do retângulo a partir do quadrado é igual à área do quadrado inicial menos uma parte que não fica preenchida se construirmos o quadrado inicial com as partes do retângulo. É uma confusão.

[60] R: Mais valia não fazer por escrito e fazermos em desenhos.

A Rita formulou a conjetura [54] não clarificando o que entende por *porção*. No entanto, pelo diálogo percebe-se que as colegas compreenderam o significado atribuído por Rita a *porção*.

Relativamente ao desenvolvimento do raciocínio surgem ideias contrárias: por um lado querem chegar ao retângulo a partir do quadrado e, por outro, querem chegar ao quadrado a partir do retângulo. Esta dicotomia está patente no diálogo, em particular na fala de Maria [98]. Decidem então construir um desenho e Paula dá a ideia de um esquema dinâmico.

[61] Pa: Eu tive uma ideia. Esta parte aqui e queremos pôr esta peça aqui, fazemos uma seta daqui para aqui e depois fazemos um igual a este mas com esta peça pintada.

O esquema que as alunas fizeram está representado na figura 3, partiram de um retângulo e mostraram como se pode transformar para obter o quadrado inicial.

Para além do esquema as alunas concluíram que a relação entre as áreas pode ser traduzida por $(a-b)\,(a+b)=a^2-b^2$.

[62] Ma: E agora que conclusão podemos tirar daqui?

Que $(a-b)\times(a+b)$ é igual a…

[63] R: a^2-b^2.

(Mostraram então à professora)

[64] Ma: Isto foi a 1ª parte: esta parte deslocámos para aqui, a tentar construir o quadrado, e faltou um bocadinho então vimos que (a-b)x(a+b)=a^2-b^2.

O *processo de generalização* das alunas envolve a compreensão geométrica e algébrica da situação proposta. As alunas trabalharam sempre com o *exemplo genérico*, pelo que apenas usaram raciocínios de natureza dedutiva. Através do seu esquema dinâmico (figura 3) mostram as transformações necessárias para inferir a conclusão sem qualquer recurso a exemplos particulares. Afirma-se que o nível de prova das alunas se situa ao nível da experiência conceptual com base na apresentação da prova e na análise do processo de descoberta seguido.

A professora chamou os grupos para explicitarem os raciocínios realizados, começando pelo grupo que tinha desenvolvido um trabalho de manipulação algébrica sem significado, e de seguida por aqueles grupos que tinham feito generalizações a partir da particularização de alguns casos tal como o grupo já referido do Manuel. O grupo da Maria foi o último a comunicar à turma.

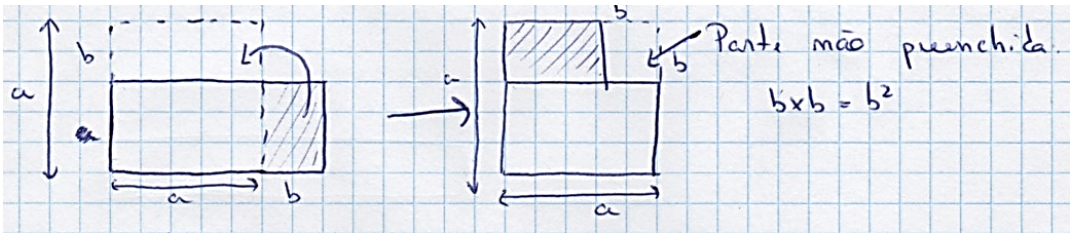


Figura 3: Esboço do grupo da Maria

Processo de prova

A fase de discussão foi muito importante para a partilha dos diferentes tipos de raciocínio. Perante o trabalho do grupo da Daniela (D), o grupo do Manuel chamou a atenção para a importância de procurar mais casos e afirmaram orgulhosos que fizeram mais.

[65] P: E só puseste esses resultados?

[66] D: Se fizéssemos outros números provavelmente….

[67] P e Mi: Provavelmente!? Devias ter feito.

[68] M: Nós fizemos.

A professora questiona os alunos no sentido de explicitarem a relação para qualquer quadrado naquelas condições. Gera-se, então, um diálogo entre a professora e os alunos onde é enfatizada a necessidade de passar para o caso geral.

[69] Prof: Quanto diminuiu, genericamente?

[70] D: 4.

[71] Prof: Nesse caso 4.

[72] P: Depende, pode diminuir 2 ou 3 ou 5.

[73] Prof: Se quisermos falar genericamente. Quanto diminuiu?

O António, do grupo da Daniela, responde metade, o Paulo responde b e a Beatriz, aluna do grupo da Maria, responde b^2.

A professora reformula a questão de forma a clarificá-la:

[74] Prof: Nesse diminuiu 4, esse é um caso concreto. Mas no exemplo genérico quando temos um quadrado e aumentamos o comprimento b e diminuímos a largura b quanto diminui a área?

[75] B: b^2.

[76] Prof: E onde está?

[77] B: É o quadrado que está por cima… posso ir lá.

(A Beatriz foi ao quadro e aponta para o quadrado pequeno de lado b)

(…)

[78] Prof: Como é que podemos falar de todos os casos?

[79] Alunos: Com letras.

[80] Prof: Por que as letras podem tomar qualquer valor.

Era a vez do grupo da Maria explicar o seu trabalho e começou por se assegurar que todos tinham identificado os retângulos iguais nas duas imagens (figura 1) com lados a e $a - b$.

[81] M: Como é que sabes que é o b?

[82] Prof: Acho que o Manuel não está a perceber porque é que dizes que os retângulos são iguais. O que é que vos convenceu que são iguais?

(…)

[83] R: Então cresceu b decresceu b e por isso o que tem para o lado é o mesmo.

[84] Ma: Isto é a, isto é b e isto aqui é o quê?… $a - b$.

(Apontou para os lados de medida a depois para o lado de medida b e depois perguntou-lhes qual seria a medida da altura do retângulo)

Se aqui é $a - b$ aqui é? Quanto é?… b.

Se pusermos isto aqui (girando) quanto é que vai ocupar?

(…) $a - b$. E isto é quanto? É b. Pronto.

O que vocês fizeram com números nós fizemos com letras. Conclusão o que podemos dizer? Conclusão final: A área do retângulo é igual a $a^2 - b^2$.

O Manuel pede uma explicação particular à Maria e a professora diz-lhe que pode ir explicar-lhe. O Manuel volta a perguntar-lhe como pode ela pensar sem medidas concretas.

[85] Ma: Estou a fazer supostamente, se medisses, medias aqui e era b. Ok? Então aqui em cima vai ser b também.

(…)

Queres que explique outra vez? Nós não medimos.

[86] M: Pois, não tinhas medidas.

A explicitação dos raciocínios pelos diferentes grupos evidenciou as vantagens do exemplo genérico face aos casos concretos. A construção de um argumento geral com toda a turma foi, nesta tarefa, proporcionado pelo trabalho do grupo da Maria. As alunas ao organizarem o raciocínio relativo às relações entre as medidas genéricas e as respetivas áreas, provaram. Para organizarem os raciocínios tiveram de decidir se partiam do quadrado e mostravam a relação das áreas ao transformar-se num retângulo ou se faziam o processo inverso partindo do retângulo.

Comunicação matemática na aula

Ao longo de toda a aula a professora procura que o ambiente de trabalho seja desafiador. Tanto nos grupos como na discussão em grande grupo, se nota por vezes que os próprios alunos desafiam os colegas, não ficam satisfeitos com qualquer resposta e colocam questões.

A professora privilegia as discussões em pequeno grupo e incentiva a que os alunos comuniquem entre si. Isso está patente, por um lado na opção pelo trabalho em grupo e, por outro, na forma como interage com os grupos. Por exemplo, no diálogo com o grupo do Miguel, quando os questiona [10], [12], [22] ou [24] dirige-se ao grupo no seu todo, "como podem saber", "pensem melhor", "estão convencidos?" e apesar da fala anterior ser sempre de um aluno particular, a professora não se dirige apenas a esse aluno mas ao grupo.

A procura de estímulos para o desenvolvimento do raciocínio dos alunos é uma constante. Atente-se na forma como a professora interage com os alunos incentivando-os à argumentação, em particular, no tipo de questões que vai colocando. Por exemplo, na apresentação e discussão em grande grupo, a professora revela cuidado com: a escolha da ordem por que apresentam; as dúvidas e dificuldades; o nível cognitivo do trabalho.

Relativamente à *ordem de apresentação* das conclusões dos grupos, a professora procura que haja uma evolução ao longo da discussão, chegando mesmo à construção de uma síntese com base nas apresentações dos alunos. Assegura-se que, de forma natural, se percorram as diferentes construções dos alunos e que seja sempre possível acrescentar mais elementos ao que já foi trabalhado antes. Decidiu quem apresenta e por que ordem, de forma a evitar repetições. As *dúvidas e dificuldades* reveladas pelos alunos eram motivo de atenção, por exemplo, na fala [82].

A preocupação com o *tipo de explicações e raciocínios*, esteve patente em muitos momentos da aula. Por exemplo, a professora aproveita o decorrer das apresentações para fazer evoluir cognitivamente o nível dos argumentos dos alunos. Após alguma discussão em torno dos casos particulares e da sua diversidade, a professora avança para a generalização, patente em [69], [74] e [76]. Explicita, recorrendo às falas dos alunos, e acrescenta aquilo que lhe parece fundamental, passando mesmo pela preocupação com a representação em [78-80]. Vai questionando os alunos para que explicitem melhor os seus raciocínios, por exemplo, quando pergunta a Beatriz "onde está b^2" [76]. Procura também que os raciocínios sejam claros, como em [82]. A preocupação com a clareza parece ser uma constante nas aulas, o que se manifesta pelo empenho dos alunos em se fazerem entender uns aos outros. Em particular, a Rita revela explicitamente essa preocupação, como se pode ver na fala [56] quando diz "para as pessoas perceberem melhor", ou na fala [60]. Igualmente, Maria propõe "pôr em fórmula para se perceber", na fala [51].

Conclusões

As conjeturas formuladas pelos alunos trouxeram consigo o porquê das mesmas facilitando assim a compreensão matemática da situação (Mason *et al*., 1985). Desse modo foi possível reorganizar os argumentos formulados no *processo de generalização* facilitando o *processo de prova* (Mariotti, 2006). Os alunos que fizeram raciocínios dedutivos ganharam uma melhor compreensão da situação o que facilitou a construção da prova. No entanto, os alunos que validaram as suas conjeturas com casos particulares não foram capazes de chegar a um argumento geral, mas puderam constatar que argumentos empíricos não provam.

Confirmou-se também que o desenvolvimento da noção de prova matemática pode ser promovido através da orientação, pelo professor, da discussão coletiva após os alunos trabalharem autonomamente. Deste modo, dá-se-lhes oportunidade de reorganizar os argumentos produzidos no processo de conjeturar e de convencer os outros das razões que os validam (Mason *et al*., 1985; Garuti, Boero & Lemut, 1998).

O encorajamento à intervenção e explicitação dos raciocínios revelou-se fundamental para o desenvolvimento da compreensão, tal como apontam Ruthven, Hofmann e Mercer (2011). A

forma como os alunos se envolvem na aula, discutem em grupo e se preocupam com a elaboração de argumentos válidos e claros para ser compreendidos pelos colegas, ajuda-os a caminhar para uma aprendizagem da matemática pela compreensão.

Referências

Alrø, H., & Skovsmose, O. (2004). Dialogic learning in collaborative investigation. *Nordisk Matematikkdidaktikk 9*(2): 39-62.

Balacheff, N. (1987). Processus de Preuve et situations de validation. *Educational Studies In Mathematics*, *18*(2), pp. 147-176.

Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupil's practice of school mathematics. In D. Pimm (Ed.), *Mathematics Teachers and Children Londres* (pp. 216-235). London: Hodder and Stoughton.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação.* Porto: Porto Editora.

Cohen, L., & Manion, L. (1994). *Research Methods in Education.* London e New York: Routledge.

Domingues, C. (2011). *Desenvolvimento do Raciocínio Matemático: uma experiência com uma turma de 9.º ano.* (Dissertação de mestrado, Universidade do Minho).

Garuti, R., Boero, P., & Lemut, E. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulty of proof. *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, PME22, Vol. 2 (pp. 345-352). Stellenbosch, RSA.

Hanna, G. (1996). The Ongoing Value of Proof. *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, PME20, (pp. 21-34). Valencia, Spain.

Lakatos, I. (1999). *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*. United States of America: Bembo.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and Prooving in Mathematics Education. In A. G. (Eds), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Paste, Present and Future* (pp. 173-204). Rotterdam: Sense Publishers.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1985). *Thinking Mathematically*. London: Addison-Wesley Publishing Company.

Polya, G. (1968). *Mathematics and Plausible Reasoning: Induction and Analogy in Mathematics* (Vol. I). Princeton: University Press.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema, 25* , 105-132.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., H.Sousa, *et al*. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Lisboa: Ministério da educação – DGIDC.

Reid, D. A., & Knipping, C. (2010). *Proof in Mathematics Education: Research, Learning and Teaching*. Netherlands: Sense Publishers.

Ruthven, K., Hofmann, R., & Mercer, N. (2011). In Ubuz, B. (Ed.). *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 4 (pp. 81-88). Ankara, Turkey.

Stylianides, A. J., & Ball, D. L. (2008). Understanding and describing mathematical knowledge for teaching: knowledge about proof for engaging students in the activity of proving. *Journal Math Teacher Education*, *11*(4), 307-332.

Stylianides, G., & Stylianides, A. (2008). Proof in school mathematics: Insights from psychological research into students' ability for deductive reasoning. *Mathematics Thinking and Learning*, *10*(2), 103-133.

Stylianides, G., & Stylianides, A. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*(3), 314-352.

Tall, D. (1999). The cognitive Development of Proof: Is Mathematical Proof For All or for Some? In Z. Usiskin (Ed.), *Developments in School Mathematics Education Around the World.*, Vol. 4 (pp. 111-136). Reston, Virginia: NCTM.

Yin, R. K. (2005). *Estudo de caso: planejamento e métodos.* Porto Alegre: Bookman.

DESENVOLVIMENTO DA CAPACIDADE DE ARGUMENTAÇÃO MATEMÁTICA DE ALUNOS DO 11.º ANO DE MATEMÁTICA A E PRÁTICAS AVALIATIVAS DOS PROFESSORES: O CASO DE LAURA

Rosário Monteiro
Escola Secundária Dr. Joaquim Gomes Ferreira Alves
xicomate@gmail.com

Leonor Santos
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
mlsantos@ie.ul.pt

Resumo: O presente texto relata parte de uma investigação em curso com o objetivo de estudar, em contexto colaborativo, práticas avaliativas dos professores sobre a argumentação matemática dos alunos do ensino secundário, procurando compreender os aspetos que contribuem para a elaboração de tarefas promotoras do desenvolvimento desta capacidade, as dificuldades com que o professor se debate durante o processo de avaliação reguladora, concretizado, em particular, através de escrita avaliativa ou *feedback* dado ao aluno, e os processos de articulação usados pelo professor, entre a avaliação reguladora e a avaliação sumativa. Seguindo uma metodologia de natureza interpretativa, a recolha de dados foi feita através de observação de reuniões e de aulas, de entrevista às professoras e de recolha documental. Os resultados obtidos evidenciam que, para Laura – um dos casos –, a argumentação é a expressão de um raciocínio possível. Na conceção das tarefas, dirigidas ao desenvolvimento da capacidade de argumentação dos alunos, Laura privilegia a justificação, considerando, sob o ponto de vista cognitivo, a *explicação* menos exigente do que a *justificação*. Foi constante a preocupação em proceder a uma avaliação com intencionalidade reguladora, recorrendo, essencialmente, ao *feedback* escrito.

Palavras-chave: Argumentação matemática, Justificação, Práticas avaliativas e *Feedback* escrito.

Introdução

Em Portugal, sucessivos diplomas legais têm vindo a regulamentar a avaliação das aprendizagens dos alunos e destacam a importância de uma avaliação ao serviço da aprendizagem, invertendo as tendências do passado. Como referem Barreira e Pinto (2005, p. 88),

> Do ponto de vista da própria legislação tem existido um alargamento das conceções de avaliação, das suas modalidades e seus instrumentos na perspetiva de desenvolvimento de uma avaliação mais formativa, interativa e contextualizada e de "boas relações" com a aprendizagem, atribuindo ao aluno um papel importante na sua própria avaliação das aprendizagem.

Tais medidas normativas trouxeram, para os professores, a necessidade de mudança não só nas suas conceções, mas também nas práticas avaliativas. Porém, mudar as práticas representa um grande desafio e levanta múltiplas dificuldades. De facto, como refere Fernandes (2005), a investigação, já realizada nesta área, permite perceber que as práticas

dominantes assentam ainda numa perspetiva tradicional de avaliação, onde o juízo avaliativo, sobre o desempenho do aluno, é o elemento central.

Provavelmente influenciadas pelas opiniões acima explicitadas, desenvolvemos um trabalho de investigação, com professores de Matemática A, sobre a sua prática avaliativa, valorizando as funções formativa e sumativa da avaliação. Mais concretamente, em contexto colaborativo, criámos um espaço de reflexão sobre a prática avaliativa, privilegiando processos de avaliação reguladora, colocando o foco da ação na aplicação e avaliação de tarefas que proporcionassem o desenvolvimento da capacidade de argumentação dos alunos de Matemática A, aspeto fulcral entre os objetivos de aprendizagem matemática neste nível de ensino.

Assim, foram elaboradas as seguintes questões de investigação: (1) como perspetivam os professores, em contexto colaborativo, a argumentação matemática? (2) quais os processos matemáticos que privilegiam (explicação, justificação, formulação e validação ou refutação de conjeturas)? (3) quais as principais dificuldades que antecipam nos alunos e como preveem ajudá-los?

A argumentação matemática e práticas avaliativas

Toulmin (1993) apresenta um modelo que, estabelecendo relações entre vários elementos e as argumentações propriamente ditas, contribui para o entendimento de qual o papel da argumentação na construção do conhecimento. Este autor, através de esquema (Fig. 1), salienta todos os elementos que considera cruciais na argumentação, estabelecendo relações entre eles. Os elementos que constituem esse esquema são seis – três fundamentais ou formais e outros três opcionais – a saber: uma *Tese* (*Claim*) (5) é afirmada com base em *Dados* (*data, grounds*) (1); esse passo argumentativo é autorizado por uma *lei de passagem ou garantia (warrant)* (2), ela mesma apoiada num *suporte* (3); esse suporte é matizado pela introdução de um *Qualificador modal* (4), o qual pode ser desenvolvido numa *Refutação* (6). Assim, nesta estrutura, é proposto um padrão para análise de argumentos, a partir de elementos lógicos básicos: a *Tese*, que é a alegação cujos méritos procuramos estabelecer; os *Dados*, que são os factos aos quais recorremos como fundamentos para a alegação; e a garantia de inferência – *lei de passagem* que, por sua vez, estabelece a relação entre os dados e a tese, sendo de uma natureza hipotética e geral. Entretanto, para que o argumento seja mais completo, pode ser usado um *qualificador modal* para qualificar a conclusão, indicando uma referência explícita ao grau de força que os dados conferem à tese, em virtude da garantia da inferência. Da mesma maneira, podemos acrescentar uma *refutação* à garantia, indicando em que circunstâncias a sua autoridade não deve ser considerada, ou seja, a refutação específica em que condições a garantia não é válida para dar suporte à conclusão. Assim, a garantia de inferência é a *ponte* entre o dado e a conclusão, ou seja, ela consiste em mostrar que, tomando os dados como ponto de partida, é legítimo e apropriado passar dos dados à conclusão apresentada, sendo os qualificadores e as refutações agentes complementares dessa *ponte*. Por detrás das garantias há outros suportes, sem os quais nem as próprias garantias teriam vigência ou autoridade. Deste modo, além dos elementos já citados, podemos apoiar a garantia de inferência numa referência categórica baseada, por exemplo, numa lei, ou numa autoridade.

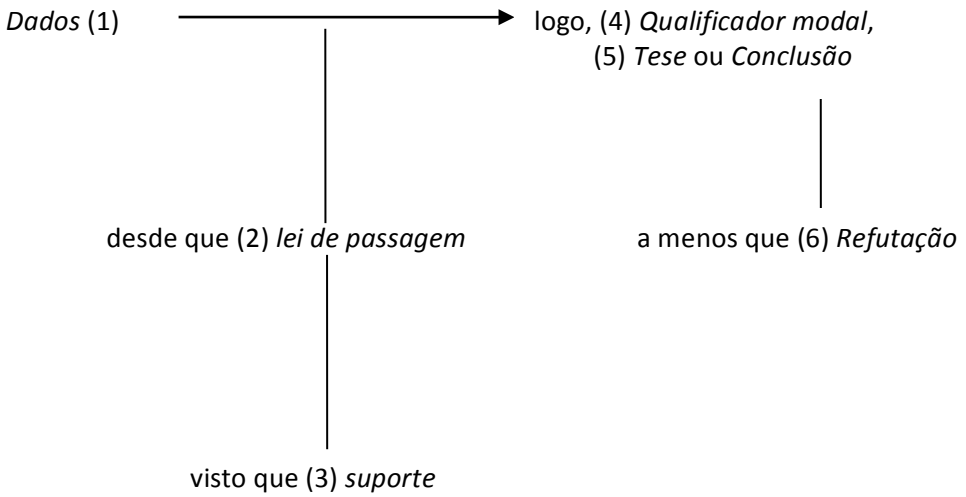


Figura 11: Padrão complexo do argumento, segundo Toulmin (1993)

Toulmin parece considerar a argumentação como uma atividade que se desenvolve a partir de uma ação, cuja validade ou valor é questionada e, como tal, exige a apresentação de elementos justificativos. O modelo de Toulmin é, consequentemente, uma ferramenta importante para a compreensão da argumentação no pensamento científico. Além de mostrar o papel das evidências na elaboração de afirmações, relacionando dados e conclusões através de justificações de caráter hipotético, também realça as limitações de uma dada teoria, bem como a sua sustentação noutras teorias. O uso de qualificadores ou de refutações envolve a capacidade de ponderar, perante diferentes teorias, e a partir das evidências apresentadas por cada uma delas. De facto, o esquema proposto por Toulmin proporciona uma ferramenta potente para analisar, a partir de uma perspetiva formal, a argumentação.

A fim de podermos proceder à análise das produções dos alunos, será, ainda, necessário clarificar o significado de mais alguns termos, nomeadamente, distinguir *explicação* de *justificação*. Ora, *explicar* é "declarar ou expor qualquer matéria, doutrina ou texto difícil com palavras muito claras para a tornar maiss percetível". (Ribas, 2003, p 151). Para Jorba *et al*. (1998), a *justificação* consiste em produzir razões ou argumentos, estabelecer relações entre eles e testar a sua aceitabilidade com a finalidade de modificar o valor epistémico de uma tese ou de um conjunto de conhecimentos no qual está incluído o objeto da tese. Consequentemente, é especialmente relevante, em termos de argumentação, o processo seguinte: (1) produzir razões ou argumentos; (2) estabelecer relações entre razões e argumentos; e (3) examinar a sua aceitabilidade em relação ao modelo teórico de referência. Na mesma linha, Duval (1999) considera que a produção de argumentos emerge da procura de resposta a perguntas do tipo *Porque afirmas que...?* ou *Porque respondes que....?*, enquanto as respostas às questões do tipo *Porque ocorre.....?* requerem, apenas, uma *explicação*.

No estudo optámos por considerar as opiniões de Balacheff (1988), isto é, enquanto que a *explicação* é um discurso, cujo objetivo é tornar inteligível o caráter de verdade, adquirido pelo locutor, duma proposição ou dum resultado, fazendo, frequentemente, apelo à intuição, a *justificação* é a exposição das razões que legitimam determinada atuação, comportamento ou acontecimento.

Também "*raciocínio matemático*" é uma expressão "polissémica" (Sreen, 1999, citado por Pinto & Santos, 2009, p. 56), pelo que foi necessário precisar o seu significado. Assim, no estudo, optámos por considerar *raciocínio matemático* como "toda a atividade que permite formular e validar conjeturas, e desenvolver argumentos matemáticos." (Pinto & Santos, 2009,

p. 56). Consequentemente, nesta perspetiva, tal como afirma Cuoco (2003), o raciocínio matemático envolve mais do que a compreensão de ideias matemáticas e a aplicação de métodos e procedimentos eficientes, é muito mais exigente, pois encontra-se associado a diversas formas de pensamento: (1) prever resultados, essencial para a formulação de conjecturas; (2) criticar soluções, mesmo as corretas; (3) procurar padrões ou generalidades; (4) analisar; (5) sintetizar, etc.

Neste trabalho, estávamos particularmente interessados em analisar e avaliar, em contexto matemático, as produções dos alunos, quando realizavam tarefas que envolvem a argumentação "substancial", à semelhança do estudo conduzido por Pedemonte (2007). Deste modo, procurámos ainda, no seio da equipa de trabalho, encontrar consenso sobre mais alguns conceitos a utilizar no estudo, nomeadamente, *avaliação formativa* e *avaliação sumativa*. Assim, assumimos que a principal finalidade da avaliação formativa é a regulação do processo de aprendizagem do aluno e que tal regulação se configura através da comparação entre as estratégias e os raciocínios desenvolvidos pelo aluno, aquando da realização de uma determinada tarefa. Porém, "não é qualquer dizer avaliativo que garante uma ação de natureza reguladora" (Pinto & Santos, 2006, p. 105). A avaliação formativa tem que ser intencional e pressupõe a existência de um projeto pedagógico, no qual o trabalho do professor é não só um meio de ajudar o aluno a aprender, mas, simultaneamente, de o comprometer com a sua própria aprendizagem. O que significa que

> a avaliação é planeada, integrada e vivida para que os alunos aprendam. Mas também significa que o feedback é o processo que vai permitir ao aluno ativar, entre outros, os processos cognitivos que lhe vão permitir vencer as dificuldades. E, ainda, que a autoestima e a motivação intelectual dos alunos, através desse mesmo feedback, é outro elemento essencial. (Fernandes, 2005, p.74)

Concordamos com Santos (2008), quando afirma que o processo avaliativo, regulador das aprendizagens, pode ser concretizado, na prática letiva, especificamente no trabalho quotidiano desenvolvido na sala de aula, através de diferentes atividades, nomeadamente, (1) questionamento oral, que é estabelecido entre professor/turma, professor/aluno, ou ainda, aluno/aluno; (2) escrita avaliativa ou *feedback* escrito em trabalhos produzidos pelos alunos; e (3) autoavaliação, que se configura na regulação levada a cabo pelo próprio aluno.

Metodologia

Subscrevemos uma perspetiva relativista da realidade, pelo que seguimos, no estudo, o paradigma interpretativo. Optámos pelo *design* de estudo de caso, tendo presente o objetivo do estudo e também, porque, de acordo com Patton (1990, p. 54), "os estudos de caso são particularmente úteis quando se pretende compreender determinados indivíduos, determinado problema ou uma situação particular, em grande profundidade". A nossa opção recaiu sobre dois casos: Laura e Rita (nomes fictícios), duas das três professoras que se encontravam a lecionar, durante o ano letivo 2009-2010, Matemática A no 11.º ano de escolaridade numa mesma escola. Todavia, neste texto, apresentaremos, apenas, o que diz respeito ao caso de Laura.

A opção por professores de Matemática A, do 11.º ano de escolaridade, prendeu-se com o considerarmos que neste ano de escolaridade, do ensino secundário os alunos já tiveram oportunidade de desenvolver a capacidade de comunicação escrita. Além disso, é no 11.º ano de escolaridade que os alunos estudam o discurso argumentativo, quer na disciplina de Português, quer na de Filosofia, daí poderem estar mais familiarizados com o discurso argumentativo. A escolha da escola foi orientada por um critério de conveniência, dada a fácil

acessibilidade e a recetividade facultada à investigadora. Essa escola, com cerca de 1600 alunos, está situada nos arredores do Porto.

O estudo foi desenvolvido num contexto de trabalho colaborativo que pressupõe que "os diversos intervenientes trabalham conjuntamente, não numa relação hierárquica, mas numa base de igualdade de modo a haver ajuda mútua e a atingirem objetivos que a todos beneficiem" (Boavida & Ponte, 2002, p. 46). Foram realizadas reuniões ao longo de todo o ano letivo 2009-2010. No entanto, na situação particular de elaboração das tarefas, a investigadora optou por não expressar as suas opiniões ou, quando tal não podia ser evitado, fazia-o com parcimónia, uma vez que pretendia recolher dados para responder às questões inicialmente formuladas. Consequentemente, precisava, antes de mais, de ouvir a voz das participantes no estudo.

O processo de recolha de dados teve início em setembro de 2009, tendo sido antecedido por um pedido de autorização da investigadora, dirigido ao Diretor da escola. Para instrumentos de recolha de dados foram usadas a observação (23 reuniões de trabalho conjunto - RTC - e 11 aulas para cada professora - A), a entrevista semiestruturada (uma primeira realizada no início do estudo, em setembro 2009 - E1 -, e a segunda no final final de junho de 2010 - E2) e a recolha documental (diversos documentos curriculares, nomeadamente, (1) os critérios de avaliação, elaborados pelos professores da área disciplinar e aprovados em Conselho Pedagógico; (2) a planificação de práticas avaliativas; (3) folhas de registo dos participantes, com dados relativos à avaliação dos alunos; e (4) tarefas realizadas pelos alunos e comentadas pelo professor.

A intenção de seguir o modelo interativo de análise de dados de Huberman e Miles (1994), não se configurou como uma realidade. De facto, durante todo o trabalho de campo, a recolha de dados foi dominante. A análise, por esta razão, segue um modelo não exclusivamente interativo, mas também não sequencial.

Efetivamente, após a primeira fase da recolha de dados, a análise ganhou profundidade. Elaborámos, para cada uma das reuniões, um relatório pormenorizado que pretendia articular as informações obtidas nas primeiras leituras das transcrições das gravações áudio com as notas de campo resultantes da observação das reuniões. Simultaneamente, fomos analisando esses relatos e procedemos a uma análise mais fina dos registos, focando a atenção nos processos matemáticos valorizados por cada uma das participantes na conceção das tarefas, nas dificuldades esperadas, igualmente por cada participante, aquando da implementação, na sala de aula, da tarefa que estava a ser concebida e nas estratégias delineadas para a superação de tais dificuldades previstas.

À análise das transcrições das gravações áudio das reuniões seguiu-se, com procedimento semelhante, a análise dos registos de observação das aulas, das transcrições relativas às entrevistas e da análise dos documentos.

Laura: um caso

Laura tem pouco menos de 50 anos de idade, é casada e tem um filho. Tem um ar sereno, não é muito extrovertida, mas simpática, apesar de revelar alguma timidez. Usa roupa muito discreta e informal, mas, quando chega à escola, veste, de imediato, uma bata branca, que só despe quando acaba as aulas. Trata-se de uma peculiaridade, que, atualmente, já não é muito comum na nossa realidade.

Diz ter tido sempre uma boa relação com a Matemática. Enquanto aluna do ensino não superior, a sua relação com a Matemática foi, como refere, "excelente. Sempre gostei muito

[de Matemática]!" (E1). No entanto, na faculdade, o seu trajeto académico não foi linear, houve algumas interrupções, pelas quais ainda hoje parece culpabilizar-se.

Laura desde sempre soube que queria ser professora, mas a opção pela área de Matemática, segundo a sua opinião, foi da responsabilidade de uma das suas professoras daquela disciplina. Profissionalmente, Laura gosta do que faz e o que considera mais gratificante é a relação afetiva que estabelece com os alunos, como afirma:

> a relação humana que se cria com os alunos, a afetividade e o gosto de se saber que o que se ensina fica e que os alunos não se esquecem de nós. As nossas experiências, não é?! (E1)

Mas, considera que ser professora de Matemática exige, sobretudo, uma intervenção cuidada no desenvolvimento do gosto dos alunos pela Matemática:

> Eu acho que a maior dificuldade que eu sinto com os alunos é fazer-lhes notar que estão errados quando não querem aprender Matemática. Essa é a minha maior dificuldade. De resto, o que eu sinto que é mais motivante, é de facto, fazer com que eles aprendam a gostar da disciplina e que não são incapazes, porque muitos sentem ou acham, que são incapazes de aprender Matemática. (E1)

Parece possível inferir que Laura gosta da profissão e que privilegia o desenvolvimento, nos alunos, do gosto pela Matemática.

Argumentação matemática: perspetiva de Laura

Em contexto colaborativo foram concebidas sete tarefas - aplicadas ao longo do ano, envolvendo diferentes tópicos matemáticos - dirigidas ao desenvolvimento, nos alunos, da capacidade da argumentação matemática. Tal conceção foi, obviamente, iniciada com a definição dos objetivos e dos critérios de sucesso. Este trabalho originou, frequentemente, bastante discussão.

Laura, desde o início, parece considerar que a principal função da argumentação é a justificação. De facto, durante a análise do texto"Argumentação e Demonstração no Contexto da Formação Inicial de Professores" (Fernandes & Fonseca, 2004), Laura parece revelar alguma relutância em concordar com a existência de outros processos matemáticos envolvidos na argumentação, para além da justificação:

> Na argumentação não nos limitamos a justificar, também podemos incluir a formulação e a validação de conjeturas... Nunca tive consciência de que [a argumentação] desempenhasse outro papel para além do da justificação. Quando eu digo a um aluno para ele ... por exemplo, quando digo fulano disse ... qualquer coisa e outro aluno disse (pausa) outra coisa qualquer, que até pode ser o contrário do que disse o outro, ... o primeiro, depois pergunto quem tem razão e peço para argumentar de forma convincente. O que lhes estou a pedir é que expliquem cada uma das afirmações, arranjando argumentos que convençam quem vai ouvir ou ler as respostas de cada um deles, ... (pausa) e essa pessoa tem de perceber por que é que é esse o que está certo, o que tem razão... Não é? Isto é pedir para eles justificarem as opiniões e que os convençam. Não é? (RTC, 7 de outubro)

Após a análise do excerto do texto "Argumentação em Matemática" (Boavida *et al*., 2008, pp. 83-84), Laura considera a sua opinião legitimada e afirma

> Pois, eu também acho que a justificação tem de estar presente na argumentação, como está no texto [fala visivelmente satisfeita], continuo a achar que a tentativa de justificar, a partir do que se acredita ser verdadeiro, para mim, deve ser o principal... (RTC, 7 de outubro)

Laura, apesar de considerar que a justificação tem de estar presente na argumentação, assume que, quando a argumentação, na aula de Matemática, se produz na forma oral, acarreta, para o professor, uma grande complexidade na gestão da aula:

> Acho que é ..., que é muito difícil, se não impossível ... (pausa) gerir aquela diversidade toda [orquestração da discussão na sala de aula] dentro da turma... (pausa) eles às vezes explicam muito bem uns aos outros, ... , mas, outras vezes é necessário corrigi-los com alguma frequência. É muito difícil ouvir todos... Eu prefiro a escrita, dá-nos, a nós [professores] e até a eles, muito mais possibilidade de interpretar o que escrevem... Podemos ler e reler para ver se as nossas interpretações estão corretas e eles também podem corrigir o que escreveram se pararem para pensar... (RTC, 7 de outubro)

Após alguma discussão acerca desta opinião de Laura, ficou decidido que se iria privilegiar a escrita nas tarefas dirigidas à argumentação.

Acrescente-se que a ideia de desenvolver, na forma escrita, a argumentação matemática parece ter sido um objetivo bastante adequado aos alunos da turma onde foram aplicadas as tarefas. De facto, na primeira aula observada, pudemos constatar que mesmo alguns dos alunos com nível muito bom de aproveitamento, quer em Português, quer em Matemática A, não reagiam muito bem ao facto de ter de explicitar, por escrito, os seus raciocínios, o que pode ser evidenciado pelo diálogo entre um aluno e Laura:

> 1. Laura – Atenção! Pedro, não quero só cálculos. Quero poder seguir os seus raciocínios, estamos entendidos?
>
> 2. Pedro – Mas nós não estamos em Português...
>
> 3. Laura – Sim, mas a nossa língua, aquela em que comunicamos, é o português, não é?
>
> 4. Pedro – Pois, mas a stora já sabe que eu não gosto de escrever...
>
> 5. Laura – Aprende a gostar. Como é que aprendemos, não é fazendo? (A, 26 de outubro)

Porém, mais tarde, numa reflexão, o mesmo aluno registou:

> Nunca tinha escrito tanto em Matemática! Às vezes até parece que estou numa aula de Filosofia... Mas, acho que é como a stora me disse: só se aprende a fazer as coisas, fazendo. Eu agora até acho que se estiver a pensar e conseguir registar ao mesmo tempo aquilo que estou a pensar, tenho mais hipóteses de ver o que está menos correto. Aprendi a gostar destas tarefas! (Registo de Pedro a 17 de março)

Além disso, Laura informa que, no final do ano letivo 2009-2010, na avaliação do PCT ficou registado:

> as tarefas realizadas em Matemática A, dirigidas, essencialmente, ao desenvolvimento da argumentação matemática e com recurso a feedback escrito, parecem ter sido um contributo eficaz para o desenvolvimento da competência escrita de uma boa parte dos alunos desta turma (E2)

Dificuldades expetáveis e como se prevê ajudar os alunos a ultrapassá-las

Laura, em contexto colaborativo, diagnosticou diferentes tipos de dificuldades com que os alunos se poderiam debater aquando da realização das tarefas dirigidas à argumentação matemática.

Logo na planificação da primeira tarefa, retirada do manual XEQUEMAT para o 11.º ano,

> Desenha um hexágono regular inscrito numa circunferência. Tendo em atenção a definição de radiano e o facto do lado do hexágono ser igual ao raio da circunferência,

> justifica a afirmação: «Um ângulo de amplitude um radiano mede um pouco menos de 60º». Apresenta os teus argumentos por escrito e de forma convincente.

Laura, apesar de se mostrar confiante no sucesso do desempenho dos alunos e após a análise do texto "Argumentação em Matemática" (Boavida *et al*., 2008, pp. 82-84), onde são salientados os elementos que Toulmin (1993) considera cruciais na argumentação, afirmou que os alunos não iriam revelar grandes dificuldades em encontrar *a lei de passagem*, desde que fossem capazes de selecionar os dados e a tese:

> Como eles fizeram aquela tarefa do manual, [tarefa que permite visualizar a definição de radiano], acho que são capazes de ver este percurso argumentativo,.... de ver facilmente que o comprimento do arco com 60º [de amplitude] é maior do que o que tem só um radiano. Assim, acho que se partirem da definição de radiano, o dado, não vão ter grandes problemas em chegar à conclusão. (RTC, 14 de outubro)

Porém, aquando da análise das produções dos alunos, Laura toma consciência de que alguns alunos, apesar de terem adquirido o conceito de radiano não o conseguiram aplicar para justificar a relação entre o radiano e o comprimento do arco de 60º de amplitude, como se pode inferir da produção seguinte:

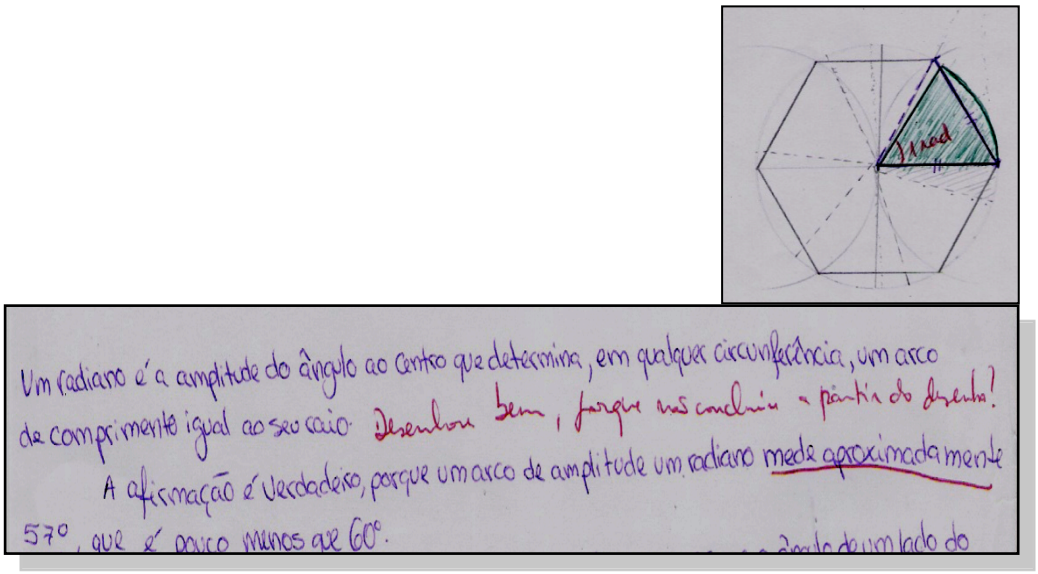


Figura 2: Produção de um aluno a respeito da tarefa 1

Um outro tipo de dificuldade prevista relaciona-se com o desconhecimento ou incompreensão relativa aos tópicos matemáticos envolvidos. Por exemplo, durante a fase de conceção da tarefa 2, Laura refere a possibilidade de os alunos revelarem dificuldade interpretação do enunciado derivada de falta de conhecimento e afirma:

> Se [os alunos] não conseguirem visualizar o trapézio, não irão conseguir resolver a questão [escrever a expressão da área de um polígono, tendo em conta que a sua área pode ser determinada através da diferença entre a de um trapézio e a de um triângulo]! Se não conseguirem, e eu der conta na aula, posso tentar, sem lhes dar a resposta, dar-lhes pistas para eles o [trapézio] verem. Se não der conta na aula, poderei remediar a situação quando der feedback escrito. Eu espero que, assim, eles consigam melhorar as produções... (RTC, 25 de novembro)

No quadro 1 podemos ver as diferentes dificuldades esperadas por Laura e as estratégias que foram delineadas para que os alunos as pudessem vir a ultrapassar.

Quadro 1: Dificuldades esperadas por Laura e estratégias delineadas

Estratégias delineadas	Dificuldades esperadas (categorias)				
	interpretação do enunciado	identificação dos dados e da tese	descoberta da lei de passagem	competência escrita	tópicos matemáticos
recurso ao *feedback* oral	**tarefas 1, 2, 3. 4 e 6**	**tarefas 1, 2 e 3**		**tarefas 1 e 2**	**tarefa 1** (conceito de radiano) **tarefa 2** (identificação, na figura, do trapézio)
recurso ao *feedback* escrito	**tarefas 1, 2, 3. 4 e 6**	**tarefas 1, 2, 3. 4 e 6**	**tarefas 1, 2, 3. 4 e 6**	**tarefas 1, 2, 3. 4 e 6**	**tarefas 1, 2, 3, 4 e 6** (todos os abordados)
ficha de reflexão	**tarefas 4, 5 e 6**	**tarefas 3 e 6**	**tarefas 4, 5 e 6**	**tarefas 4, 5 e 6**	**tarefas 4, 5 e 6**
partilha, com os alunos, dos critérios de sucesso	**tarefa 3, 4 e 6**	**tarefa 3 e 6**	**tarefa 4**	**tarefa 3, 4 e 6**	**tarefa 3** (ângulo de dois vetores e equivalência de radicais).
planificação da segunda fase da tarefa	**tarefa 6**	**tarefas 1, 2 e 3**	**tarefa 2**	**tarefas 4 e 6**	
planificação da aula promotora da autorregula-ção	**tarefas 4 e 6**			**tarefas 4 e 6**	**tarefas 4, 5 e 6**
trabalho sistemático	**tarefa 6**		**tarefa 6**	**tarefas 1 e 2**	manipulação algébrica de expressões racionais.

Analisando o quadro 1, parece possível concluir que para além das dificuldades esperadas por Laura, relativas à falta de domínio, quer da língua materna, quer dos tópicos matemáticos presentes nas tarefas, emerge um outro tipo que é respeitante à argumentação: *identificação dos dados e da tese* e *a descoberta da lei de passagem*. Já no que diz respeito às estratégias delineadas, para os alunos poderem vir a ultrapassar tais dificuldades, é curioso verificar que Laura não considera, apenas, a *planificação da aula promotora da autorregulação*. Quando questionada sobre a razão de ser desta constatação, Laura afirmou "eu tomei esta decisão

conscientemente (pausa) é que o meu objetivo foi sempre... que eles optássem por analisar e descobrir [os dados, a tese e a lei de passagem num percurso argumentativo] e, portanto, tinham de o fazer sem a ajuda dos colegas, apenas podiam contar com eles próprios ou comigo. Por isso, é que só considerei as outras [estratégias]." (E2).

Se atendermos a todas as estratégias delineadas, patentes no quadro 1, parece possível inferir que o recurso ao *feedback* escrito é recorrente. Na opinião de Laura, "o *feedback* escrito dado às produções dos alunos permitiu conhecer melhor as suas dificuldades e, para alguns, levou-os a autocorrigir os seus erros, melhorando as aprendizagens no que diz respeito à argumentação matemática." (E2). No entanto, no início, a aposta no *feedback*, quer oral, quer escrito, não estava a surtir o efeito pretendido, pelo que, após a análise das produções dos alunos na segunda fase da tarefa 2, a equipa, por consenso, decide que seria necessário dar aos alunos uma ficha de reflexão para os tentar implicar na sua autoavaliação e, também, para os tentar consciencializar das suas dificuldades, nomeadamente, na interpretação dos enunciados. Também a opção pela *planificação da aula promotora da autorregulação*, aquando da análise das produções dos alunos relativas à tarefa 4, foi, segundo Laura, um valioso contributo para os próprios alunos serem capazes de ultrapassar as suas próprias dificuldades, como pode ser inferido da fala seguinte: "as estratégias implementadas... (pausa) que definimos na reunião [realizada a 24 fevereiro] deram bons resultados. É que muitos dos alunos só tomaram consciência dos erros cometidos, depois de terem ouvido os colegas a explicar as suas resoluções. Fiquei agradavelmente surpreendida!" (RTC, 26 de maio)

Já a respeito da superação das dificuldades que se prendiam com o domínio da competência escrita, Laura parece considerar que, na generalidade dos seus alunos, as estratégias propostas começaram a produziram os efeitos desejados a partir da realização da segunda fase da tarefa 2. Esta constatação de Laura pode ser inferida quando refere "Acho que se começava a ver o efeito ... da ficha de reflexão e ... do *feedback* que lhes temos dado ... (pausa), começava a dar resultado". (RTC, 5 maio)

Conclusões

Laura privilegia o desenvolvimento, nos alunos, da capacidade *de raciocinar matematicamente* (Ponte *et al.*, 2007), independentemente do tópico matemático que se esteja a estudar. Em particular, Laura parece entender que a argumentação deve ser perspetivada como a expressão de um raciocínio possível, uma tentativa de justificar enunciados, a partir do que se acredita como verdadeiro, mas privilegiando, sempre, a forma escrita. Deste modo, valoriza a *justificação* na conceção das tarefas dirigidas à argumentação, implementa diversas estratégias, delinedas em contexto colaborativo, as quais são coerentes com as suas práticas avaliativas. De facto, Laura parece não dissociar a aprendizagem da avaliação (Santos, 2008) e coloca intencionalidade reguladora, aquando da discussão, no grupo, das estratégias a usar para que os alunos possam tomar consciência das suas dificuldades, quer as já esperadas, quer as que emergem durante a realização das tarefas, facultando, assim, a sua remediação. Um dos aspetos positivos reconhecido, também pelos outros professores da turma, foi o desenvolvimento, nos alunos, da competência comunicativa escrita.

Referências

Barreira, C. & Pinto, J. (2005). A investigação em Portugal sobre a avaliação das aprendizagens dos alunos (1990-2005). *Investigar em Educação, 4*, 21-105.

Boavida, A.; Paiva, A.; Cebola, G.; Vale, I. & Pimentel, T. (2008). *A experiência matemática no ensino básico. Programa de formação contínua em matemática para professores dos 1.º e 2.º ciclos.* Lisboa: Ministério da Educação - DGIDC.

Boavida, A. & Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Ed.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 43-55). Lisboa: APM.

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège*. Thèse d'état. Grenoble: Université Joseph Fourier.

Cuoco, A. (2003). Mathematical habits of mind. In H. Schoen (Ed.), *Teaching mathematics through problem solving: grades 6-12* (pp. 27-37). Reston, VA: NCTM.

Duval, R. (1999). *L'Argumentation en question*. Acedido em 12 agosto de 2009 de http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Newsletter/991112Theme/991112ThemeES.html

Fernandes, D. & Fonseca, L. (2004). A argumentação e demonstração no contexto da formação inicial de professores. In A. Borralho, C. Monteiro & R. Espadeiro (Eds.), *A Matemática na formação do professor*. (pp. 249-272). Lisboa: SEM-SPCE.

Fernandes, D. (2005). *Avaliação das Aprendizagens: Desafios às Teorias, Práticas e Políticas*. Cacém: Texto Editores.

Huberman, M., & Miles, M. (1994). Data management e analysis methods. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 428-444). London: Sage.

Jorba, J.; Gómez,I.; Prat, A. (1998). *Parlar i escriure per aprendre. Ús de la llengua en situació d'ensenyament-aprenentatge de les arees curriculars.* Bellaterra: ICE UAB.

Patton, M. Q. (1990). *Qualitative Evaluation and Research Methods*. E.U.A.: Sage Publications.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship Between Argumentation and Proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*. *66* (1), 23-41.

Pinto, J. & Santos, L. (2006). *Modelos de avaliação das aprendizagens*. Lisboa: Universidade Aberta.

Pinto, J. & Santos, L. (2009). Autoavaliação Regulada em Matemática: Dizer antes de Fazer. *Bolema*, *33*, 51-68.

Ponte, J. P.; Serrazina, L.; Guimarães, H.; Breda, A.; Guimarães, F.; Sousa, H.; Menezes, L.; Martins, M. E.; e Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC.

Ribas, N. (2003). Exposar: relacionar les idees entre sí. In N. Sanmartí (Coord.), *Aprendre Ciències: tot aprenent a escriure ciència* (pp.149-168). Barcelona: Edicions 62.

Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In L. Menezes; L. Santos; C. Rodrigues (Orgs.), *Avaliação em matemática. Problemas e desafios* (pp. 11-35). Viseu: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Toulmin, S. (1993). *Les usages de l' argumentation*. Paris: P.U.F.

UM NOVO-VELHO DESAFIO: DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS À CRIATIVIDADE EM MATEMÁTICA

Isabel Vale
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo
isabel.vale@ese.ipvc.pt

Teresa Pimentel
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo
teresapimentel@ese.ipvc.pt

Resumo: Desde os anos 80 do século XX que a resolução de problemas desempenhou um papel importante como eixo organizador do currículo da matemática, tendo, sobretudo nos anos 90, sido realizados diversos estudos, grandemente de natureza académica. Contudo, não teve o impacto esperado no currículo e nas práticas dos professores. Recentemente, é revisitada pelo Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), que volta a dar-lhe maior visibilidade. Neste documento, é defendida como uma capacidade transversal a desenvolver pelos alunos ao longo do ensino básico, a par da comunicação e do raciocínio. A aprendizagem matemática dos alunos deve incluir mais do que tarefas rotineiras, devendo ser enriquecida com outras, matematicamente desafiantes, como as de resolução de problemas. Estas revestem-se de extrema importância, não só para os alunos como para os professores, sobretudo se forem tarefas que conduzam à compreensão de conceitos matemáticos estruturantes e que estimulem a fluência, a flexibilidade e a originalidade como componentes essenciais do pensamento criativo. Com base nestes pressupostos desenvolveu-se um estudo exploratório, ainda em curso, no âmbito da formação inicial, do qual se apresentam alguns resultados preliminares, onde se analisa de que modo uma proposta didática baseada na resolução de tarefas desafiantes contribui para o desenvolvimento do pensamento criativo. Os resultados já obtidos apontam no sentido de que os futuros professores recorrem a diferentes representações na resolução das tarefas propostas, evidenciando algumas capacidades de natureza criativa.

Palavras chave: Resolução e Formulação de problemas, Criatividade, Tarefas, Formação Inicial, Educação Básica

Introdução

A literacia matemática dos alunos é, usualmente, determinada pelo modo como usam os conhecimentos, as capacidades e as atitudes na resolução de problemas. Assim, é necessário propor-lhes experiências diversificadas que permitam desenvolver as suas capacidades de resolução de problemas, de modo a poderem tirar partido da Matemática ao longo da vida. Não se pode conceber a Matemática sem conceitos, definições, axiomas, teoremas, demonstrações, algoritmos ou fórmulas. São partes integrantes desta ciência. Contudo, os problemas — a sua formulação e resolução — são a essência da Matemática.

Os estudos sobre resolução de problemas têm revelado a sua complexidade e, apesar de já haver um corpo de conhecimento substancial, temos de revisitar e atualizar as nossas perspetivas sobre o ensino e a aprendizagem da resolução de problemas e sobre como chegar ao conteúdo matemático de modo mais eficaz. A investigação tem mostrado que a resolução e a formulação de problemas em matemática estão intimamente relacionadas com a criatividade (e.g. Silver, 1997). A formulação de problemas tem sido uma componente da aula

de matemática bastante negligenciada, mas essencial na aprendizagem matemática. Por outro lado, aprender a resolver problemas da vida real tem-se revelado uma tarefa mais difícil do que resolver os tradicionais problemas-tipo das aulas e dos livros de texto. A inovação e a criatividade desempenham um papel importante neste contexto, sendo uma característica dinâmica que os alunos devem desenvolver; para isso, os professores devem proporcionar-lhes condições adequadas. Assim, ambientes de aprendizagem onde sejam dadas oportunidades aos alunos para resolver problemas de matemática utilizando estratégias de resolução diversificadas e para formular os seus próprios problemas a partir de situações que lhes sejam apresentadas, seja em contextos matemáticos ou não matemáticos, pode envolvê-los em explorações matematicamente ricas, aumentar a sua motivação e encorajá-los a investigar, tomar decisões, generalizar, procurar padrões e conexões, comunicar, discutir ideias e identificar alternativas.

Neste artigo, antes de apresentarmos alguns resultados do estudo efetuado com alunos da formação inicial de professores baseado numa proposta didática que recorre a tarefas desafiantes de formulação e resolução de problemas, faremos uma breve incursão sobre aspetos cruciais deste trabalho - as tarefas na aula de matemática e a relação da resolução e formulação de problemas com a criatividade.

As tarefas matemáticas em educação matemática

Uma questão que devemos ter presente como educadores matemáticos é o que significa aprender matemática. Para aprender matemática é necessário compreender conceitos matemáticos, estratégias e procedimentos e utilizá-los para resolver uma diversidade de problemas. Deste modo, muita da investigação é orientada para desenvolver capacidades de resolução de problemas nos estudantes desde muito cedo. A perspetiva sobre a resolução de problemas de forma prescritiva reduzindo-se ao ensino de estratégias revelou-se insuficiente. Têm de se procurar outras alternativas. Não se pretende preparar os estudantes para serem matemáticos, mas para aprender a ser como um matemático - envolver-se com o conhecimento matemático noutra perspetiva, participar no processo de invenção e descoberta, no refinamento dos métodos e das formas de representação, colaborar, duvidar, criticar e ser persistente a resolver problemas. Nesta ordem de ideias, Ponte (2007) sugere um ensino e aprendizagem exploratório em que o professor promove condições para que o aluno descubra e construa o seu próprio conhecimento, de uma forma não pontual mas continuada na aprendizagem da matemática.

Uma tarefa matemática, de acordo com Smith e Stein (2011), é um segmento da atividade da sala de aula dedicada ao desenvolvimento de uma ideia matemática específica. Para estas autoras, as tarefas têm uma duração bem definida e estão na base da aprendizagem dos alunos, exigindo que estes pensem conceptualmente e estejam motivados para fazer conexões, o que, ao longo do tempo, irá conduzir ao desenvolvimento de ideias implícitas sobre a natureza da matemática. Diferentes tarefas com diferentes níveis de exigência cognitiva induzem diferentes modos de aprendizagem. Consequentemente há tarefas de exigência cognitiva elevada ou reduzida conforme dão mais ou menos oportunidades aos alunos de se envolverem em processos complexos de pensamento. Tarefas de nível elevado devem ser utilizadas em detrimento de tarefas de nível reduzido, pois estas implicam a realização de muitos passos semelhantes, tornando-se um trabalho rotineiro, com evidente uso excessivo da memorização. As autoras referem ainda que dar aos alunos demasiado apoio ou direção pode resultar num decréscimo na exigência cognitiva das tarefas. Deste modo, a natureza das tarefas condiciona as aprendizagens que se produzem em sala de aula. Assim, podemos ter tarefas para aprender – as que o professor usa para ensinar um novo conceito ou

capacidade; tarefas para rever – as que o professor usa para rever conceitos ou capacidades já adquiridos de modo a facilitar a aprendizagem de novos conceitos ou capacidades; tarefas para praticar – as que o professor usa durante as aulas para clarificar um conceito ou demonstrar uma capacidade e que propõe que os alunos trabalhem individualmente ou em grupos, durante o tempo de aula ou fora dela; tarefas para avaliar – as que o professor usa para avaliar o desempenho dos alunos; etc. Ainda podemos classificar as tarefas como sendo de natureza fechada ou aberta, incluindo-se nestas as investigações (e.g. Ponte, 2007), as que exploram formulação de problemas (e.g. Silver, 1997) e os problemas abertos (e.g. Pehkonen, 2003). Uma tarefa é considerada boa quando serve para introduzir ideias matemáticas fundamentais, constitui um desafio intelectual para os alunos e permite diferentes abordagens (NCTM, 2000). As tarefas propostas devem permitir ao aluno definir estratégias, argumentar soluções e promover a comunicação matemática, terminando com uma síntese das principais ideias apreendidas, sendo este um trabalho realizado pelos alunos, em conjunto com o professor.

A aprendizagem matemática durante uma aula de matemática depende grandemente do professor e das tarefas que se propõem aos estudantes. Apresentamos em seguida um conjunto de caraterísticas que defendemos deverem estar presentes nestes domínios.

Os professores e a aula de matemática

Muitas das fragilidades existentes com as aprendizagens matemáticas dos estudantes devem-se, por um lado, às conceções e atitudes dos professores que influenciam as suas ações na sala de aula e as suas interações com os alunos, e, por outro lado, às lacunas que apresentam no conhecimento matemático e didático e à falta de estratégias inovadoras e alternativas de ensino. Numa época de inovação curricular, em que há necessidade de interpretar e implementar um novo programa de matemática, este pode ficar seriamente comprometido pelos fatores referidos se não for dada uma atenção especial à formação de professores. Esta formação deve, em particular, proporcionar experiências que permitam aos professores adquirir um conhecimento profundo da matemática a ensinar (e.g. Pimentel, 2010; Vale, 2009).

A investigação mais recente em educação matemática tem mostrado que a aula de matemática depende sobretudo da ênfase em tarefas matematicamente ricas, em particular as de natureza exploratória e investigativa, que permitem gerar fortes interações de aprendizagem. Podemos dizer que as tarefas que o professor seleciona para as suas aulas são determinantes para caracterizar o trabalho que desenvolve. No entanto, a escolha criteriosa das tarefas é necessária mas não suficiente. A orientação do questionamento de modo a provocar o debate de ideias e a reflexão é crucial para a aprendizagem dos alunos. Este só surge adequadamente se o professor tiver um conhecimento sólido da matéria a ensinar, como ensinar e quando ensinar (Vale, 2009).

Assim, sendo os professores os principais agentes de mudança, é importante que desenvolvam determinado tipo de capacidades, nomeadamente criativas, baseadas em conhecimentos matemáticos e didáticos sólidos, que lhes permitam construir ou adaptar e explorar boas tarefas matemáticas para a sala de aula. Devem ser criativos nas tarefas que propõem para desenvolver, por seu turno, o pensamento criativo dos alunos e motivá-los para a aprendizagem, mas também devem ser matematicamente competentes para analisar as resoluções dos seus alunos. É pois imprescindível que os professores possam explorar todo o potencial instrucional contido na tarefa, e, para isso, é necessário que tenham oportunidades de as explorar e resolver do mesmo modo que se pretende que venham a explorá-las com os seus alunos.

No trabalho que temos desenvolvido temos dado uma atenção especial a tarefas que recorram a representações visuais/figurativas pela importância que têm em toda a atividade matemática. Podemos pensar numa representação como uma forma de interpretar, comunicar e discutir uma ideia com os outros, podendo adquirir formas diversificadas como analogias, desenhos ou manipuláveis. Vários autores têm estudado a importância das representações na atividade matemática e procurando identificar diferentes representações que ocorrem durante a aprendizagem matemática e a resolução de problemas (e.g. Tripathi, 2008). Uma representação deverá incluir as seguintes componentes: concretas, verbais, numéricas, gráficas, contextuais, pictóricas ou simbólicas que descrevam aspetos de um conceito. A opção por cada um dos tipos de representação na resolução de um problema vai depender de vários fatores relacionados com a natureza das tarefas, com o nível cognitivo e formas pensamento de quem resolve a tarefa e com as características da própria representação. No entanto, a investigação tem proporcionado um conjunto de evidências sobre os benefícios da utilização de múltiplas representações no ensino e aprendizagem da matemática, sobretudo de modo a permitir um uso flexível (do conceito) na resolução de problemas.

Parece ser amplamente aceite a importância da visualização na aprendizagem e em fazer matemática (e.g. Stylianou & Silver, 2004). Esta importância vem do facto de que a visualização não está relacionada somente com a mera ilustração mas também é reconhecida como uma componente do raciocínio, profundamente envolvida com o conceptual e não só com o percetual, da resolução de problemas e mesmo da prova. A visualização pode desempenhar um papel central ao serviço da resolução de problemas para ajudar a encontrar uma solução mais geral, para além de uma meramente procedimental. Pólya (2003) chama a atenção para a importância da intuição visual ao considerar uma das suas estratégias de resolução de problemas "fazer um desenho". Os estudantes sem esta capacidade visual terão grande dificuldade em ter sucesso na aprendizagem. Rivera e Becker (2005) referem que as crianças e os jovens adultos são conhecidos por possuírem um forte conhecimento visual de ideias e conceitos matemáticos. "Ver" é uma componente importante da generalização que os jovens estudantes devem explorar. Assim, o ensino tem de recorrer a tarefas desafiantes que enfatizem a compreensão da generalização através dos seus aspetos não só numéricos mas também figurativos, capitalizando esta capacidade inata nos alunos de pensar visualmente. Estes só podem desenvolver esta capacidade através de experiências em situações que requeiram tal pensamento (e.g. Stylianou e Silver, 2004; Tripathi, 2008).

Criatividade, Resolução e Formulação de Problemas

Fazer matemática envolve descoberta, sendo conjeturar uma das fases dessa descoberta. A criatividade desempenha um papel importante neste contexto, sendo uma característica dinâmica que os alunos devem desenvolver; para isso, os professores devem proporcionar-lhes oportunidades de aprendizagem adequadas. Em todas as áreas do conhecimento a necessidade de ter pessoas criativas, capazes de oferecer soluções inovadoras para os problemas, tem vindo a ser cada vez mais defendida, e deste modo a criatividade é uma capacidade transversal a todas as áreas de conhecimento.

Segundo Lev-Zamir e Leiken (2011) podemos distinguir entre criatividade absoluta e relativa. A criatividade absoluta está associada aos trabalhos históricos dos grandes matemáticos que envolvem descobertas a nível global (e.g. Fermat, Hilbert), enquanto que a criatividade relativa se refere a descobertas feitas por determinada pessoa enquanto elemento de um determinado grupo. Este tipo de criatividade será aquela que resulta da imaginação de um individuo e que produz algo de novo para essa pessoa. Deste modo, quando se fala em

criatividade na aula de matemática estamos a falar de criatividade relativa. De acordo com Liljedahl e Sriraman (2006) considera-se indicador de criatividade a nível escolar a capacidade de os alunos apresentarem novos *insights* e/ou soluções em matemática. Definir criatividade matemática é uma tarefa bastante complexa. Pode afirmar-se que começa com a curiosidade e envolve os estudantes na exploração e experimentação suscitando a sua imaginação e originalidade (DFES, 2000), sendo normalmente usada para se referir à capacidade de produzir novas ideias, abordagens ou ações. Mann (2006), numa revisão da literatura sobre criatividade em matemática, defende que não há uma definição única globalmente aceite para a criatividade matemática uma vez que existem inúmeras maneiras de expressá-la. Mas podemos notar que existem alguns pontos em comum nas diferentes tentativas para a definir: (1) envolve o pensamento divergente; (2) tem principalmente três componentes/dimensões que são fluência, flexibilidade e originalidade (novidade); e (3) está relacionada com a resolução e formulação de problemas (incluindo elaboração e generalização) (Vale *et al*., no prelo).

(1) O pensamento divergente e o convergente são dois aspetos importantes da inteligência, da resolução de problemas e do pensamento crítico. O pensamento convergente é uma forma de pensar orientada para obter uma única resposta a uma situação. Espera-se que o resolvedor mobilize todo o conhecimento disponível a partir de uma variedade de fontes que lhe permita interpretar e resolver o problema, de forma a produzir a resposta "correta". Geralmente envolve um processo de pensamento que segue um conjunto de regras de acordo com a lógica, enquanto o pensamento divergente olha para o problema, analisando todas as possibilidades e procurando o melhor caminho para chegar à melhor solução para o problema. É neste tipo de pensamento que o resolvedor se envolve numa elaboração criativa de ideias provocadas por determinado estímulo. É o oposto do pensamento convergente, sendo um processo criativo que envolve imaginar o maior número possível de soluções; é geralmente mais espontâneo e flui livremente.

(2) A criatividade possui três dimensões: *fluência, flexibilidade* e *originalidade,* que representam três das componentes envolvidas na resolução de problemas abertos. A *fluência* é a capacidade de produzir ideias em resposta a um incitamento. Esta capacidade adquire-se tentando conseguir o maior número de ideias diferentes e fora do comum e desenvolve-se praticando fazendo muitos e variados problemas. A *flexibilidade* é a capacidade para pensar de modos diferentes. Está associada ao modo como mudamos de ideias ou estratégias quando resolvemos um problema para encontrar várias soluções ou para optar pela solução ótima. A flexibilidade não é só importante para criar, mas sobretudo para a compreensão dos conceitos. E a *originalidade* é a capacidade de pensar de forma única, produzindo ideias novas e diferentes. Pode manifestar-se quando um aluno analisa várias resoluções, métodos e respostas para um problema e consegue criar outra que seja diferente.

(3) As tarefas que podem promover as dimensões acima referidas devem ser sobretudo abertas e mal estruturadas, assumindo a forma de resolução de problemas, formulação de problemas, explorações matemáticas e investigações. Ou seja, o que Leiken e Lev (2007) referem como sendo tarefas com múltiplas soluções. A par da resolução de problemas, a formulação de problemas é uma atividade de importância inquestionável numa aula de matemática, pois contribui não só para o aprofundamento dos conceitos matemáticos envolvidos, mas também para a compreensão dos processos suscitados pela sua resolução. Encorajar os alunos a criar, a partilhar e a resolver os seus próprios problemas é um contexto de aprendizagem muito rico para o desenvolvimento da sua capacidade de resolução de problemas e do seu conhecimento matemático. Ao colocarem problemas, os alunos apercebem-se da sua estrutura, desenvolvendo, assim, pensamento crítico e capacidades de raciocínio ao mesmo tempo que aprendem a exprimir as suas ideias de modo mais preciso. A formulação de problemas faz parte da resolução de problemas. Pólya já em 1945 referia que

toda a atividade de resolução de problemas fica incompleta se não se der oportunidades aos alunos de formularem problemas.

Millman & Jacobbe (2008) defendem que se pode promover a criatividade nos futuros professores através de "hábitos de pensamento matemático", identificando cinco características que os professores devem trabalhar com os seus alunos: (1) explorar ideias matemáticas; (2) formular questões; (3) construir exemplos; (3) identificar abordagens gerais de resolução de problemas; (4) fazer generalizações; e (5) refletir sobre as suas respostas.

Os alunos precisam de ser incentivados a procurar respostas originais, uma vez que esta estratégia é um caminho para encontrar soluções criativas ou soluções para problemas difíceis. Devem reconhecer que tanto a flexibilidade como a originalidade incentivam o pensamento divergente, proporcionando um pensamento de ordem superior. Tarefas desafiadoras normalmente requerem pensamento criativo e nosso recente trabalho no projeto sobre Padrões no ensino e aprendizagem de matemática mostrou que estes podem ser um meio de promover a criatividade nos alunos, tornando-se difícil diferenciar a procura de padrões da resolução de problemas e de fazer matemática. As ideias expressas podem ser resumidas no esquema da figura 1 (Vale, 2011).

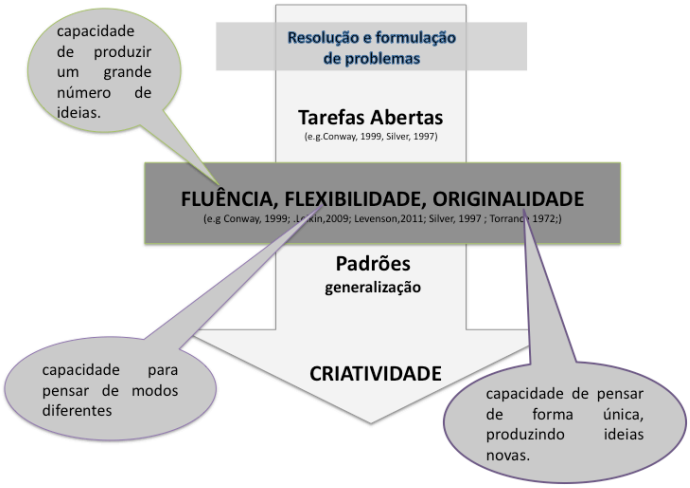


Fig 1: Da resolução de problemas à criatividade

Em resumo, a criatividade é um tema muitas vezes negligenciado nas aulas de matemática pelos professores porque o desconhecem e/ou ainda não se aperceberam da sua importância em matemática e na educação matemática, mas deve ser parte integrante dos programas de matemática em todos os níveis (Pehkonen, 2003).

Contexto e aspetos metodológicos

O que se relata neste texto resulta de um trabalho numa área recente em educação matemática para todos os intervenientes, pelo que se optou por um estudo exploratório, numa perspetiva interpretativa, desenvolvido com futuros professores do ensino básico, em que se pretende compreender as relações entre a resolução e formulação de problemas e a criatividade em matemática. Em particular, de que modo as tarefas propostas, com múltiplas soluções e que privilegiam os contextos figurativos, contribuem para o desenvolvimento da criatividade dos futuros professores nomeadamente ao nível da fluência, flexibilidade e originalidade. Nesta primeira abordagem ao tema fomos orientados pela seguinte questão:

Como podemos caracterizar a criatividade dos alunos quando resolvem as tarefas propostas? Os dados foram recolhidos de forma holística, descritiva e interpretativa e incluíram observações em sala de aula, questionário, notas observacionais e metodológicas e trabalhos escritos dos alunos.

A experiência didática que está na base deste trabalho desenvolveu-se durante as aulas de Didática da Matemática do 3º ano do curso de Licenciatura em Educação Básica, com os 21 alunos da turma na qual se pretendeu discutir o papel da criatividade em matemática. Esta experiência assumiu uma dinâmica de aula de natureza exploratória em que: (a) a resolução de problemas constitui o contexto de trabalho; (b) os alunos eram chamados a analisar e a discutir as tarefas propostas; e (c) privilegiou-se a comunicação, e em particular as representações e o questionamento. Os alunos também deveriam interligar as suas reflexões numa perspetiva de ensino e aprendizagem da matemática para o ensino básico. Esta experiência didática decorreu durante três sessões de 3h e recorreu a um conjunto de tarefas desafiantes que suscitassem múltiplas resoluções no âmbito da resolução e da formulação de problemas. Sempre que possível privilegiou-se o contexto figurativo por ser uma componente das aprendizagens matemáticas com várias potencialidades e que tem sido negligenciada no percurso escolar dos alunos.

A maior dificuldade encontrada foi na medição da criatividade dos alunos. Como nos sentimos desconfortáveis com uma avaliação psicométrica, utilizada por vários investigadores (e.g. Leiken, 2009), optou-se, nesta primeira abordagem, por seguir as ideias básicas de alguns autores (Conway, 1999; Silver, 1997) de medir a criatividade dos alunos através das três dimensões (fluência, flexibilidade, originalidade) sem atribuir uma pontuação para cada aluno, mas fazendo uma análise global do trabalho apresentado. A fluência pode ser medida pelo número de respostas ou resoluções, obtidas pelo estudante para a mesma tarefa. A flexibilidade pode ser medida pelo número de resoluções diferentes que o aluno possa produzir organizadas em diferentes categorias ou perceções, em que há uma variedade de ideias diferentes sobre o mesmo problema ou coisa, ou seja, analisando o número de categorias diferentes. E a originalidade pode ser medida analisando o número de respostas nas categorias que foram identificados como originais, por comparação com a percentagem de estudantes no mesmo grupo que poderia produzir a mesma solução. O que significa que pode ser avaliada como a não frequência estatística das respostas em relação às respostas de grupo sendo a mais difícil de medir. Para superar esta dificuldade, ajuda ouvir a opinião dos pares sobre a resolução.

Neste estudo exploratório optou-se por uma análise global: a mais comum e a mais original pela frequência das respostas.

Resultados e discussão

Os resultados preliminares que aqui se apresentam resultam da análise da resolução de quatro tarefas apresentadas de resolução e formulação de problemas.

A Tarefa 1 surge no âmbito do trabalho que temos desenvolvido sobre padrões em matemática onde os contextos figurativos estão em primeiro plano e em que os alunos trabalham tarefas diversas, como sejam contagens e padrões de crescimento. O seu enunciado não apresenta a sequência mas é o aluno que terá de criar, a partir do 1º termo que lhe é dado, uma sequência na qual se verifique um padrão de crescimento. A partir da construção da sequência pretende-se que o aluno faça uma conjetura sobre a lei de formação do número

---

Tarefa 1- Os círculos

Observe a figura 

1. Imagine que a figura dada é o 1º termo de uma sequência, que envolve um padrão de crescimento. Desenhe os termos seguintes.
2. Escreva uma expressão numérica que traduza o modo de calcular o termo de ordem n da sequência.
3. Imagine que a sequência que vai construir começa com o 2º termo. Desenhe o 1º termo.

---

de bolinhas de cada um dos termos da sequência que construiu, num processo de generalização para qualquer termo n dessa sequência. Depois, pretende-se que, olhando para a sequência inventada, considere o 1º termo dessa sequência como o 2º termo de uma nova sequência para a qual se pretende que construa o 1º. Esta tarefa localiza-se entre a formulação e a resolução de problemas e permite pôr em evidência o poder criativo do aluno, mas também o modo como gere os seus conhecimentos sobre padrões, conjeturas e generalização.

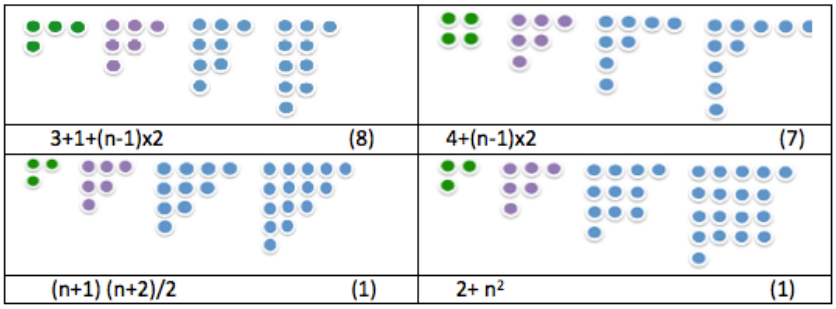


Fig 2: Resoluções da Tarefa 1

A Tarefa 1 não foi completamente resolvida por todos os alunos. A Figura 2 inclui apenas as 17 respostas (n=21) dos alunos que a completaram. O mais difícil não foi construir o padrão a partir do 1º termo, mas sim pensar para trás para descobrir o novo primeiro termo. As duas últimas resoluções foram as mais originais pois só foram realizadas cada uma por um aluno.

Tarefa 2- Quadrados com palitos

Pode fazer quadrados utilizando palitos. Existem muitas possibilidades de dispor os palitos de modo a obter cinco quadrados. Descubra o maior número possível de soluções e desenhe-as.

A Tarefa 2 foi a que suscitou mais dificuldades aos alunos, sobretudo na fase inicial. Tínhamos bastantes expectativas pelas múltiplas resoluções que poderiam aparecer e não foi o que aconteceu. Quando perceberam o que lhes era pedido, as propostas mais comuns foram as relacionadas com a identificação com os pentaminós que tinham sido trabalhados durante as aulas. Para além dessas surgiram algumas que se apresentam na Figura 3 e que foram (não todas) apresentadas por um grupo reduzido de alunos.

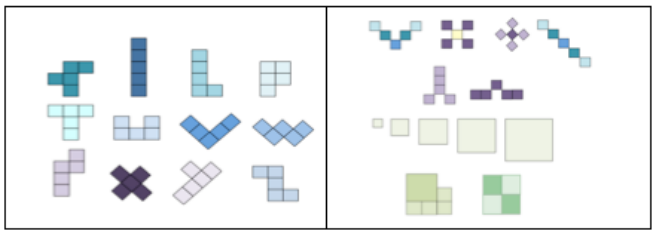


Fig 3: Resoluções da Tarefa 2

Não apareceram outras soluções que esperávamos. Por exemplo, algumas apresentadas na Figura 4 poderiam resultar da consideração de três dimensões.

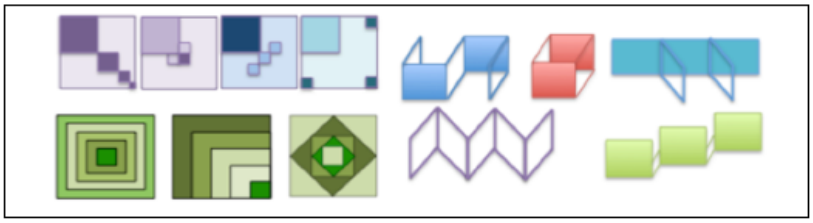


Fig 4: Resoluções possíveis da Tarefa 2

Desde o momento em que os alunos identificaram a questão com os pentaminós tiveram dificuldade em divergir para outras situações possíveis.

Tarefa 3- Uma expressão

Imagine que é um professor do ensino básico e que pretende colocar aos seus alunos um problema que possa ser traduzido pela expressão numérica 3 x 5 + 2. Invente um problema que seja traduzido pela expressão dada.

A Tarefa 3 terá sido a mais fácil para os alunos. No entanto observou-se em todos pensamento convergente, pois a estrutura dos problemas construídos foi muito semelhante. A maioria apresentou enunciados que se identificam como problemas fechados recorrendo às operações básicas. As propostas foram quase todas do mesmo tipo de "O pai do João" variando apenas os contextos (e.g. bolos, animais, frutos, conchas, CDs, mesas, cadeiras, chocolates, flores, dados,...).

> O pai do João tem cinco euros para dar a cada um dos seus três filhos. Depois lhes ter dado o dinheiro ainda ficou com dois euros no bolso. Que dinheiro tinha o pai do João inicialmente no bolso?

Dentro deste tipo de resposta surgiu apenas a seguinte, mais elaborada, mas cuja estrutura é muito semelhante às restantes:

> Durante o aniversário do João, o seu irmão perguntou-lhe:
>
> - Quantas pessoas é que vêm à tua festa?
>
> Ao que João respondeu:

- Com nós os dois, a mãe, o pai e a nossa irmã Joana somos cinco. Assim que chegarem os meus amigos seremos o triplo. Não esquecendo que o tio Mário e a tia Rita também já cá estão. Agora faz as contas.

A Tarefa 3 não apresenta nenhum contexto figurativo como acontece com as outras, mas pode eventualmente sugerir uma formulação figurativa. Foi o que aconteceu com uma aluna que apresentou uma situação completamente diferente do resto da turma. Formulou um problema de acordo com as contagens visuais mobilizando o conhecimento adquirido durante as aulas da disciplina sobre contagens visuais.

Quantas estrelas tem a imagem seguinte?

Escreve a expressão numérica que traduza um modo rápido de contar as estrelas.



Apresenta-se por último a tarefa "Frações no geoplano".

Tarefa 4- Frações no geoplano

Descubra tantos modos quantos consiga de representar no geoplano 4 x 6 as seguintes fracções: 1/3, 1/4, 1/6, 1/8,1/12 e 1/24. Pinte de cores diferentes cada uma dessas partes.



A Tarefa 4 é muito interessante para explorar os números racionais na forma de fração, na sua interpretação como parte-todo, assim como para trabalhar frações equivalentes. Os alunos tiveram bastante dificuldade em realizá-la. Não conseguiram ver nenhuma relação entre as diferentes frações e a malha do geoplano 4 por 6. Os que a realizaram corretamente foram muito poucos (3, n=21).

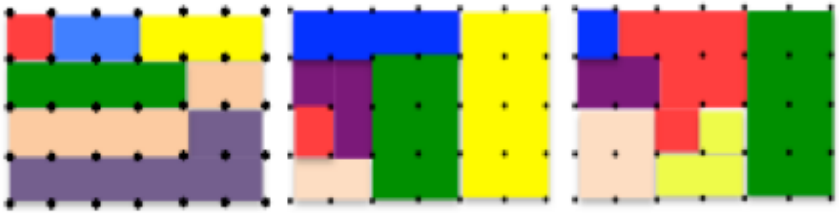


Fig 5: Resoluções de alunos na Tarefa 4

E nenhum considerou partes da quadrícula do geoplano, ou seja, apresentou resoluções do tipo ilustrado na Figura 6:

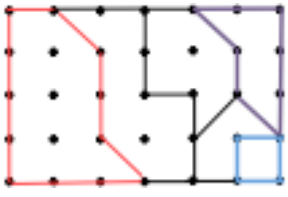


Fig 6: Resolução possível da Tarefa 4

Nesta fase exploratória sobre criatividade ainda não foi possível fazer uma análise aprofundada do trabalho escrito, pois ainda procuramos um modelo conceptual que nos permita efetuar essa análise, mas podemos dizer que estes resultados indicam que a tarefa que envolvia padrões foi a que deu origem a mais resoluções. Este resultado parece decorrer do trabalho que tem sido feito com padrões. A tarefa mais difícil foi o problema aberto, dos quadrados com palitos. Não revelaram pensamento divergente, ficando muito "presos" à ideia de que os quadrados deveriam estar ligados por um dos lados e serem todos iguais. Na tarefa em que tiveram que formular um problema, seguiram o caminho mais evidente e elementar, e as propostas apresentadas não diferem muito das que alunos do ensino básico eventualmente dariam, com enunciados pouco elaborados, em particular na Tarefa 3.

Cada tarefa não foi concebida intencionalmente para avaliar apenas uma componente de criatividade matemática, embora, em alguns casos, uma das componentes possa ser mais relevante. Observou-se que analisar as componentes da criatividade - fluência, flexibilidade e originalidade - conduziu à dificuldade em identificar evidências que pudessem assegurar essas componentes. No conjunto destas quatro tarefas o desempenho dos alunos não poderá ser considerado *criativo.* Os alunos precisam de ser incentivados a procurar respostas incomuns e originais, uma vez que esta componente representa uma maneira de obter soluções para problemas difíceis ou um caminho para soluções criativas.

Algumas considerações finais

Apesar do grande número de estudos desenvolvidos na área da resolução de problemas revelando que esta é uma tarefa complexa envolvendo conteúdo matemático, estratégias, raciocínio, diversos processos, conceções, emoções e aspetos contextuais, continua em aberto a discussão de qual o melhor modo de apoiar e promover a aprendizagem dos alunos e o desenvolvimento do conhecimento e capacidades matemáticas. E, ao longo das últimas décadas, tem havido a nível do currículo da matemática inúmeros ciclos de movimentos que balançam entre o foco na resolução de problemas e o foco nas competências básicas. Acreditamos que uma abordagem através da resolução de tarefas desafiantes em contextos diversificados, como seja o meio que rodeia o estudante, e, em particular, as tarefas com padrões surgindo de forma natural e realística, pode dar um contributo positivo para esta discussão. Do mesmo modo, sendo a criatividade na aula de matemática um tema emergente e em debate e que tem fortes ligações com a resolução de problemas, pode igualmente contribuir e ser um caminho a (re)descobrir. A criatividade é um campo que estamos apenas a começar a explorar, mas que já permitiu experienciar a construção de algumas tarefas que, para além dos conceitos e processos matemáticos que envolvem, principalmente de generalização, permitem aos alunos múltiplas resoluções. Este é um ponto forte neste trabalho, como tem vindo a ser referido, e deste modo deu-se um realce especial ao desenho e seleção de tarefas e à identificação das suas potencialidades para desenvolver a criatividade dos alunos. De facto, embora se tenha procurado fazer uma análise das componentes da criatividade emergentes da realização das tarefas, esta análise não foi feita com a preocupação fundamental de categorizar os alunos nesses termos, mas essencialmente de produzir e refinar um conjunto de tarefas que contribuam para o desenvolvimento da criatividade em simultâneo com a mobilização de tópicos e processos matemáticos, permitindo avaliar essa mesma capacidade de mobilização. Deste modo, pretende-se que a criatividade esteja incorporada no próprio processo de fazer matemática.

Por outro lado, há que repensar a formação inicial e contínua de professores, discutindo de que modo é que estes podem desenvolver o seu conhecimento matemático e didático para ensinar matemática de modo criativo e desenvolver a criatividade dos seus alunos. Uma forma

será a análise de boas práticas de ensino, próprias e de colegas, de modo a poderem reconhecer o desafio de fornecer um ambiente de exploração e de resolução de problemas que estimule a criatividade. Na verdade, tanto a flexibilidade como a originalidade incentivam o pensamento divergente e promovem o desenvolvimento de capacidades de ordem superior, contribuindo assim para o desenvolvimento da competência matemática de todos os alunos.

Referências

Conway, K. (1999). Assessing open-ended problems, *Mathematics Teaching in the Middle School*, *4, 8,* 510-514.

DFES (2000). *The Curriculum Guidance for the Foundation Stage.* London: QCA.

Leikin, R. (2009). Exploring mathematical creativity using multiple solution tasks. In R. Leikin, A. Berman and B. Koichu (Eds.), *Creativity in mathematics and the education of gifted students*.(pp. 129-145). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

Leikin, R. & Lev, M. (2007). Multiple solutions tasks as a magnifying glass for observation of mathematical creativity. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol. 3, pp. 161-168. Seoul: PME.

Lev-Zamir, H. & Leikin, R. (2011). Creative mathematics teaching in the eye of the beholder: focusing on teachers' conceptions. *Research in Mathematics Education, 13, 1*, 17-32.

Mason, J. & Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and Using Mathematical Tasks*. St. Albans: Tarquin.

Millman, R. & Jacobbe, T. (2008). Fostering creativity in preservice teachers through mathematical habits of them mind. In Santos, Manuel & Shimizu, Yoshi (Eds.), *Proceedings of the 11th International Congress on Mathematical Education (pp. 158-163)*. Monterrey, Mexico.

Ma, L. (1999*). Knowing and teaching mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Mann, E. (2006). Creativity: The Essence of Mathematics. *Journal for the Education of the Gifted, 30*, 2, 236-260.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME/DGIDC. [acesso eletrónico]. Disponível em http://sitio.dgidc.min-ed.pt

NCTM (2000). *Princípios e normas para a Matemática Escolar.* Lisboa: APM.

Pehkonen, E. (2003). State of art in problem solving: focus on open problems. In H. Rehlich & B. Zimmermann (Eds.), *Problem Solving in Mathematics Education* (pp. 93-111). Berlin: ProMath2003.

Pimentel, T. (2010). *O conhecimento matemático e didáctico, com incidência no pensamento algébrico, de professores do primeiro ciclo do ensino básico: Que relações com um programa de formação contínua?* (Tese de Doutoramento não publicada) Universidade do Minho.

Pólya, G. (2003). *Como resolver problemas.* Lisboa: Gradiva.

Ponte, J. (2007). Investigations and explorations in the mathematics classroom. *ZDM*, *39*, 419–430.

Rivera, F. & Becker, J. (2005). Figural and Numerical Modes of Generalizing in Algebra. *MathematicsTeaching in the Middle School, 11*, 198−203.

Silver, E. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM*, *3*, 75-80.

Smith, M., & Stein, M. K. (2011). *Five practices for orchestrating productive mathematics discussions.* Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Stylianou, A., & Silver, E. (2004). The role of visual representations in advanced mathematical problem solving: An examination of expert-novice similarities and differences. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(4), 353-387.

Tripathi, P. (2008). Developing Mathematical understanding through multiple representations. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 13(8), 438-445.

Vale, I. (2011). Tarefas Desafiantes e Criativas. Actas do *II SERP- Seminário em resolução de problemas*, CD-ROM. Rio Claro, Brasil: UNESP.

Vale, I. (2009). Das tarefas com padrões visuais à generalização. XX SIEM. Em J. Fernandes, H. Martinho & F. Viseu (Org.). *Actas do Seminário de Investigação Matemática* (pp. 35-63). Viana do Castelo: APM.

Vale, I., Pimentel, T., Cabrita, I. & Barbosa, A. (no prelo). Pattern problem solving tasks as a mean to foster creativity in mathematics. *Proposal for the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Taipei, Taiwan.

PRÁTICAS DE ENSINO COM CÁLCULO MENTAL[1]

Renata Carvalho
Unidade de Investigação do Instituto de Educação
Universidade de Lisboa
renatacarvalho@sapo.pt

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

Resumo. O objetivo deste texto é analisar as potencialidades de uma tarefa de cálculo mental com números racionais, inserida no percurso de aprendizagem dos alunos do 6.º ano, e a forma como foi explorada na sala de aula, estabelecendo conexões com outros temas matemáticos. A análise de diversos momentos de discussão mostra que a realização e discussão coletiva desta tarefa permitiu aos alunos partilhar estratégias e refletir sobre os seus erros, constituindo um contributo importante para a aprendizagem destes números e para criar um sentido global da Matemática. As estratégias de cálculo mental usadas pelos alunos e as suas conjeturas acerca dessas estratégias permitiram ir para além do cálculo mental, espoletando uma exploração com frações.

Palavras-chave: Cálculo mental, tarefas, números racionais, estratégias, erros.

Introdução

O trabalho na sala de aula de Matemática procura cada vez mais envolver os alunos no processo de ensino-aprendizagem. No entanto, a busca de novas metodologias de ensino, mais motivadoras e eficazes, por vezes, centra-se nos aspetos tecnológicos, menosprezando o trabalho em torno de capacidades básicas, como é o caso do cálculo mental, quando ambos os aspetos são necessários e se complementam.

O *Programa de Matemática do ensino básico* (ME, 2007) tem várias referências ao cálculo mental, sublinhando o seu papel no desenvolvimento da autonomia, autoconfiança e sentido crítico do aluno. Ao longo dos nove anos de escolaridade, este documento realça a importância do cálculo mental ao referir no propósito principal de ensino do tema Números e operações que se deve "desenvolver nos alunos o sentido de número, a compreensão dos números e das operações, e a capacidade de cálculo mental e escrito, bem como a de utilizar estes conhecimentos e capacidades para resolver problemas em contextos diversos" (pp.13, 32, 48).

Desenvolver o cálculo mental contribui para a aquisição de outras capacidades importantes para a aprendizagem da Matemática. Na perspetiva de Taton (1969) o cálculo mental desenvolve nas crianças noções de ordem e de lógica, reflexão e memória, contribuindo para a sua formação intelectual e fornecendo-lhes ferramentas para efetuarem cálculos simples sem recurso a ajuda escrita e, deste modo, preparando-as para o dia a dia. Refere ainda que, através do cálculo mental, a criança trabalha a concentração, desenvolvendo a memória dos

[1] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008) e por uma bolsa atribuída à primeira autora pela mesma fundação (referência SFRH/BD/69413/2010).

números, tomando contacto mais próximo com a individualidade específica de cada número, e levando-a, progressivamente, a empregar simplificações operatórias.

O trabalho apresentado neste artigo decorre no quadro de uma experiência de ensino centrada em tarefas de cálculo mental com números racionais envolvendo as quatro operações e na discussão das estratégias dos alunos do 6.º ano. Neste texto analisamos as potencialidades de uma tarefa de cálculo mental em contexto matemático e a forma como foi explorada na sala de aula, permitindo conexões com outros temas matemáticos.

Estratégias de cálculo mental, erros e dificuldades dos alunos

As estratégias desenvolvidas pelas crianças no cálculo com números naturais são uma referência importante para o desenvolvimento de novas estratégias com números racionais. Caney e Watson (2003) estudaram as estratégias de cálculo mental com números racionais dos alunos do 3.º ao 10.º ano e realçam a importância de perceber a relação entre diferentes representações de um número racional para que se consiga desenvolver este cálculo mental. Algumas das estratégias utilizadas envolvem usar uma regra anteriormente memorizada ou colocar de forma sequencial uma combinação de estratégias, por exemplo transformar decimais em frações para construir o todo. Estas autoras referem onze estratégias usadas pelos alunos: mudança de operação; mudança de representação; utilização de equivalências; utilização de factos conhecidos; repetição da operação adição/multiplicação; estabelecimentos de ligações; trabalho com partes de um segundo número; trabalho da esquerda para a direita; utilização de imagens mentais; utilização de formas mentais de algoritmos escritos; e utilização de regras memorizadas.

Destas estratégias, numa primeira fase, os alunos começam por usar formas mentais de algoritmos escritos e imagens mentais pictóricas, passando depois para estratégias em que fazem correspondência com conhecimentos que já possuem do trabalho com números naturais, como é o trabalho da esquerda para a direita ou com partes de um segundo número, estabelecem ligações, recorrem a adições e a multiplicações sucessivas e utilizam factos conhecidos. Numa fase mais avançada as suas estratégias envolvem o sentido de número e de operação, pois potenciam a utilização de representações equivalentes, o uso de diferentes representações de um número racional e a transição entre operações inversas. As autoras caracterizam as estratégias usadas pelo aluno de instrumentais, se este aplica factos e regras memorizadas, ou concetuais, se usa o conhecimento dos números e das operações.

A aprendizagem dos números racionais é complexa e envolve a compreensão dos seus diferentes significados e relações, principalmente no caso da representação em fração. Muitos dos erros cometidos pelos alunos no cálculo com números racionais estão associados à dificuldade em compreender o significado destes números (Behr, Post & Wachsmuth, 1986; Galen, Feijs, Figueiredo, Gravemeijer & Keijker, 2008; Lamon, 2006). Por exemplo, Galen *et al*. (2008) consideram que para trabalhar de forma significativa com frações, os alunos necessitam de desenvolver o seu sentido de número racional e sugerem que a ênfase na aprendizagem não deve estar apenas em situações puramente numéricas sem qualquer contexto associado para que os alunos não usem regras de cálculo que não entendem. Para ordenar e comparar frações Behr *et al*. (1986) consideram que os alunos devem compreender o conceito de grandeza de um número racional. Por exemplo, devem observar que, quando o numerador aumenta ou o denominador diminui, o número racional aumenta e que o seu valor diminui, quando o numerador diminui ou o denominador aumenta. Os alunos trabalham muitas vezes com números racionais como se fossem naturais (Lamon, 2006) não compreendendo que uma fração representa um número e não dois. Behr *et al*. (1986) consideram que os conhecimentos

sobre números naturais, por vezes, levam as crianças a focarem-se apenas no numerador ou no denominador e ordenam ou estabelecem equivalências incorretamente.

Relativamente aos números racionais na representação decimal, muitos dos erros dos alunos estão associados à falta de compreensão do sistema de numeração (Galen *et al*., 2008; Monteiro & Pinto, 2005, 2007) ou mesmo à densidade do conjunto dos números racionais. Por exemplo, Monteiro e Pinto (2007) referem que alguns alunos consideram que entre 0,2 e 0,3 não existem outros números racionais uma vez que pensam ainda em termos de números naturais, em que existe uma sequência discreta dos números. Na perspetiva de Galen *et al*. (2008), trabalhar com os alunos a relação entre frações e numerais decimais é fundamental e contribui para a compreensão da estrutura dos decimais. Cramer, Wybeg e Leavitt (2009) realçam a importância da linguagem utilizada na leitura dos numerais decimais uma vez que esta é uma parte importante na compreensão destes números. Tal como acontece nas frações, a ideia de ordem é importante para compreender a dimensão relativa dos números racionais na representação decimal. Alunos sem imagens mentais apropriadas dos números racionais nesta representação, tendem a ordená-los como se fossem números naturais. Ao comparar 0,25 com 0,6, dizem, por vezes que 0,25 é maior, pois 25>6 (Cramer *et al*., 2009; Monteiro & Pinto, 2005). Para Monteiro e Pinto (2007), quando o sistema de numeração decimal não está compreendido, os alunos não estabelecem relações entre as várias representações dos números racionais e não associam essas representações às quantidades que representam.

Metodologia de investigação

Este estudo segue uma abordagem qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994) com *design* de experiência de ensino (Cobb, Confrey, diSessa, Lehere, & Schauble, 2003). Participam uma professora, uma turma do 6.º ano, que já trabalhou os números racionais nas suas várias representações (decimal, fração, percentagem) e a primeira autora no papel de investigadora. A recolha de dados decorreu no 2.º período de 2011/12, sendo realizada através de observação direta das aulas em que se realizam tarefas de cálculo mental e de reuniões de preparação/reflexão da experiência de ensino com a professora. A experiência de ensino foi elaborada pela investigadora e discutida/preparada com a professora da turma que a realiza na sala de aula. A gestão da discussão na sala de aula é da responsabilidade da professora, intervindo a investigadora pontualmente quando necessita de esclarecer aspetos relacionados com a comunicação de estratégias e erros por parte dos alunos. As reuniões de trabalho com a professora são áudio-gravadas e as aulas de cálculo mental, áudio e vídeo-gravadas para posterior análise e reflexão acerca dos momentos de discussão de estratégias e erros dos alunos. Para a análise de dados são visionados os episódios de aula com o intuito de identificar o tipo de estratégias de cálculo mental que os alunos referem nos momentos de discussão, os erros que cometem e como evoluem ao longo da experiência de ensino. São construídas categorias de análise baseadas em estudos anteriores (e.g., Caney & Watson, 2003), tendo presente a perspetiva de vários autores (Galen, *et al*., 2008; Lamon, 2006).

A experiência de ensino é composta por dez tarefas de cálculo mental em contextos matemáticos e de resolução de problemas que são projetadas na sala de aula com recurso a um *Powerpoint* temporizado. Destas tarefas, sete são exercícios em contexto matemático, duas são problemas e uma envolve exercícios e problemas. Cada tarefa é constituída por duas partes e tem uma duração prevista de 15 minutos. Os alunos têm 15 segundos para resolver cada exercício e 20 segundos para resolver cada problema individualmente, seguindo-se um momento de discussão.

Nesta experiência de ensino as tarefas são um elemento estruturante fundamental. Na perspetiva de Wolman (2006), o trabalho com cálculo mental deve ser planificado e

programado a longo prazo, com tarefas que contemplem a aprendizagem de vários conceitos, sendo as mesmas questões abordadas em diferentes momentos e de diferentes formas. Assim, planificámos aulas semanais de cálculo mental durante dois períodos letivos envolvendo as quatro operações com números racionais. Ao longo da experiência, as tarefas são progressivamente mais exigentes em termos de estratégias e de conhecimentos envolvidos. A representação do número racional usada está de acordo com o tópico que a professora está a trabalhar (e.g., nos volumes usa-se mais a representação decimal e nas relações e regularidades a representação em fração), mas estas representações vão surgindo repetidamente e, por vezes, em simultâneo ao longo da experiência.

As tarefas foram pensadas de forma a permitirem não só rever e consolidar o trabalho com diversos números racionais de referência, mas também ampliar estratégias de cálculo mental e conduzir à redução dos erros dos alunos. Existem tarefas de nível de exigência reduzido e outras de nível de exigência elevado (Stein & Smith, 1998) que se vão intercalando ao longo de toda a experiência. As tarefas de nível de exigência reduzido apelam ao uso memorizado de factos conhecidos como o cálculo de 1/2+1/2 e as tarefas de nível de exigência elevado apelam ao estabelecimento de relações entre números e de conexões com factos conhecidos e a aprendizagens anteriores. As tarefas em contexto matemático, por exemplo, 12,2:0,5 também podem proporcionar o uso de procedimentos com conexões em que o aluno multiplica por 2 em vez de dividir por 0,5 ou arranja um contexto que o ajude a dar sentido à operação a realizar.

Este texto analisa em pormenor a primeira parte da primeira tarefa de cálculo mental da experiência de ensino uma vez que, da discussão coletiva, emergiu a possibilidade dos alunos realizarem uma exploração com números racionais na representação em fração com o intuito de procurar regularidades, o que se interligava com o tópico que estavam a abordar na altura. Trata-se de uma tarefa em contexto matemático que envolve adição e subtração de frações que foi realizada no momento em que os alunos estavam a abordar o tópico relações e regularidades. Por isso, a opção em trabalhar cálculo mental com frações, pois consideramos que esta é uma representação importante neste tópico uma vez que envolve o trabalho com expressões numéricas e proporcionalidade.

Nesta tarefa em contexto matemático, a primeira parte contém cinco exercícios de cálculo mental, tendo os alunos que calcular o valor de cada expressão, seguindo-se um momento de discussão das suas estratégias, erros e dificuldades. A segunda parte da tarefa, não analisada neste texto, é constituída por mais cinco exercícios, em que os alunos devem indicar o valor em falta que torna a igualdade verdadeira. Segue-se um novo momento de discussão. A opção de dividir a tarefa em duas partes, tem como objetivo promover um primeiro momento de discussão de estratégias, erros e dificuldades dos alunos que possa influenciar de forma positiva a realização da segunda parte e tarefas seguintes. Este momento de discussão é preparado previamente pela professora em conjunto com a investigadora que, em função da tarefa, preveem as possíveis respostas e estratégias dos alunos, erros, dificuldades e possíveis questões a colocar, tais como: Como pensaste? Como chegaste ao teu resultado? O que pensam da estratégia do colega? Quem consegue explicar o erro do colega? Em que aspeto é que a tua estratégia é diferente da do teu colega? Estas questões têm o objetivo de ajudar o aluno a explicar e clarificar como pensou e a ser crítico face às explicações dos colegas, gerando-se um ambiente de partilha onde se vai construindo um reportório de estratégias e se validam as respostas dos alunos, através da interação entre eles.

A tarefa que analisamos (figura 1) contempla exercícios de cálculo mental com números racionais na forma de fração que se enquadram em níveis básicos de desenvolvimento de cálculo mental, como é o caso do conceito de metade representado na forma de fração (Callingham & Watson, 2004). Esta tarefa foi realizada no momento em que a professora tinha iniciado o trabalho com sequências e regularidades. A nossa análise centra-se na primeira

parte da tarefa uma vez que a discussão na sala de aula deu origem a uma exploração com números racionais na forma de fração na aula seguinte.

Pensa rápido! Qual o valor exato? a) 1/2+1/2 b) 3/4-1/4 c) 1/2+2/4 d) 3/4-1/2 e) 4/8+2/4

Figura 1. Tarefa de cálculo mental

A tarefa foi elaborada tendo em conta vários aspetos importantes no cálculo mental. Assim, privilegiámos o uso de números de referência, como 1/2, 1/4 e 3/4 (Galen *et al*., 2008) e apelámos ao trabalho, essencialmente com metades, uma vez que reconhecer e operar com metades na forma de fração é uma capacidade básica de cálculo mental com números racionais nesta representação (Callingham & Watson, 2004). Iniciámos com as operações adição e subtração, por serem estas as primeiras operações que os alunos realizam com frações. As operações envolvem números racionais na representação em fração com o mesmo denominador ou com denominadores múltiplos um do outro para permitir, mais facilmente, o recurso a equivalências. Em a), os alunos começam por calcular a soma de duas frações irredutíveis muito simples; em b) operam com frações de referência para obter uma fração ainda mais simples; em c) voltam a operar com frações que representam um meio ("metade"); em d) operam com frações que se relacionam com o que realizaram em b) e em e) voltam a operar com frações um pouco mais complexas que representam um meio.

A exploração na sala de aula

Embora esta fosse a primeira aula de cálculo mental, ao fazerem a preparação da tarefa, a professora e a investigadora esperavam alguma diversidade de estratégias dos alunos tendo em conta que os números racionais já tinham sido anteriormente trabalhados nas suas diversas representações, incluindo a pictórica, e nas quatro operações básicas. Assim, esperavam que os alunos recorressem a imagens mentais pictóricas de frações de referência para operar, a que se associa o conceito de fração como uma relação parte-todo, à inclusão das representações simbólicas em contextos com significado para estes (se a 3/4 de hora retiro 1/4 de hora, fica…), ao uso mental dos algoritmos e ao uso de factos conhecidos (duas metades constituem uma unidade…). Relativamente aos erros, previam que os alunos operassem com numeradores e denominadores como se fossem números naturais, um erro frequente, calculassem erradamente frações equivalentes ou que manifestassem dificuldades na relação parte-todo ao imaginar mentalmente a representação pictórica das frações envolvidas. Dado este trabalho prévio, a professora estava preparada para questionar os alunos e levá-los a partilhar e discutir estratégias e erros com o intuito de os minimizar.

A professora introduziu a tarefa referindo que os alunos iriam realizar cálculo mental com adição e subtração de frações e que tinham 15 segundos para anotar na folha de registo o valor de cada operação. Após este momento de concentração e cálculo individual, iriam partilhar e discutir as estratégias usadas e os erros cometidos e, seguidamente, teriam mais cinco cálculos para resolver e posteriormente discutir.

As estratégias partilhadas no momento de discussão, evidenciam que a maioria dos alunos usou mentalmente o algoritmo para adicionar/subtrair frações. Para calcular 1/2+1/2, Elsa[2] explica: "como os denominadores são iguais, dá-se o mesmo denominador e os numeradores somam-se. (…) que é igual a 1. Que é 2 sobre 2 que é igual a 1". Também Eva para calcular 3/4-

[2] Neste texto os nomes dos alunos são fictícios.

1/4 explica: “os denominadores são iguais. Pomos o 4 como denominador e o numerador é subtrair o 3 pelo 1”. Para Ivo o resultado de 1/2+2/4 é 1/4, indicando: “fiz a regra. Fiz 2 vezes 2 que dava 4 e depois em cima também fiz vezes 2 e depois 3 menos 2 é 1”. O aluno, antes de resolver mentalmente o algoritmo, calculou uma fração equivalente a 1/2 com denominador 4, uma vez que os denominadores diferentes, o que considera ser uma “regra” associada ao algoritmo para adicionar este tipo de frações.

A professora questionou o grupo a fim de perceber se existiam outras estratégias. Apenas Marta referiu que para calcular 1/2+1/2 fez logo meio “mais meio” que sabe que dá 1, evidenciando que existem factos numéricos que ela memorizou, como o caso de duas metades formarem uma unidade e que usou para realizar rapidamente o cálculo. Na expressão em que Ivo usou a “regra”, Marta refere: “transformei 2/4 em 1/2 e depois somei os dois. Fiz, vi logo que 1/2+1/2 dava 1”. A explicação de Marta reflete, mais uma vez, que esta conhece alguns factos numéricos e que os usa no cálculo mental. Ao contrário de Ivo, recorreu à fração irredutível.

O facto de a professora não realizar com regularidade tarefas específicas para trabalhar o cálculo mental pode ser a razão por que as explicações dos alunos refletem uma prática muito relacionada com a aplicação do algoritmo. Tal como refere Caney e Watson (2003) este é um reflexo da inexperiência dos alunos em tarefas de cálculo mental. Ao contrário do que se esperava, nenhum aluno recorreu a imagens mentais pictóricas das frações, nem pensou num contexto onde pudessem inserir os números apresentados. Ao longo da discussão, a professora foi chamando a atenção dos alunos para as potencialidades destas estratégias em termos de rapidez e compreensão dos números.

Tal como se previa, um erro comum foi operar com numeradores e denominadores como se fossem números naturais (Lamon, 2006),como fizeram José, Rúben e André. Outro erro foi o cálculo errado de frações equivalentes esquecendo-se de multiplicar ou dividir um dos termos da fração como fez Eva que ao calcular uma fração equivalente a 2/4, escreve 2/2 não dividindo o numerador por 2. Para José 1/2+2/4 dá 3/6 porque: “fiz 1+2 e 2+4”. Também Rúben opera apenas com numeradores e escolhe o maior denominador para a fração resultante: “a mim deu-me 3/4. Deixei o 4 em baixo e somei os numeradores”. André para calcular 3/4-1/4 subtrai numeradores e denominadores: “fiz 3-1 que deu 2 e depois 4-2 que deu 2 em baixo. As explicações destes alunos mostram que não têm o conceito de número racional desenvolvido e que operam com frações como se representassem dois números e não apenas um. Este tipo de erro pode estar relacionado com o facto de os alunos terem uma estratégia muito ligada à aplicação mental do algoritmo. Por exemplo, Rita ao referir que para calcular 1/2+2/4 usou “a lei do corte”, está a transpor para a adição um procedimento que usa na multiplicação de frações revelando alguma confusão entre procedimentos.

Neste trabalho com tarefas de cálculo mental, realçamos a importância da discussão coletiva como forma de promover aprendizagens. A discussão permite aos alunos validarem as respostas uns dos outros contribuindo para que os que erram se apercebam do erro e da razão pela qual o cometeram. Eva, ao calcular 3/4-1/4 refere que não percebeu o resultado que colocou na folha de registo: “ó professora, eu não percebi bem uma coisa. Eu pus 2/4, e depois não sei como é que fiz mas depois pus 2/2. Não percebo”. Mas Ana tenta ajudar a colega a perceber o erro: “se calhar ela quis tornar irredutível e ao tornar irredutível enganou-se trocou o 1 com o 2”. Marta ao calcular 4/8+2/4 refere que lhe deu 6/4, mas consegue explicar o seu erro: “a mim deu-me 6/4 mas, já percebi por que é que está mal. Porque eu quando estive a reduzir os 4/8 esqueci-me que o 4 também tínhamos que... de quando fui a somar, esqueci-me que o 4 também estava reduzido”. Também José, que tinha adicionado numeradores e denominadores, quando a professora lhe pediu que pensasse melhor e explicasse novamente o que tinha feito, o aluno começa por afirmar que acertou no resultado, mas ao longo do seu raciocínio percebe que errou: “sim, porque não está na forma irredutível [o 2/4] e se formos

para a forma irredutível dá... Dá... 2 [denominador 2]... Não, não... Está mal". Mais tarde foi José que explicou a André o porquê do erro do colega:

> José: Ele [André] para subtrair tem que pôr os denominadores iguais, depois fazia a conta.
>
> Professora: E como é que era a conta?
>
> José: ... Um meio transformava em 2/4.
>
> Professora: 2/4 e depois como é que era. Olha ali para o André e explica-lhe lá. Um meio era o mesmo … equivalente …
>
> José: 2/4
>
> Professora: 2/4 e depois como é que era a regra?
>
> José: o denominador fazia-se igual e subtraia-se os numeradores.

Também Dina adicionou numeradores e denominadores ao calcular 4/8+2/4. Na discussão consegue detetar o erro e apresenta uma estratégia de resolução baseada na equivalência de frações e no uso de factos conhecidos, como é o caso de duas metades formarem a unidade: "ó professora, eu fiz mal mas agora é que eu estou a ver. 4/8 é equivalente a 1/2 e 2/4 é equivalente a 1/2. 1/2+1/2 dá 1.Fiz mal. Pus 6/8".

A discussão coletiva também permitiu aos alunos encontrarem estratégias diferentes das que inicialmente tinham usado. Pedro, apesar de ter calculado 3/4-1/4, usando equivalências e o algoritmo mentalmente: "transformei o meio em 2/4 depois 3-2, 1", quando a professora perguntou se alguém conseguiria encontrar uma estratégias diferente das que tinham sido discutidas, Pedro, à semelhança do que já tinha sido sugerido pela professora no início da discussão, arranjou um contexto e explica que: "eu, imaginava uma piza na minha cabeça onde estivesse fora uma fatia ... 1/4, e tirava-se 1/2", não revelando dificuldades na relação parte-todo uma vez que para formar 3/4 retira 1/4 ao todo e só depois retirava 1/2 como era pedido na expressão.

Um dos momentos mais interessantes da discussão desta tarefa foi quando Luís explicou a sua estratégia à turma para calcular 4/8+2/4: "a mim deu-me 1. Eu fiz 4x4, fiz numerador vezes denominador que deu 16 e depois fiz 8x2 que é a mesma coisa numerador vezes denominador e deu 16 que depois fui... Pus na forma irredutível". Esta explicação deixou a professora, a investigadora e a turma surpresos, pois não esperavam que Luís usasse a multiplicação "cruzada" para realizar a adição. O aluno multiplicou o numerador de cada fração pelo denominador da outra, obtendo 16/16 e apresentou como resultado 1, o que corresponde ao resultado correto da expressão inicial. Ambas questionaram de imediato Luís que se mostrou inseguro face à sua estratégia, quando aplicada a outras frações. Mas Pedro lançou uma conjetura: "professora, quando são equivalentes dá", querendo com isso dizer que, sempre que se adicionam frações equivalentes, a soma é 1. Este comentário de Pedro levou a que se testassem algumas frações escolhidas pelos alunos, como 1/2+2/4, onde efetivamente o resultado é 1 e onde a estratégia de Luís leva ao mesmo resultado, mas na adição de 1/4 com 2/8 o mesmo já não se verifica, pois a multiplicação "cruzada" dá 1 e a soma das frações é 1/2. Perante esta situação e face à persistência de Pedro em fazer vingar a sua conjetura, a professora lança um desafio para a aula seguinte:

> Vamos fazer numa próxima aula porque eu, nunca tinha pensado em fazer este raciocínio, estou aqui com a ideia porque é que a outra deu 1/2 e se haverá uma família de frações que dá 1/2 que multiplicadas dão… Pode haver alguma relação entre os números, mas eu não sei (…) As conjeturas por vezes são válidas para muitos números, mas a gente tem que mostrar que são para todos. Quando arranjamos um contra exemplo é porque ela já não é

> válida. Mas pode ser válida para uma família de frações depois pode haver outra coisa para outra família de frações e haver assim umas regularidades.

Na semana seguinte, na reflexão realizada pela professora em conjunto com a investigadora, a professora refere com entusiasmo o envolvimento dos alunos na exploração de regularidades com números racionais na forma de fração que surgiu a partir da estratégia de Luís e da conjetura de Pedro. Esta situação permitiu-lhe desenvolver um trabalho na sala de aula onde os alunos fizeram conexões entre aprendizagens realizadas com números racionais (como frações equivalentes, múltiplos, frações unitárias) e outras que estavam no momento a desenvolver no subtópico sequências e regularidades (como regularidades com números, fazer e validar conjeturas).

A gestão da discussão e procura de regularidades foi realizada, pela professora, usando o quadro negro. Na sua reflexão acerca da aula refere:

> Fomos testar. Fomos novamente ver para que é que aquilo funcionava. Só funcionava o cruzado, só funcionada quando eram frações equivalentes a 1/2. Mas depois começou-se a ver o que acontecia em frações equivalentes a 1/3. E se fossem frações equivalentes a 1/3? Se fossem equivalentes a 1/3 já não dava. Então dava quanto? Depois começavam a ver que dava sempre 2/3 quando elas eram equivalentes a 1/3. Como tem lógica não é. Mas pronto. Depois eles disseram, então e 1/4? E fomos ver o que dava quando eram equivalentes a 1/4 e dava 2/4. Depois equivalentes a 1/5 e dava 2/5, equivalentes a 1/6 dava 2/6, equivalentes a 1/7 dava 2/7. Eles começavam a dizer que era o dobro. Em cima era 2 e o denominador... Era a irredutivel era sempre 2 qualquer coisa e voltaram à primeira que era 2/2, não era, por isso é que a primeira dava 1.

Desta forma, a professora ajudou os alunos a organizarem uma exploração, a procurarem exemplos e contra exemplos e a conjeturarem, envolvendo-os na procura de frações equivalentes, múltiplos e na busca de regularidades. A forma como vai descrevendo o que se passou na aula evidencia isso:

> Dobravam sempre e aquilo batia certo, testavam e aquilo batia sempre certo. Depois começaram a dizer então dá um, depois houve alguém que disse 2/4 então 2/4 dá 1/2. Ah, e 2/6 é um terço e começaram à procura da forma irredutível mesmo. Depois houve alguém que disse dá um, depois dá 1/2, depois há umas que dão 1/3, 1/4 e depois volta a dar 1/3 e depois dá 1/8 e começaram a procurar. Depois fizeram a conjetura quando os números eram pares [os denominadores] havia sempre uma fração mais irredutível do que a que tinham encontrado. Começaram-me a dizer que sempre, por exemplo aqui que era o 2/2 havia o 1, para 2/4 havia 1/2, todas.

Na sua perspetiva, os alunos "estavam tão entusiasmados que era impossível partir para outra coisa" e, como ainda não tinha realizado um trabalho de exploração, "assim tão formal e tão... Partindo deles e de uma exploração de números, uma brincadeira" esta foi a oportunidade para o fazer.

Conclusão

A tarefa aqui apresentada e a comunicação que se gerou permite-nos identificar diversas estratégias e dificuldades dos alunos. Estas estratégias certamente irão evoluir ao longo da experiência de ensino, bem como erros e dificuldades na compreensão de conceitos, que esperamos possam ser minimizados com o contributo das discussões coletivas. Assim, foi possível verificar que os alunos usam maioritariamente como estratégia, formas mentais dos algoritmos escritos, sem recorrer a imagens mentais pictóricas das frações ou o uso de outros contextos. Segundo Caney e Watson (2003) o recurso a formas mentais dos algoritmos

acontece numa primeira fase em que os alunos realizam cálculo mental e esta foi a primeira aula de cálculo mental com números racionais representados por frações. Este tipo de estratégia mais instrumental (Caney & Watson, 2003), também pode estar relacionado com o tipo de trabalho que os alunos estão habituados a realizar nas operações com frações. Os erros que cometem evidenciam que o conceito de número racional ainda não está compreendido bem como a dificuldade em adaptar conhecimentos que possuem sobre números naturais a novas situações (Lamon, 2006).

Os episódios de sala de aula analisados mostram que, a partir de uma tarefa de cálculo mental em contexto matemático, criada com o objetivo de trabalhar frações de referência e metades na forma de fração, onde supostamente o nível de exigência seria reduzido (Stein & Smith, 1998) se gerou uma discussão de estratégias muito produtiva entre os alunos. Esta discussão permitiu que esta tarefa desse origem a outra tarefa com nível de exigência mais elevado onde se exploraram regularidades envolvendo frações, mobilizando conceitos que os alunos já possuíam sobre múltiplos e frações e introduzindo novas noções relacionadas com regularidades como fazer e validar conjeturas. Esta discussão realça o caracter transversal do cálculo mental ao permitir rever conceitos do tema Números e operações, não só no que se refere aos números naturais, mas também aos números racionais mostrando que estes conhecimentos são fundamentais para estabelecer relações numéricas. O facto de permitir que os alunos conjeturem, testem e validem as suas conjeturas explora noções fundamentais para a aprendizagem do tema Álgebra, onde a exploração de relações numéricas também assume um papel A preparação prévia desta exploração por parte da professora e da investigadora permitiu prever erros e preparar uma dinâmica de sala de aula para discutir esses erros, colocando os alunos em constante interação bem como prever estratégias que, caso não fossem referidas pelos alunos, podiam ser sugeridas pela professora, tal como aconteceu. Apesar de podermos prever aspetos do trabalhos dos alunos que ajudam a preparar a discussão na sala de aula, existe sempre a possibilidade de surgir algo inesperado. Perante uma estratégia inesperada de um aluno, a professora aproveitou a forma como este calculou mentalmente, para ir além do cálculo mental. Esta situação permitiu consolidar aprendizagens e desenvolver o espírito investigativo nos alunos. A forma como a professora geriu a discussão, permitiu criar um ambiente de partilha de estratégias e de erros dos alunos, que os ajudou a refletirem sobre os erros e as razões pelas quais os cometem, bem como validar estratégias e analisar erros através da interação entre alunos ou ainda a encontrar novas estratégias de cálculo. Desta forma, a aprendizagem do cálculo mental é encarada de forma integrada, não constituindo um fim em si mesmo, mas sim uma ponte para a abordagem de novos temas matemáticos.

Referências

Behr, M. J., Post, T. R., & Wachsmuth, I. (1986). Estimation and children's concept of rational number size. In H. L. Schoen (Ed.), *Estimation and mental computation* (pp. 103-111). Reston, VA: NCTM.

Bogdan, R., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Callingham, R., & Watson, J. (2004). A developmental scale of mental computation with part-whole numbers. *Mathematics Education Research Journal*, *16*(2), 69-86.

Caney, A., & Watson, J. M. (2003). Mental computation strategies for part-whole numbers. *AARE 2003 Conference papers, International Education Research*. (retirado de http://www.aare.edu.au/03pap/can03399.pdf em15/05/2010)

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehere, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in education research. *Educational Researcher, 32*(1), 9–13.

Cramer, K., Wyberg, T., & Leavitt, S. (2009). *Fractions operations and initial decimal ideas. Companion module to Rational Number Project: Fraction lessons for the middle grades*. (retirado de http://www.cehd.umn.edu/rationalnumberproject /rnp2.html em 8/08/2011)

Galen, F., Feijs, E., Figueiredo, N., Gravemeijer, K., Herpen, E., & Keijzer, R. (2008). *Fractions, percentages, decimals and proportions: A learning-teaching trajectory for grade 4, 5 and 6*. Rotterdam: Sense.

Lamon, S. (2006). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content and instructional strategies for teaching* (2nd ed.). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Ministério da Educação. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa. (retirado de http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMate matica.pdf em 29/02/2008)

Monteiro, M. C., & Pinto, H. (2005). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante*, *14*(1), 89-108.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2007). *Desenvolvendo o sentido do número racional*. Lisboa: APM.

Parker, M., & Leinhardt, G. (1995). Percent: A privileged proportion. *Review of Educational Research*, *65*(4), 421-481.

Stein, M., Smith, M. (1998). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: Da investigação à prática. *Educação e Matemática, 105*, 22-20. Lisboa: APM.

Taton, R. (1969). *O cálculo mental*. Lisboa: Arcádia.

Wolman, S. (Ed.) (2006). *Apuntes para la enseñanza matemática: Calculo mental con números racionales*. Buenos Aires: Gobierno de la Ciudad de Buenos Aires. (retirado de http://estatico.buenosaires.gov.ar/areas/educacion/curricula/pdf primaria/calculo_ra cional_web.pdf em 22/03/2011)

PAVIMENTAÇÕES COM O GEOMETER'S SKETCHPAD: UM ESTUDO NO 10º ANO DE ESCOLARIDADE

António Domingos
Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa
amdd@fct.unl.pt

Maria João Mendes Vieira
Escola Secundária de Casquilhos
matmaria.essa@gmail.com

Resumo: Este estudo analisa o impacto que o *Geometer's Sketchpad* tem na aprendizagem da Matemática e da Geometria por via das práticas de ensino implementadas quando associadas à demonstração de propriedades algébricas e geométricas relativas às pavimentações.

A revisão de literatura foca a utilização de tecnologias no ensino da matemática no tema da demonstração associada à utilização de ambientes de geometria dinâmica analisados na perspetiva da sua integração curricular, evidenciando-se as práticas de ensino e as motivações para a aprendizagem.

A metodologia usada é de natureza qualitativa e recorre a estudos de caso. Procedeu-se à recolha de dados em contexto de aula partindo da realização de tarefas. Os dados assentam na observação e registo das atividades realizadas, em notas de campo, *sketches* e documentos produzidos.

Pode concluir-se que as tarefas e a metodologia de ensino usadas se revelaram um auxiliar poderoso na análise das aprendizagens realizadas. Os alunos manifestaram dificuldades no cumprimento das tarefas, em especial na compreensão do papel da demonstração. Apenas um grupo reconhece a importância das funções de validação e explicação. A maior parte teve dificuldade em formular conjeturas e manipular resultados algébricos. O uso desta metodologia mostrou que é possível acompanhar com pormenor as aprendizagens dos alunos, nomeadamente ao permitir que trabalhem ao seu ritmo. Foi ainda possível identificar os conhecimentos prévios e a forma como estes podem ser operacionalizados, constatando-se que os alunos revelaram um bom desempenho na utilização de isometrias mostrando-se motivados no seu estudo.

Palavras-Chave: Ambientes Geometria Dinâmica; Conjetura e demonstração; Pavimentações; Aprendizagens; Práticas de Ensino.

Introdução

As ferramentas, como os ambientes de geometria dinâmica, permitem a utilização de um conjunto de tarefas diversificadas que ajudam a explorar conceitos, a manipular diferentes representações matemáticas, favorecendo a experimentação e são uma mais-valia no que respeita à motivação dos alunos. Faz então sentido que se questionem as práticas de ensino e as aprendizagens desenvolvidas e adquiridas, procurando saber de que forma é que as primeiras influenciam as segundas.

Os desafios que se impõem hoje no ensino da matemática, e mais especificamente no ensino da geometria estão também relacionados com a proliferação de utilização de novos recursos e

metodologias que se prendem diretamente com a generalização cada vez maior da utilização das tecnologias de informação e comunicação (TIC) nomeadamente através de Ambientes de Geometria Dinâmica (AGD), como o *Geometer's Sketchpad*(GSP).

Os programas de Matemática do Ensino Secundário, de um modo geral e em particular os destinados aos Cursos Profissionais, apontam para a utilização de computadores e programas de geometria dinâmica de modo a concretizar as competências a adquirir.

O estudo que aqui se apresenta incide sobre o tema pavimentações, em particular nas pavimentações em que os ladrilhos são polígonos regulares e em que todos os pares de arestas adjacentes têm uma aresta de pavimentação comum. O facto de os alunos participantes no estudo frequentarem um curso de *Design* faz com que possam explorar a vertente estética e criativa das pavimentações quando usam o *software* como "ferramenta" de trabalho.

Considerando as vastas potencialidades que a utilização dos AGD tem no ensino da Geometria e no ensino da demonstração aliada ao estudo de propriedades geométricas, em particular, no caso específico do estudo das pavimentações regulares e semiregulares, o estudo pretende dar resposta às seguintes questões:

- Com a utilização de um AGD que tipo de aprendizagens estão associadas ao estudo das pavimentações regulares?
- Quais os contributos da análise da atividade dos alunos associada à exploração de tarefas em AGD para a compreensão de aspetos essenciais de práticas de ensino favoráveis à aprendizagem da demonstração?

Será assim dada ênfase ao papel da demonstração de propriedades algébricas e geométricas das pavimentações, procurando compreender se os alunos sentem necessidade de elaborar conjeturas quando exploram resultados com características comuns (generalização) e se procuram validar as suas conjeturas passando para o processo de prova/demonstração. Parte-se do pressuposto que os AGD estimulam a elaboração de conjeturas e espera-se que esta metodologia de ensino nos elucide da necessidade de efetuar a prova ou demonstração. Entendemos aqui por metodologia de ensino a abordagem didática que é desenvolvida e que engloba os AGD, as tarefas que foram implementadas e o papel assumido pela professora no decorrer dessas aulas.

Fundamentação Teórica

As tecnologias a geometria e o papel do professor no ensino da matemática

A tecnologia pode ser uma ferramenta muito útil e quando utilizada de modo adequado pode ser bastante eficaz na aprendizagem da Matemática ao permitir que os alunos se envolvam mais na sua aprendizagem, proporcionando experiências diversificadas de acordo com o seu nível de conhecimento e maturidade intelectual.

Parece ser consensual que são várias as potencialidades da utilização de AGD em sala de aula, sempre associadas a atividades de investigação e tarefas de natureza exploratória por permitirem a realização de um grande número de tarefas num curto espaço de tempo (Veloso, 1998), favorecendo a experimentação e criando oportunidades adequadas para conjeturar, explicar e justificar resultados (Burrill 2008).

Com a utilização destes ambientes a dinâmica da aula deixa de estar centrada no professor alterando por vezes profundamente a sua forma de atuar e intervir. De um modo geral a utilização dos AGD como o GSP impulsiona o raciocínio dedutivo. Com a utilização de tarefas

adequadas os alunos através da experimentação são conduzidos a um número significativo de resultados (conjeturas).

As atividades de investigação, com explorações que levam à elaboração de conjeturas e consequente necessidade de demonstração de resultados desenvolvem nos alunos competências matemáticas. Segundo Veloso (1998, p.370) "os alunos ficam a perceber melhor o que é a atividade dos matemáticos e como se constrói a matemática, quais são os processos próprios de justificação". O professor tem aqui um papel fundamental ao proporcionar aos alunos experiências de aprendizagem através do desenvolvimento de tarefas que sejam significativas e adaptadas às capacidades cognitivas destes.

Não são também de descurar as questões de utilização correta do *software* que à partida não deverão ser um entrave à aplicação das tarefas. No entanto é natural, devido inclusivamente às características pessoais de cada aluno, que alguns tenham mais aptidão e mais destreza na utilização do *software* o que pode condicionar o seu desempenho, a concretização de tarefas e mesmo alterar o seu grau de motivação.

Apesar de a utilização do computador e dos AGD poder ser vista de uma forma lúdica por parte dos alunos, é importante que percebam que estão perante uma ferramenta utilizada por matemáticos. Investigadores como Whiteley (2000) apontam os AGD como ferramentas poderosas utilizadas pelos geómetras e não "um brinquedo" educacional e sugere que as atividades para os alunos podem ser modeladas sobre o mesmo tipo de explorações e comunicação que os geómetras.

É assim fundamental o papel do professor quer na criação dos ambientes de aprendizagem ricos, quer na avaliação sistemática dos desempenhos dos alunos quando emersos nesses ambientes.

A demonstração e a utilização de AGD

Sendo os AGD um meio privilegiado para a realização de tarefas de investigação e exploração criam obrigatoriamente ambientes de aprendizagem em que a construção do conhecimento se faz de forma continuada e participada, de uma forma autónoma e que pode levar à utilização de argumentos mais ou menos formais como meio de convencimento.

Devido às suas características e filosofias de funcionamento, os AGD como o GSP têm potencial para que os alunos efetuem pequenas investigações sendo induzidos à compreensão de teoremas e levados a construir demonstrações dedutivas, inferindo propriedades e efetuando generalizações (Christou, 2004, p.215).

O trabalho desenvolvido com alunos, com a utilização de AGD aponta para o papel importante que a experimentação pode ter na elaboração de conjeturas na perspetiva de validação (ou não) das mesmas através da prova (ou contraexemplos).

> Em vez da demonstração que é apresentada como um produto acabado, De Villiers (1997) propõe a demonstração como uma parte da atividade matemática que os alunos devem experimentar, e argumenta que os programas de geometria dinâmica são recursos adequados a esta atividade: apresentar aos alunos a função fundamental da demonstração como explicação e descoberta exige que desde muito cedo eles sejam iniciados na arte de formular problemas e que lhes sejam proporcionadas oportunidades suficientes de exploração, conjetura, refutação, reformulação e explicação (…). (Loureiro e Bastos, 2000, p.123)

O processo de demonstração por contraexemplo aparece referido em vários estudos (Veloso, 1998; De Villiers, 2001; Machado, 2005) e surge como um dos processos que os alunos

"escolhem" mais vezes, decorrentes das suas experiências e na sequência da tentativa de justificação das suas conjeturas.

O modo como a demonstração é apresentada aos alunos contribuirá largamente para a sua aceitação. Num estudo realizado com alunos do 8º ano sobre a demonstração matemática no contexto de utilização do GSP, Machado (2005, p.49) sugere um percurso que foi seguido também neste estudo:

> (…) uma forma dos alunos chegarem à demonstração pode passar pelo seguinte percurso:
>
> desenvolvem a sua atividade a partir de uma tarefa suficientemente aberta que permita a formulação de conjeturas;
>
> perante a análise da situação apresentada os alunos vão gerar exemplos;
>
> vão organizar e analisar esses exemplos, comparando-os uns com os outros (procurando regularidades) ou com algum ponto de partida (procurando relações);
>
> a partir desta observação formulam-se conjeturas;
>
> vão-se testar essas conjeturas a partir de exemplos, tentando encontrar um contraexemplo;
>
> (a) o contraexemplo é encontrado e a conjetura é reformulada ou abandonada e tentam-se formular novas conjeturas;
>
> (b) a conjetura resiste a vários testes, há então a necessidade de partir para a sua demonstração.

O professor deve assim estar consciente destas dimensões de modo a poder acompanhar e apoiar os alunos no seu processo de aprendizagem da demonstração quando envolvidos nestes ambientes.

Outros estudos estão ligados à questão da motivação (Hull e Brovey, 2004) e procuram saber se as atitudes dos alunos face à matemática são modificadas pela utilização dos AGD concluindo que o interesse e participação dos mesmos em geometria melhoraram com a utilização deste tipo de *software* e que estes parecem mais convencidos sobre a veracidade de um teorema, levados por este tipo de exploração.

Na mesma perspetiva mas de um modo mais abrangente, outro estudo refere mesmo a utilização de "tarefas para motivação para o raciocínio e demonstração" (Takáč, 2009). Recomenda que a demonstração não seja logo introduzida num patamar muito elevado relativamente aos aspetos formais, sob pena dos alunos desenvolverem antipatia pela mesma, e que seja utilizada de acordo com o ano que os alunos frequentam e as capacidades mentais que possuem. O estudo conclui que a realização de tarefas do tipo apresentado desenvolve a motivação intrínseca para a demonstração sendo o primeiro passo para a criação de demonstrações corretas e desenvolvimento do pensamento crítico. Reconhece ainda que o papel do professor será o de escolher o grau de formalidade associado à demonstração (aspeto real ou aspeto formal) e ainda escolher o papel da demonstração numa atividade educacional (tarefas).

Metodologia

A metodologia adotada neste estudo é uma metodologia de natureza qualitativa, e interpretativa, recorrendo ao estudo de caso. A professora foi também a investigadora e

principal responsável pela recolha de dados através da observação direta e notas de campo determinantes para a análise dos dados. Foram analisados três grupos de alunos de uma turma do 10º ano de escolaridade de um curso profissional (Design Gráfico) pelo que consideramos estar perante um estudo de caso múltiplo (Yin, 1993).

Para além da observação direta e notas de campo, o registo dos *sketches* produzidos pelos alunos, as suas respostas escritas e um questionário, foram as outras fontes de dados deste estudo. Os registos dos *sketches* foram efetuados através da recolha dos ficheiros produzidos pelos alunos.

As atividades de investigação e exploração (tarefas) desenvolvidas pelos alunos, acompanhadas pelas notas de campo da investigadora, foram analisadas tendo sempre em atenção as questões em estudo: procurar caracterizar as aprendizagens dos alunos quando envolvidos num ambiente de ensino que envolve um AGD e identificar os contributos da análise da atividade destes alunos quando exploram tarefas nestes ambientes com vista à compreensão dos aspetos das práticas de ensino que favorecem a aprendizagem da demonstração.

Participantes

A turma escolhida para participar no estudo foi uma turma do 10º ano de escolaridade, do Curso Profissional de Técnico de Design Gráfico. Os alunos desta turma são maioritariamente provenientes de classes sociais baixas, com baixas expectativas relativamente ao seu desempenho e com atitudes pré-concebidas relativamente à disciplina que é encarada como sendo de difícil compreensão e pouco motivadora.

A escolha desta turma foi intencional, constituindo assim uma amostra por conveniência (Bravo e Eisman, 1998) e prende-se com vários fatores: por um lado tendo em conta os interesses da investigadora nesta área (Tecnologias em Educação Matemática), por outro pela possibilidade da gestão do currículo ser mais flexível nestes cursos e estes alunos em particular revelarem algumas capacidades em realizar trabalho autónomo. Esta escolha prende-se ainda com o fato do tema a trabalhar (as pavimentações) poder ser estimulante do ponto de vista do curso e desta forma compreender a capacidade dos alunos em efetuar conjeturas e demonstrações. A generalidade dos alunos não conhecia o programa tendo sido necessário proceder a algumas explicações relativamente a comandos e filosofia do *software*.

Os alunos foram organizados em grupos/pares. A sua formação foi da responsabilidade dos mesmos e posteriormente foram escolhidos os três grupos que participaram no estudo. Esta escolha foi feita pela investigadora incidindo em alunos que apresentavam características de empenho, e que garantiam o cumprimento das tarefas propostas.

O grupo A é o único grupo misto do estudo, com uma boa dinâmica de grupo. A aluna domina, a maioria das vezes, no que diz respeito à participação e orientação dos trabalhos. São alunos bastante autónomos. A aluna tem um bom desempenho [1]na disciplina de Matemática e o aluno um desempenho médio[2].

O grupo B é constituído por duas alunas, participativas e empenhadas nas tarefas embora pouco motivadas quando estas envolvem conceitos teóricos. São persistentes na sua realização e solicitam bastantes vezes o apoio da professora. São alunas com desempenho médio na disciplina de Matemática.

[1] Boas notas à disciplina(18-20 valores), compreende e aplica corretamente conceitos sem revelar dificuldades na aplicação dos conhecimentos a novas situações.

[2] Notas médias na disciplina (15-18 valores), compreende e aplica corretamente conceitos no entanto revela algumas dificuldades na aplicação de conhecimentos a novas situações.

O grupo C é também constituído por duas alunas, empenhadas no trabalho em aula, persistentes no cumprimento das tarefas e cumpridoras dos prazos estipulados. Apresentam um desempenho médio na disciplina de Matemática resultado de muito investimento pessoal (estudo).

Não existe nenhum elemento dominante [3] nos grupos B e C. Todos os grupos têm bom desempenho na utilização do computador e dominam as ferramentas e menus do GSP, embora tenha sido este o primeiro contato com o *software* (à exceção da aluna do grupo A).

Tarefas

As tarefas utilizadas no estudo foram elaboradas visando desenvolver uma metodologia de ensino que nos permita caracterizar a forma como os alunos mobilizam os seus conhecimentos prévios para a construção de novos conceitos apoiados por um AGD, caracterizar as suas aprendizagens e apoiar a elaboração de conjeturas que conduzam à necessidade de demonstração. Algumas são de caráter fechado condicionando os resultados a obter, funcionando como guião de trabalho e outras, mais abertas sem "instruções" pormenorizadas para a construção dos *sketches* e sem perguntas direcionadas para os objetivos da tarefa. O denominador comum a todas é o facto de não condicionarem a obter resultados diretamente relacionados com o estudo das isometrias nas pavimentações. Não foi uma opção intencional, surgiu naturalmente enveredar pela investigação relativa a resultados algébricos no caso do estudo das pavimentações, talvez condicionada pela revisão de literatura escolhida, nomeadamente algumas tarefas propostas por Veloso (1998). Para além das tarefas de investigação foram elaboradas fichas informativas para introduzir os conceitos chave, essenciais para a compreensão das tarefas. Estas foram utilizadas como introdução a cada uma das tarefas de investigação ou exploração contendo, por exemplo, a noção de pavimentação e a nomenclatura associada ao estudo das pavimentações. Sempre que ia sendo necessário introduzir conceitos teóricos com vista a poderem ser realizadas as tarefas de investigação e exploração era fornecida uma ficha informativa (**Anexo 1**) a cada grupo de alunos acrescida de uma pequena explicação por parte da professora (quando solicitada) de modo a não existirem dúvidas relativamente aos conceitos envolvidos. Esta metodologia tem por objetivo evitar a aula expositiva, ganhar algum tempo e ainda promover a autonomia dos alunos. Por outro lado a decisão da aplicação destas fichas (informativas) também permitiu que os grupos não necessitassem de efetuar as tarefas em simultâneo. Foi possível que cada grupo gerisse o seu próprio tempo respeitando a planificação pré-estabelecida para a realização das tarefas.

Os alunos trabalharam em grupos (pares) de acordo com os seus ritmos, solicitavam a professora quando tinham dúvidas e muitas vezes pediam ajuda a colegas de outros grupos. Foram discutidos em grande grupo (turma) os processos utilizados na construção dos *sketches.* Cada grupo, no final da realização das tarefas apresentou os seus resultados à turma tendo sido feita nessa altura uma síntese dos mesmos. Esta síntese foi efetuada pela professora no quadro com o contributo dos alunos.

Esta conjugação de tarefas de natureza diferente apoiadas pelo AGD e pela dinâmica que os diferentes grupos lhe imprimiram permitiu compreender a necessidade de os alunos precisarem de tempos próprios para a realização destas tarefas, que dependem em grande parte da capacidade de mobilizar os seus conhecimentos prévios. Os momentos de reflexão

[3] Aluno que se saliente em termos de participação e orientação do trabalho do grupo, assumindo a liderança do grupo.

conjunta ajudam a esbater algumas das assimetrias verificadas, devendo o professor ter em atenção que esses casos devem merecer um acompanhamento mais próximo e sistemático.

Resultados do estudo

A principal vantagem da utilização de AGD, neste caso o GSP é a realização de um elevado número de tarefas num espaço de tempo curto (Veloso, 1998). Todos os grupos em estudo conseguiram construir as pavimentações que lhes foram propostas o que de outra forma (com papel e lápis) não tinha sido possível em tempo útil. Desta forma, restou mais tempo para analisar as propriedades e focalizar o estudo no que se pretendia: propriedades algébricas referentes às pavimentações bem como as propriedades geométricas.

No caso específico das pavimentações, a utilização deste tipo de *software*, permite ainda a exploração de vários conceitos matemáticos/geométricos associados, como por exemplo as isometrias, mais concretamente rotações e translações e eventualmente reflexões. Estamos perante um ambiente de aprendizagem rico que permite a mobilização de conhecimentos referentes às isometrias e ao nível da elaboração de conjeturas no domínio do raciocínio e demonstração matemáticos.

O nível de conhecimento dos alunos foi determinante para a concretização das tarefas propostas (Whiteley, 2000) uma vez que os alunos que compreendem bem a noção de rotação e translação, realizam as tarefas com facilidade enquanto os que não dominam bem estes conhecimentos demoram mais tempo em explorações e consequentemente a realizar as tarefas. O grupo A domina bem os conhecimentos que têm apreendido sobre isometrias mobilizando-os na realização das tarefas e por isso concretizam-nas com sucesso, antes de todos os grupos, e têm mais tempo disponível para responder às questões colocadas relativas às propriedades das pavimentações. Recorrem igualmente aos conhecimentos relativos às propriedades dos polígonos, no que respeita aos ângulos, para concretizar as tarefas e encaram-nos como tarefa rotineira, construindo e explicando relações geométricas (Jones, 2005).

As alunas dos restantes grupos não tinham os conhecimentos consolidados no que diz respeito ao estudo das isometrias e portanto revelaram dificuldades na sua aplicação na construção das pavimentações. Neste caso, a utilização do AGD permitiu, através da exploração, a consolidação destes conceitos sendo que com o decorrer do tempo estes conhecimentos iam sendo aplicados sem qualquer dificuldade, indo de encontro ao que diz Abrantes (1997), o AGD serviu de suporte para que estas alunas se apropriassem de processos fundamentais no que diz respeito a estes conceitos geométricos (isometrias).

Podemos assim constatar que o papel dos AGD podem ser um auxiliar precioso para o professor planear as suas práticas. Aparecem como amplificador conceptual dos conhecimentos dos alunos, evidenciando o papel desempenhado pelos conhecimentos prévios. O professor pode assim diagnosticar em cada momento a capacidade dos alunos em mobilizar os seus conhecimentos estabelecendo as estratégias mais adequadas a cada situação.

O grupo A, referido inicialmente, manipula as figuras e testa as conjeturas que vão elaborando apenas por manipulação dos *sketches* e, por vezes, torna-se difícil distinguir entre o processo de elaboração de conjetura e o processo de teste. Estes dois alunos manipulam as figuras que construíram, fazem medições, procuram regularidades e formulam conjeturas testando-as seguindo o processo descrito por Machado (2005): desenvolveram a atividade a partir de uma tarefa, geraram exemplos a partir da análise da situação, organizaram e analisaram esses exemplos procurando regularidades e relações e posteriormente testaram as suas conjeturas

tentando encontrar um contraexemplo sendo que se verificaram duas situações distintas em tarefas diferentes: (a) encontraram um contraexemplo e reformularam a conjetura (b) a conjetura resistiu a vários testes. (Fig.1 e Fig.2)

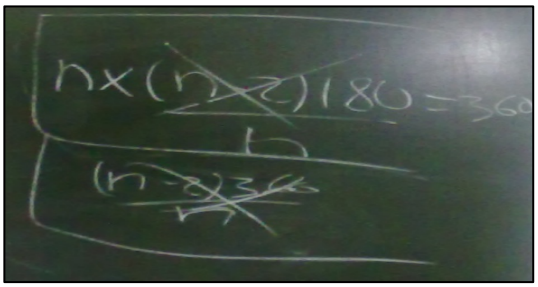


Figura 1

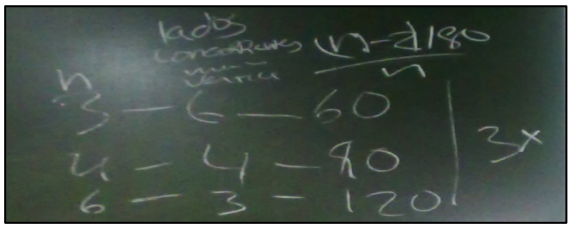


Figura 2

Na resposta à questão "será que todo o triângulo pavimenta o plano?", este grupo seguiu o percurso (b) e houve necessidade de partir para a sua demonstração, em grande parte por ser um dos objetivos da tarefa mas também porque se sentiram motivados a justificar o seu raciocínio. Para isso apresentaram argumentos e justificações formais, utilizando as propriedades dos triângulos relativas aos ângulos internos para justificarem a conjetura formulada. (Fig.3)

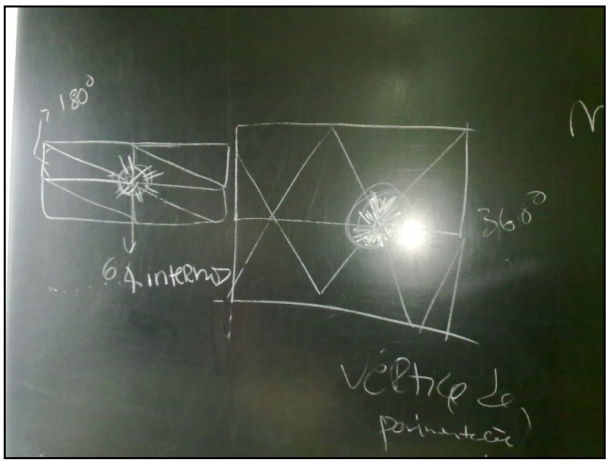


Figura 3

A aluna do grupo utiliza claramente as diferentes funções da demonstração: explicação, descoberta, verificação, desafio intelectual e sistematização (De Villiers, 1999) e para si a demonstração surge como um processo de busca do porquê de determinada conclusão, segundo ela "explicar como chegamos ao resultado" motivada pelo convencimento obtido com o *GSP* no caso, por exemplo, da pavimentação com triângulos:

> A forma geométrica do triângulo pode sempre criar uma pavimentação quer seja regular ou irregular. O vértice da pavimentação obriga a que passem 6 vértices, um de cada triângulo pelo vértice da pavimentação. A soma dos ângulos internos é 180° e visto que em volta do vértice da pavimentação existe um ângulo de 360° e passam por lá 6 vértices, um de cada triângulo, passam então irrefutavelmente 6 ângulos internos, um de cada triângulo e como a soma dos ângulos internos do triângulo (3 ângulos) é de 180°, 6 ângulos internos vão fazer os 360°. Os ângulos são iguais dois a dois e são verticalmente opostos.

No que se refere à tarefa sobre pavimentações regulares (Anexo 2), o grupo utiliza o GSP para a construção das mesmas. No entanto a sua utilização não influencia diretamente o processo de elaboração da conjetura, uma expressão matemática que relaciona o número de lados e os

ângulos internos de um polígono regular que seja condição para que esse polígono pavimente o plano. Os alunos testam a conjetura sem utilizar o *software*, e abandonam as conjeturas cada vez que arranjam um contraexemplo. Quando verificam que a conjetura é válida para todos os casos dão o trabalho como concluído e não sentiram necessidade de apresentar mais nenhum tipo de justificação (Fig. 4 e Fig. 5).

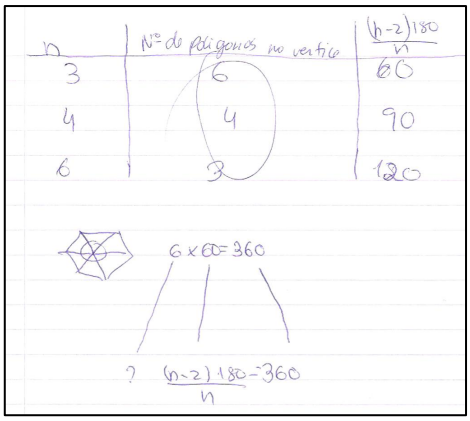


Figura 4

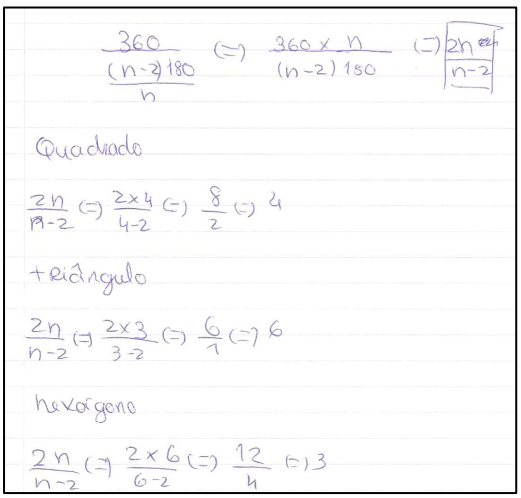


Figura 5

Com o decorrer do tempo, estes alunos, não sentem necessidade em medir e manipular as figuras para elaborar as conjeturas e apresentam argumentos dedutivos para as suas explicações (Christou, 2004). Aliás, na última tarefa dispensam a utilização do GSP para a construção das pavimentações e apenas apresentam argumentos que justifiquem as suas generalizações (Fig. 6). Tendo como referência a conjetura efetuada para os triângulos utilizaram as amplitudes dos ângulos internos dos polígonos para justificar quais podiam concorrer em torno do vértice (de modo a somarem 360°) e portanto formar uma pavimentação.

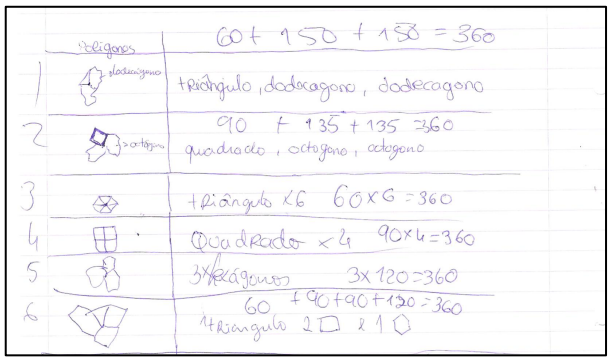


Figura 6

Como foi referido acima, o AGD aparece aqui como amplificador conceptual dos conhecimentos destes alunos que estão cada vez menos dependentes da realização dos *sketches* e onde o professor pode a cada momento avaliar a qualidade das aprendizagens realizadas.

Os restantes grupos tiveram muita dificuldade em elaborar conjeturas sendo que esta foi uma das competências que manifestaram maior dificuldade de aquisição. O grupo B, esboçou uma tentativa para elaborar a conjetura no caso da pavimentação com triângulos, mas com uma linguagem confusa que revela ideias pouco claras e, não desenvolvendo argumentos para a justificação do que tinham escrito.

> Sim pavimenta o plano porque é uma pavimentação regular (uma pavimentação regular é formada apenas por um polígono) e porque os vértices da pavimentação são coincidentes com os vértices do polígono e as arestas da pavimentação coincidem com os lados do polígono.

A tarefa seguinte (Pavimentações Regulares – Anexo 2) foi cumprida corretamente no que diz respeito à construção dos *sketches*, sendo esta a preocupação constante das alunas desde o primeiro momento. Apesar de descobrirem e investigarem relações e propriedades geométricas, no caso específico das pavimentações (Jones, 2005) não são levadas a elaborar conjeturas sobre os seus resultados. Em termos de raciocínio demonstrativo não revelaram competências ao nível do desenvolvimento e justificação de argumentos.

No grupo C, os alunos mobilizam corretamente os conhecimentos que têm sobre rotações e translações para a construção das pavimentações. Constroem uma pavimentação com triângulos (Fig. 7) e sobre a questão "será que todo o triângulo pavimenta o plano?" efetuam a generalização respondendo que "todo o triângulo pavimenta o plano" mas não desenvolvem qualquer tipo de justificação para a mesma o que poderia indiciar que tenham respondido apenas com base na visualização do *sketch*.

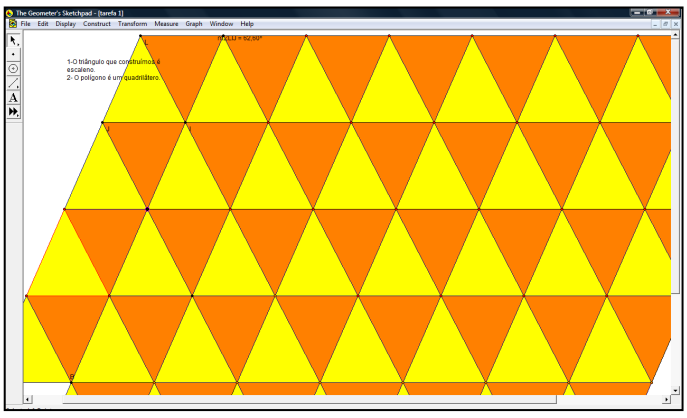


Figura 7

À semelhança do grupo B, estas alunas manifestaram uma preocupação constante com a construção dos sketches e foram as únicas que exploraram as construções de pavimentações regulares com polígonos como octógonos, eneágonos e decágonos. Apresentaram sempre a mesma justificação para o fato de estes polígonos não pavimentarem "Os vértices da pavimentação não coincidem com os vértices do polígono. As arestas da pavimentação não coincidem com os lados do polígono", no entanto quando lhes é solicitada uma generalização, resultado das suas experiências, através da elaboração de uma conjetura não o fazem abandonando a tarefa.

Estes dois grupos (B e C) apesar de iniciarem um processo de investigação (observaram, registaram e manipularam) não passaram à fase seguinte, a de conjeturar, testar e desenvolver teorias como explicação num processo como o que sugere Olive (2002). No que se refere à tarefa onde se pedia uma condição para que um polígono pavimente o plano, estes dois grupos, utilizaram a função de arrastamento do software para investigar propriedades aproveitando as potencialidades do mesmo no que diz respeito à verificação de casos particulares mas não conseguiram elaborar conjeturas a partir daí (generalização). O grupo C, efetuou as construções com relativa facilidade, entenderam os conceitos teóricos mas provavelmente confundiram entre o que é experimentação e demonstração, como refere Hanna (2000).

O que se observou nestes dois grupos vai de encontro à preocupação manifestada por Baccaglini-Frank e Mariotti (2010) quando refere que a facilidade de utilização do *software* "para compreender tais propriedades pode inibir alguns processos de argumentação que conduzem à procura de elementos úteis para a construção da demonstração" referindo-se às propriedades que permanecem invariantes.

Apenas no grupo A se verificou uma contribuição efetiva do GSP na elaboração de conjeturas, favorecendo raciocínios dedutivos utilizados na justificação das conjeturas apresentadas e no sentido que apontam Loureiro e Bastos (2000). Numa fase inicial estes alunos construíram os *sketches* que contribuíram para a verificação e convencimento e que favoreceu a justificação dos raciocínios. Os restantes, dos outros grupos, construíram de igual modo os *sketches* mas revelaram bastantes dificuldades em justificar os seus raciocínios. O grupo A elaborou conjeturas condicionado pela realização das tarefas e pela atribuição de tarefas por parte do professor (Takáč, 2009). Uma das alunas refere-o, quando questionada, sobre se efetuaria a demonstração caso não fosse solicitada responde que "provavelmente não".

A abordagem que é feita por estes dois grupos às tarefas propostas vem refletir a forma como o AGD pode proporcionar ao professor informação sobre o modo como estes alunos compreendem os conceitos abordados. São capazes de colocar em ação os conhecimentos básicos necessários à representação do *sketch*, mas os mesmos são insuficientes para o estabelecimentos de conjeturas e demonstrações. Esta metodologia de ensino revela-se assim uma prática eficaz na caracterização das aprendizagens dos alunos permitindo atender às suas diferenças individuais e ao mesmo tempo respeitar os seus ritmos de aprendizagem.

Conclusões

O presente estudo procura evidenciar de que forma os AGD podem ser propiciadores de práticas de ensino que permitam ao professor caracterizar as aprendizagens dos alunos tendo em conta os seus conhecimentos prévios e a sua emersão no referido ambiente.

Partindo da elaboração de um conjunto de tarefas diversificadas (tarefas fechadas e de investigação) relacionadas com o tema das pavimentações regulares foi possível observar dois percursos distintos de aprendizagem. Em dois dos casos as aprendizagens foram mais

significativas ao nível das propriedades geométricas relativas aos polígonos e às propriedades das pavimentações, nomeadamente aplicação de isometrias na construção das pavimentações, enquanto no outro caso foram relativas às capacidades de elaboração e validação de conjeturas, inserindo-se no âmbito do raciocínio e demonstração matemáticos.

Esta metodologia permitiu uma discriminação positiva dos desempenhos dos diferentes alunos que puderam trabalhar ao seu ritmo de aprendizagem. Os desempenhos diferenciados não causaram perturbações no funcionamento das aulas e foram determinantes para que fosse possível aferir e colmatar as principais dificuldades manifestadas pelos alunos.

Considera-se que o GSP enquanto tecnologia no ensino da Matemática desempenha um papel motivador das aprendizagens, criando hábitos de trabalho autónomo e a efetiva compreensão dos conceitos geométricos envolvidos nas tarefas quer pela própria filosofia do programa que "obriga" ao conhecimento de conceitos básicos para efetuar as construções, quer pela facilidade com que se podem efetuar construções sucessivas, por experimentação num curto espaço de tempo. Por outro lado conjugado com a aplicação de tarefas de natureza investigativa pode permitir nos alunos o desenvolvimento de competências ao nível da elaboração e justificação de raciocínios como forma de convencimento das situações que experienciam.

Referências

Abrantes, P. (1997). A tecnologia no currículo de Matemática: dez anos de investigação em Portugal. *Educação e Matemática, 45,* 27-31.

Burril, G. (2008). The role of handheld technology in teaching and learning secondary school mathematics, *ICME 11 – TSG 22, International Congress on Mathematical Education*. Mexico (Retirado de http://www.tsg.icme11.org/document/get/218 em 30/11/2010)

Baccaglini-Frank, A. & Mariotti, M. (2010). Conjecturing and proving in dynamic geometry: the elaboration of some research hyphoteses. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavengne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 231-240). Lyon: Institut National de Recherche Pédagogique.

Bravo, M. P. C. & Eisman, L. B. (1998). *Investigación Educativa*. Sevilha: Ediciones Alfar.

Christou, C. (2004). Proof through exploration in dynamic geometry environments. *Proceedings of the 28th Conference of the Internacional Group for the Psichology of Mathematics Education, Vol 2* (pp. 215-222) Bergen (Retirado de http://www.emis.de/proceedings/PME28/ em 27/11/2010)

De Villiers, M. (1999). *Rethinking proof with the geometer's sketchpad*. Emeryville CA: Key Curriculum Press.

De Villiers, M. (2001). Papel e funções da demonstração no trabalho com o *Sketchpad*. *Educação e Matemática*, *63*, 31-36.

Hanna, G. (2000). Proof and its classroom role: A survey. In J. M. Matos, M. I. Coelho & M. J. Saraiva (Eds.), *Actas do IX encontro de investigação em educação matemática* (pp. 75-104). Fundão: Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação – Secção de Educação e Matemática.

Hull, A.N. & Brovey, A. J. (2004). The Impact of the Use of Dynamic Geometry Software on Student Achievement and Attitudes towards Mathematics. *ARE- Action Research Exchange, Vol3 (1)* USA: Department of Curriculum & Instructional Technology at

Valdosta State University, Valdosta, Georgia (Retirado de http://teach.valdosta.edu/are/vol3no1/pdf/anhull-article.pdf em 27/11/2010)

Jones, K. (2005). Research on the use of dynamic geometry software: implications for the classroom. In J. Edwards, & D. Wright (Eds.), *Integrating ICT into the Mathematics Classroom* (pp. 18-20). Derby, UK: Association of Teachers of Mathematics.

Loureiro, C. & Bastos, R. (2000). Demonstração – uma questão polémica. In J. M. Matos, M. I. Coelho & M. J. Saraiva (Eds.), *Actas do IX encontro de investigação em educação matemática* (pp. 105-128). Fundão: Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação – Secção de Educação e Matemática.

Machado, S. (2005). *A demonstração matemática no 8º ano no contexto de utilização do Geometer's Sketchpad* (tese de mestrado) Lisboa: Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa.

Olive, J. (2003). Implications of using dynamic geometry technology for teaching and learning. In J. M. Matos, M. I. Coelho & M. J. Saraiva (Eds.), *Actas do IX Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 7-34). Fundão: Secção de Educação Matemática, Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Takáč, Z. (2009). Influence of MRP Tasks on Students' Willingness to Reasoning and Proving. In F-L. Lin, F-J. Hsieh, G. Hanna & M. de Villiers (Eds*.), Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education*. (Vol. 2, pp. 202-207). Taipei, Taiwan: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.

Veloso, E. (1998). *Geometria: Temas actuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Whiteley, W. (2000). Dynamic geometry programs and the practice of geometry. *Proceedings of the ICME 9*. Tóquio (Retirado de http://www.math.yorku.ca/Who/Faculty/Whiteley/Dynamic.pdf em 30/11/2010)

Yin, R. (1993). *Applications of case study research*. Beverly Hills, CA: Sage Publishing.

ANEXO 1

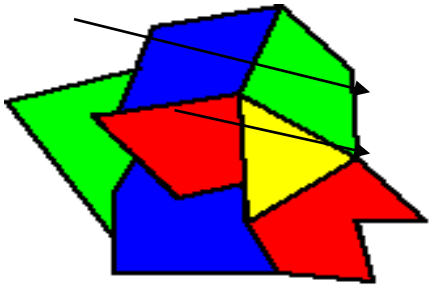
Ficha INFORMATIVA n.º 1

PAVIMENTAÇÕES

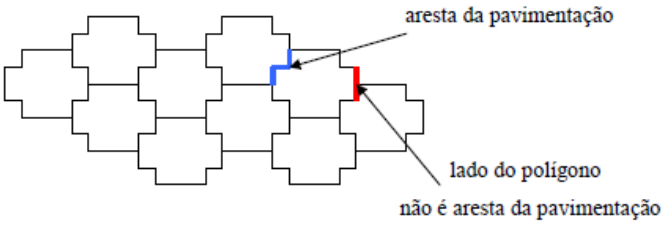
*Chama-se **Pavimentação do Plano** a um conjunto numerável de mosaicos ou ladrilhos que cobrem o plano **sem falhas nem sobreposições**.*

Vértice da pavimentação – qualquer ponto que resulte da intersecção de 3 ou mais ladrilhos.

Os vértices de uma pavimentação com polígonos não têm de coincidir com os vértices dos polígonos.



Aresta da pavimentação – qualquer arco, linha poligonal ou segmento que resulte da intersecção de dois ladrilhos.



PAVIMENTAÇÕES REGULARES

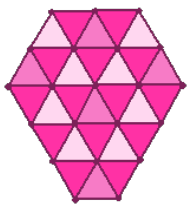
*Chamamos **pavimentações regulares** às pavimentações formadas por apenas um polígono regular disposto sempre do mesmo modo em torno de cada vértice. Os ladrilhos são polígonos regulares congruentes.*

Características das pavimentações regulares:

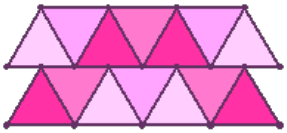
- Os vértices da pavimentação coincidem com os vértices do polígono
- As arestas da pavimentação coincidem com os lados do polígono

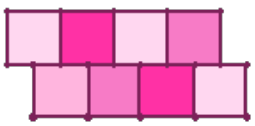
Exemplos:

Pavimentação regular com triângulos



Não são pavimentações regulares





Bibliografia: "Pavimentações", ESEC http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2003/icm22/tiposdepavimentacao1.htm

ANEXO 2

TAREFA 2

PAVIMENTAÇÕES REGULARES

Descobrir as pavimentações regulares/monoédricas possíveis.

I. Utilizando transformações geométricas e polígonos regulares, procede do mesmo modo que na tarefa 1 para explorar pavimentações com:

- Quadrados
- Pentágonos regulares
- Hexágonos
- Heptágonos
- Octógonos
- …

Descobrir as razões que fazem com que um polígono regular pavimente.

II. Grava cada ficheiro como **pav*_polígono_nomes***

1. Observa o vértice em cada uma das pavimentações obtidas.

i) Quantos polígonos "partilham" cada vértice?
ii) Comenta sobre a soma das amplitudes de todos os ângulos que partilham esse vértice.
iii) Como é que o valor que obtiveste em *ii)* está relacionado com o facto de esse polígono pavimentar?

2.

i) Qual é a amplitude do ângulo interno de um pentágono regular?

ii) É possível que três pentágonos regulares, sem sobreposições partilhem um vértice?

3. Completa a tabela de modo a organizar a tua informação:

		No caso de pavimentar		
Polígono	**Nº de lados do polígono**	**Nº de polígonos concorrentes num vértice**	**Amplitude do ângulo interno do polígono**	**Soma das amplitudes dos ângulos concorrentes num vértice**
	3			
	4			
	5			
	6			
	7			
	8			
	10			

CONCLUSÕES

Observa todos os dados que registaste e responde às questões seguintes, justificando-as convenientemente

1) Qual é o nº mínimo de polígonos concorrentes num vértice? E o máximo? Justifica.

2) Quantas pavimentações regulares existem?

3) Utilizando a expressão para a amplitude do ângulo interno de um polígono regular, consegues escrever uma expressão matemática que seja condição para que esse polígono regular pavimente o plano?

4) Demonstra a tua conjetura (efetuada em 3)

5) Procura encontrar condições necessárias e suficientes para criar uma pavimentação regular

A INTEGRAÇÃO DA FOLHA DE CÁLCULO NO ESTUDO DO TÓPICO EQUAÇÕES DO 2.º GRAU NO 9.ºANO DE ESCOLARIDADE

Sandra Nobre
Escola Básica 2, 3 Professor Paula Nogueira
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
Bolseira da FCT
sandraggnobre@gmail.com

Nélia Amado
FCT - Universidade do Algarve
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
namado@ualg.pt

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

Resumo: Neste artigo analisamos o papel da folha de cálculo no desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 9.º ano no tópico Equações do 2.º grau. Os objetivos são (i) perceber como é que os alunos abordam as tarefas propostas na folha de cálculo, isto é, a que representações recorrem e que tipo de relações estabelecem e (ii) de que modo esse trabalho influencia o desenvolvimento do seu pensamento algébrico. A análise de dados incide nas produções de uma aluna, Ana, e em alguns diálogos entre os alunos da turma e a professora, que ocorreram durante a resolução de tarefas com a folha de cálculo. Os dados foram recolhidos durante a realização de uma experiência de ensino em tópicos de Álgebra. Verificamos que a folha de cálculo foi importante para Ana desenvolver o seu pensamento algébrico ao longo do estudo do tópico, uma vez que proporcionou a compreensão de significados dos conceitos fundamentais antes da sua aprendizagem formal. Possibilitou ainda o estabelecimento de conexões entre diferentes representações que permitiram o desenvolvimento da compreensão relacional de conceitos e procedimentos estudados no tópico.

Palavras-chave: Folha de cálculo, pensamento algébrico, equações do 2.º grau.

Introdução

Nas últimas décadas as novas orientações curriculares têm vindo a fazer eco junto dos professores de Matemática e na sua prática letiva. A Álgebra é um tema que tem merecido uma especial atenção por ser um campo em que os alunos, habitualmente, manifestam muitas dificuldades. O atual programa de Matemática para o ensino básico (ME, 2007) preconiza uma nova orientação para o ensino da Álgebra, valorizando o pensamento algébrico logo a partir dos primeiros anos. No 3.º ciclo, o propósito principal para o ensino da Álgebra assenta no desenvolvimento, nos alunos, da linguagem e do pensamento algébrico, na capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos em contextos diversos. A resolução de problemas é uma atividade privilegiada e o programa recomenda que sejam proporcionadas, aos alunos, experiências informais antes da manipulação algébrica formal. Quanto aos recursos, aponta a folha de cálculo como um bom meio para estabelecer

relações entre a linguagem algébrica e os métodos gráficos na realização de tarefas e na resolução de problemas.

Segundo Skemp (1976), muitas das vezes, é mais fácil para os alunos obterem uma compreensão instrumental do que uma compreensão relacional. Uma compreensão instrumental requer menos conhecimento e permite obter uma resposta correta mais rapidamente. Contudo, este tipo de compreensão requer memorização e sem a compreensão relacional a aprendizagem não pode ser adaptada a novas tarefas e os alunos não conseguem fundamentar as suas respostas. Por estes motivos consideramos que é fundamental dar especial atenção ao modo como os novos conceitos ou procedimentos são introduzidos de modo a reduzir a possibilidade dos alunos aprenderem apenas por memorização de regras, pelo que devem ser proporcionadas experiências, sempre que possível, que os ajudem na compreensão do significado dos processos utilizados. Neste artigo procuramos analisar como é que uma aluna, Ana, aborda as tarefas propostas na folha de cálculo, no estudo do tópico Equações do 2.º grau, destacando as representações utilizadas e o tipo de relações estabelecidas. Por outro lado, pretendemos perceber de que forma este trabalho na folha de cálculo contribuiu para o desenvolvimento do pensamento algébrico de Ana.

Pensamento algébrico

O desenvolvimento do pensamento algébrico está estreitamente relacionado com a experiência matemática dos alunos. Kieran (2007) refere que, num nível mais avançado, este pensamento manifesta-se no uso de expressões simbólicas e de equações em vez de números e operações. No entanto, para os alunos que ainda não aprenderam as notações algébricas, as formas de pensamento mais gerais sobre números, operações e notações, como o sinal de igual, podem efetivamente ser consideradas algébricas.

Pensar algebricamente abrange conhecer várias formas de representação, nomeadamente as simbólicas. Implica flexibilidade na mudança entre modos de representação, bem como capacidade de operar com símbolos, em contexto e quando adequado (Schoenfeld, 2008). Este modo de pensamento contempla também o trabalho com estruturas matemáticas e o uso de símbolos na resolução de problemas, incluindo o sentido do símbolo, entendido como a capacidade de interpretar e usar de forma criativa os símbolos matemáticos (Arcavi, 2006).

Zazkis e Liljedahl (2002) afirmam que o termo Álgebra engloba dois aspetos distintos: pensamento algébrico e simbolismo. Estes autores afirmam que atualmente há uma tendência para separar estes aspetos, por duas razões: (i) o reconhecimento da possibilidade de manipulação simbólica sem sentido e (ii) um maior foco na estrutura do que nos cálculos, nos primeiros anos. Nesta perspetiva, o uso de simbolismo algébrico deve ser tido como um indicador de pensamento algébrico mas o facto de não se usar notação algébrica não deve ser julgado como uma incapacidade de pensar algebricamente.

Reconhecemos que a utilização do simbolismo algébrico é uma das grandes potencialidades da Álgebra pois constitui uma ferramenta poderosa para a resolução de problemas, permitindo expressar ideias matemáticas de forma rigorosa e condensada. No entanto, neste estudo, assumimos esta perspetiva mais abrangente de pensamento algébrico, considerando que este se manifesta não só pelo uso do simbolismo algébrico, mas também através de outras representações que envolvem palavras e relações gerais entre números.

Porquê a folha de cálculo?

A primeira autora deste artigo assumiu também o papel de professora de Matemática dos alunos participantes no estudo do 7.º ao 9.º ano de escolaridade. No 8.º ano, nas aulas de Estudo Acompanhado, a resolução de problemas foi a atividade privilegiada tendo sido incentivado o recurso dos alunos à folha de cálculo. A maior parte dos problemas propostos era provenientes do campeonato de resolução de problemas Sub 14[1]. Ao longo deste ano letivo foi possível verificar pelas resoluções dos alunos uma crescente apropriação da ferramenta quer ao nível da sua utilização, quer ao nível da linguagem por parte dos alunos.

No que respeita a aspetos destacados na literatura, têm sido desenvolvidos vários estudos no âmbito da utilização da folha cálculo no desenvolvimento do pensamento algébrico. Esses estudos mostram que esta ferramenta constitui um recurso pedagógico com grande potencial para a construção de conceitos algébricos, para o estabelecimento de relações funcionais e para representação de sequências ou de procedimentos de natureza recursiva usados, por vezes, na resolução de problemas de Matemática. Os resultados do projeto AnA (Sutherland, 1993) mostram que quando se trabalha com a folha de cálculo os alunos aprendem a entender um símbolo como a representação de um número geral, confirmando os resultados de alguns estudos anteriores. A interação dos alunos com o computador em atividades algébricas suporta o desenvolvimento do pensamento em termos específicos para um pensamento em termos gerais de objetos.

Na folha de cálculo, os alunos ao escreverem fórmulas que relacionem algumas células podem ver os resultados numéricos no computador. Este *feedback* é importante para a atividade dos alunos, pois pode ser suficiente para os incentivar a uma reconstrução das fórmulas utilizadas, o que soluciona o problema encontrado e não apenas para um caso em particular. Isto é um aspeto que reforça o facto da folha de cálculo ser um impulsionador da generalização em Matemática. A visualização do *output* da folha de cálculo suscita uma nova reflexão acerca do problema em causa e, em particular, da fórmula introduzida. Isto estimula a evolução do pensamento matemático, permitindo aos alunos realizar trabalho de investigação (Calder, 2009).

A folha de cálculo é reconhecida por diversos autores (e.g., Ainley *et al*., 2004; Dettori *et al*., 2001; Rojano, 2002) como uma ferramenta bastante útil na resolução de problemas e, em particular, no desenvolvimento do pensamento algébrico. A representação simbólica na folha de cálculo das relações presentes num problema é iniciada através da nomeação de colunas e da escrita de fórmulas. Este recurso proporciona um ambiente de trabalho estimulante que favorece uma maior compreensão das relações de dependência entre as variáveis e incentiva os alunos a apresentarem gradualmente resoluções algébricas em detrimento de métodos aritméticos (Rojano, 2002). Para além disso, esta ferramenta contribui para que os alunos utilizem a Álgebra com base nas referências das células para expressar o seu raciocínio durante as atividades, criando uma ponte entre a linguagem natural e a notação algébrica (Ainley *et al*., 2004).

O reconhecimento dos elementos envolvidos num problema e o estabelecimento de relações entre eles constitui um passo fundamental para utilizar a Álgebra na resolução de problemas. Trata-se de um processo que pode ser facilitado pela folha de cálculo, como referem Dettori *et al*. (2001). Estes autores consideram a folha de cálculo bastante útil para a introdução da Álgebra, podendo ser um novo meio a integrar na resolução de problemas e ajudar a compreender o que significa resolver uma equação mesmo antes da aprendizagem formal da

[1] Campeonato organizado pelo Departamento de Matemática da FCT da Universidade do Algarve http://fctec.ualg.pt/matematica/5estrelas/subs/sub14.html

resolução de equações. Pode ainda facilitar o raciocínio perante um problema, contribuindo para selecionar a informação relevante, e funcionar de forma a introduzir as capacidades de generalização, abstração e síntese, que são fundamentais na Matemática. Estes fatores foram decisivos para que considerássemos pertinente realizar uma experiência de ensino no 9.º ano, com estes alunos, em tópicos de Álgebra, nomeadamente para o estudo das equações do 2.º grau.

Representações na folha de cálculo

A folha de cálculo dá acesso a diferentes tipos de representações (Haspekian, 2005):

Linguagem natural – é possível introduzir e editar um texto em qualquer célula, em particular para a nomeação de colunas;

Introdução de fórmulas – é possível realizar automaticamente operações que envolvem as células que contêm dados do problema ou que resultam de outros cálculos;

Construção de gráficos – a construção de gráficos dinâmicos, a partir de dados numéricos já inseridos;

Registo "variável-numérica" – é uma funcionalidade específica da folha de cálculo que diz respeito ao registo numérico mas, ao mesmo tempo, apela à noção de variável. Permite a variação de valores numéricos, por exemplo, para resolver problemas através da tentativa-e-erro. Esta funcionalidade pode comparar-se à criação de um parâmetro que se pretende estudar.

Uma das funções que torna mais distinta esta ferramenta é o arrastamento, ao longo de uma coluna, da alça de uma célula que contém uma fórmula. Esta ação gera uma "variável-coluna".

Os números presentes nas células da folha de cálculo podem ter uma natureza diversa. Um número pode ser um *input* numérico, um *output* de uma fórmula, ou ainda um *output* de uma sequência numérica gerada automaticamente pelo Excel. No caso em que o número é um *output* de uma fórmula, a aparência corrente da célula é a de um número. No entanto, a célula pode mostrar temporariamente a sua aparência de fórmula. Assim, uma característica importante da folha de cálculo é a de encobrir as fórmulas (ou seja, a parte algébrica), mantendo sempre visível a parte numérica.

A experiência de ensino

No início do estudo do tópico os alunos resolveram uma ficha de diagnóstico com o principal objetivo de se obterem elementos acerca dos seus conhecimentos. Na intervenção pedagógica a resolução de problemas assumiu o papel principal, sendo, no entanto, ainda propostas outras tarefas. Nalgumas situações foi sugerida a resolução com a folha de cálculo. Pretendíamos, nesta fase, que a folha de cálculo servisse de ponto de partida para a aprendizagem formal da Álgebra. Algumas das tarefas iniciais eram problemas suscetíveis de resoluções formais do ponto de vista algébrico. No entanto, primeiramente, foi proposta a exploração desses problemas com recurso à folha de cálculo. Para cada uma destas tarefas foram promovidos momentos de discussão e de síntese, procurando estabelecer uma ponte entre o trabalho realizado na folha de cálculo e o trabalho com lápis e papel, recorrendo ao simbolismo algébrico, se possível a partir dos próprios alunos.

O estudo do tópico equações do 2.º grau

No estudo deste tópico pretende-se que os alunos resolvam equações do 2.º grau completas e incompletas. O programa propõe que os alunos recorram aos casos notáveis da multiplicação, tanto no cálculo numérico como na factorização de polinómios, e que na resolução de equações do 2.º grau seja utilizada a noção de raiz quadrada, a decomposição em fatores, lei do anulamento do produto e a fórmula resolvente (ME, 2007).

Na planificação desde tópico foi delineado um conjunto de tarefas tendo em conta estas orientações. Na tabela 1 apresentamos a distribuição de tarefas e os principais recursos utilizados. O trabalho na folha de cálculo foi sempre acompanhado por algumas questões resolvidas com papel e lápis de modo a promover articulação entre o trabalho com estes recursos.

Tabela 1: Tarefas e principais recursos utilizados ao longo do estudo do tópico

Tarefas	A-3: Diagnóstico	B-3:As idades dos irmãos	C-3: Factorização	D-3: A bola saltitona	E-3: A experiência no laboratório	F-3: A fórmula resolvente	G-3: Problemas
Recursos	Lápis e Papel	Folha de cálculo	Lápis e papel	Folha de cálculo	Folha de cálculo	Lápis e papel	Lápis e papel

Quando se considerou oportuno, as equações foram trabalhadas em paralelo com a respetiva representação gráfica. Em particular, para alguns dos problemas propostos para resolver na folha de cálculo foi solicitada a representação gráfica para uma melhor compreensão por parte dos alunos do significado de uma função quadrática e das suas soluções. Este aspeto vem ao encontro de Vaiyavutjamai e Clements (2006) que explicam que os alunos até conseguem obter as soluções de uma equação do tipo $(x-a)(x-b)=0$ mas não sabem o que elas representam, não conseguem interpretar o seu significado. Outras dificuldades nas equações do 2.º grau surgem, muitas vezes, associadas ao conceito de incógnita. Didiş *et al*. (2011) corroboram estes autores afirmando que os alunos têm dificuldades em compreender o significado dos símbolos nas equações do 2.º grau e acrescentam que um aspeto que pode melhorar a compreensão é apresentar equações não apenas na forma canónica mas também noutras formas, salientando que este aspeto pode ainda promover um melhor entendimento de técnicas de factorização. Por outro lado, salientam que se o professor encorajar os alunos a utilizar diferentes técnicas na resolução de equações do 2.º grau pode melhorar a compreensão que os alunos têm dessas equações. No seu estudo, com alunos do 10.º ano, Didiş *et al*. (2011) verificaram ainda que os alunos ao aplicarem a lei do anulamento do produto ignoravam o fator nulo, tendo recomendado que é importante que o professor proporcione tarefas que levem os alunos a compreenderem e a assumirem este fator em vez de apresentar esta técnica apenas como uma regra.

Estes aspetos também foram tidos em consideração na planificação deste tópico. Na figura 1 apresenta-se uma imagem, com o ambiente da sala de aula, durante a resolução de uma tarefa com a folha de cálculo.



Figura 1: Turma durante a resolução da tarefa D-3 com a folha de cálculo

Metodologia de investigação

Abordagem e design. No presente estudo pretendemos compreender o contributo da folha de cálculo no desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 9.º ano, no estudo do tópico equações do 2.º grau. Para tal é indispensável auferir uma visão holística dos fenómenos em estudo, razão pelo qual optámos por uma metodologia qualitativa. Dada a natureza do trabalho, a metodologia segue o paradigma interpretativo uma vez que pretendemos estudar o fenómeno em toda a sua complexidade e no seu contexto natural (Bogdan & Biklen, 1994). Esta investigação segue um *design* de *experiência de ensino* com recurso a estudos de caso, onde a primeira autora, assume o duplo papel de professora da turma e investigadora.

Recolha e análise de dados. A recolha documental ocupa um lugar de grande relevo, pois constituiu uma fonte privilegiada para a obtenção de informação. Em sala de aula, procedeu-se à recolha das produções dos alunos, à captura dos ecrãs dos computadores, à gravação áudio dos diálogos e à observação participante traduzida em notas de campo. A análise de dados envolveu essencialmente análise de conteúdo (Bardin, 1977). Depois de transcritas as gravações áudio, os registos da sequência de *frames* no Excel e as entrevistas, procedemos à sua análise.

Resultados

Apresentam-se de seguida alguns exemplos de tarefas, dando especial atenção a duas que foram propostas para explorar na folha de cálculo. Destacamos nas produções de uma aluna, Ana, aspetos que se revelaram cruciais no desenvolvimento do seu pensamento algébrico.

Tarefa A-3. Nesta tarefa, de diagnóstico, Ana conseguiu determinar termos próximos e distantes e ainda o termo geral de uma sequência em que expressão geradora é um polinómio do 2.º grau, resolveu equações do 2.º grau incompletas utilizando a noção de raiz quadrada, no entanto não concluiu a resolução de uma equação em que deveria utilizar a lei do anulamento do produto. Na resolução de um problema que envolve uma relação entre números a aluna consegue escrever uma equação do 2.º grau que, de seguida, resolve por tentativa e erro. Quanto aos casos notáveis da multiplicação, em que foi pedido para

completar espaços em branco como mostra a figura 2, a aluna aparentemente não demonstrou dificuldades na resposta à questão colocada.

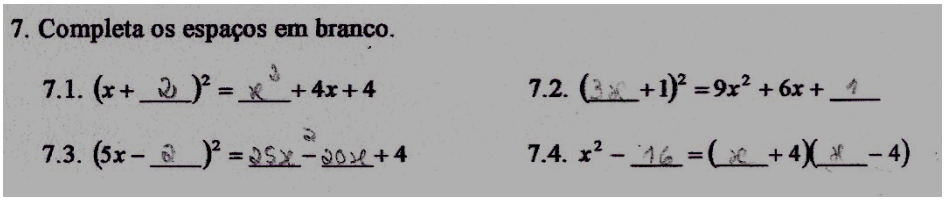


Figura 2: Resolução de Ana (ficha de diagnóstico)

Na turma, grande parte dos alunos não respondeu a esta questão e afirmou não se lembrar, pelo que a professora considerou necessário propor outras tarefas que permitissem ampliar a compreensão acerca dos casos notáveis, antes de avançar propriamente para a resolução das equações do 2.º grau completas.

Tarefa B-3. Esta tarefa, proposta para explorar na folha de cálculo, posteriormente resolvida pelos alunos, envolveu a diferença de quadrados (figura 3).

Resolve o seguinte problema no Excel. Explica todo o teu raciocínio de forma clara, apresentando todas as justificações.

1. O Carlos, a Ana e o Ricardo são três irmãos. A Ana tem um ano a mais do que o Carlos e um ano a menos do que o Ricardo.

No outro dia a Ana estava a fazer operações com os números que correspondem às suas idades e disse para os irmãos:

- Comparei o produto das vossas idades com o quadrado da minha idade e descobri uma coisa muito interessante! Vejam se também conseguem descobrir!

Figura 3: Enunciado do problema "As idades dos irmãos"

Inicialmente foi solicitado aos alunos que respondessem à questão "O que poderá Ana ter descoberto?". Ana começou logo por escrever na folha de cálculo "Ao lermos o enunciado, reparamos que o irmão mais novo é Carlos, Ricardo é o mais velho e Ana é a irmã do 'meio'". Depois facilmente introduziu os dados na folha de cálculo para obter a relação pedida no enunciado. Selecionou a idade de Ana como variável independente, na célula E5, e utilizou as fórmulas "=E5-1" para a idade de Carlos, e "=E5+1" para a idade de Ricardo. Inseriu, posteriormente, as respetivas fórmulas para o "produto das idades dos irmãos" e para o "quadrado da idade de Ana" (figuras 4 e 5).

Carlos	Ana	Ricardo	Produto das idades dos irmãos	quadrado da idade da Ana
-1	0	1	-1	0
0	1	2	0	1
1	2	3	3	4
2	3	4	8	9
3	4	5	15	16
4	5	6	24	25
5	6	7	35	36
6	7	8	48	49
7	8	9	63	64
8	9	10	80	81
9	10	11	99	100
10	11	12	120	121

Figura 4: Excerto da resolução de Ana na folha de cálculo

Carlos	Ana	Ricardo		Produto das idades dos irmãos		quadrado da idade da Ana
=E5-1	0	=E5+1		=F5*D5		=E5*E5
=E6-1	1	=E6+1		=F6*D6		=E6*E6
=E7-1	2	=E7+1		=F7*D7		=E7*E7
=E8-1	3	=E8+1		=F8*D8		=E8*E8

Figura 5: Fórmulas introduzidas na folha de cálculo

Após ter arrastado as alças das células observou os valores, descobriu a relação entre as idades dos irmãos e registou-a, como se apresenta na figura 6.

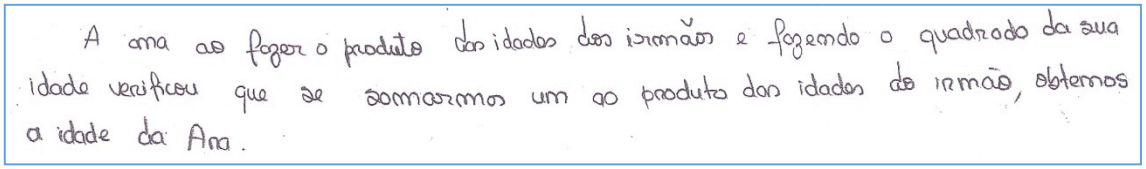

A Ana ao fazer o produto das idades dos irmãos e fazendo o quadrado da sua idade verificou que se somarmos um ao produto das idades do irmão, obtemos a idade da Ana.

Figura 6: Resposta de Ana

A aluna mostrou alguma insegurança na conclusão que tinha registado como se pode constatar pelo diálogo estabelecido com a professora:

> Ana: Eu fiz isto…
>
> Professora: Isso é válido para qualquer idade?
>
> Ana: Sim … [Com o rato, na folha de cálculo, começa a apontar e a comparar os valores das colunas "Produto das idades dos irmãos" e "quadrado da idade de Ana"] -1, 0; 0,1; 3, 4; 8, 9; 15, 16 … Acho que não é isto!
>
> Professora: Mas por que não?
>
> Ana: É um bocado esquisito…

Na questão seguinte, que pedia a explicação algébrica do resultado da alínea anterior, à semelhança de muitos colegas da turma, Ana não apresentou explicitamente a relação que existe entre as idades dos três irmãos pois não contemplou a diferença entre as idades deles, como se pode observar na figura 7.

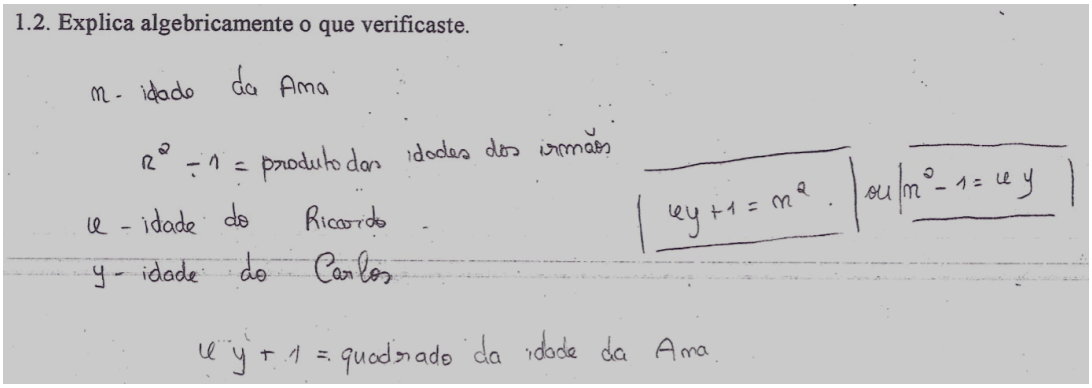


Figura 7: Resposta da aluna

A aluna apresenta uma legenda com o significado das variáveis e de início escreve igualdades que apresentam um misto de linguagem natural e expressões algébricas. Por fim apresenta duas equações equivalentes como resposta à questão.

Este foi o tipo de resolução mais comum que os alunos apresentaram na discussão. Nenhum aluno da turma expressou a relação esperada pela professora, pelo que foi necessário incentivá-los a partir da apresentação da resolução de uma aluna.

Após o questionamento da professora acerca das relações entre as idades dos irmãos, relacionando-as com o trabalho na folha de cálculo, os alunos chegaram à igualdade e a professora escreveu-a no quadro, $(a-1)(a+1)=a^2-1$. De seguida, a professora questionou a turma acerca da igualdade registada.

> Professora: Ao olharem para ali não reconhecem esta igualdade?
>
> Patrícia: É uma equação do 2.º grau.
>
> Carolina: Conhecemos, conhecemos… É uma coisa… Que…
>
> Ana: Lei do anulamento do produto…
>
> Carolina: É aquilo que a professora deu…
>
> Ana: É a lei do anulamento do produto! $a^2-1=a-1$ ou $a^2-1=a+1$
>
> Patrícia: Isto é a lei do anulamento do produto?! É do quadrado do binómio!
>
> Carolina: Oh pá eu já disse isso!… Eu não sei nada disso do quadrado do binómio!
>
> Ana: Não, não! Isso ai é outra coisa… A diferença de quadrados!
>
> Professora: É a diferença de quadrados, será?
>
> Ana: É sim por causa que… A professora até deu isso no exemplo no ano passado… Eu lembro-me um pouco disso, por causa do teste intermédio.

Este excerto do diálogo retrata alguma confusão que existe no reconhecimento da igualdade. Ana é uma das alunas que não a reconhece, à partida, apesar de na ficha de diagnóstico, que já foi corrigida, ter dado algumas evidências do seu reconhecimento. Por outro lado, lembra-se deste exemplo que foi tratado no ano passado, em particular, quando foram feitas revisões para o teste intermédio.

Os alunos não demonstraram muitas dificuldades no recurso ao resultado obtido na questão anterior para calcular produtos do tipo 29x31, 79x81, 99x101, 999x1001 que foi de seguida resolvido e discutido. Depois avançaram para a situação seguinte em que os irmãos têm 5 anos de diferença e Ana decidiu utilizar a folha de cálculo tendo descoberto que agora a diferença é de 25, assim como a maioria dos colegas. No entanto uma aluna antecipou-se e generalizou logo, dizendo em tom bem alto para toda a turma: "É sempre a diferença ao quadrado!"

Os alunos fizeram os procedimentos algébricos para explicar algebricamente a validade da igualdade e avançaram para o cálculo dos produtos do tipo 35 x 45.

Por fim na questão em que é colocada aos alunos a situação da diferença das idades entre os irmãos ser *k*, os alunos já não recorrem à folha de cálculo.

> Professora: Se a diferença entre as idades deles, em vez de ser 1, em vez de ser 5, for k, o que é que acontecerá?
>
> Ana e Carolina: a^2-k^2 [resposta em simultâneo].
>
> […]
>
> Alguns alunos: $a-k$ vezes $a+k$ é igual a a^2-k^2.
>
> Patrícia: é só substituir o 5 pelo k.

Este diálogo com a turma conduz os alunos à generalização da condição que tinham encontrado anteriormente.

Com esta tarefa foi possível, aos alunos, resolverem um problema na folha de cálculo que envolve idades e deduzirem a fórmula da diferença de quadrados que era um aspeto em que tinham sido detetadas lacunas na ficha de diagnóstico. Por outro lado, permitiu ainda aos alunos a utilização destas igualdades para realizar cálculos, mentalmente, com maior facilidade.

Tarefa D-3. Relativamente à Tarefa D-3 (figura 8), na primeira questão foi pedida a simulação do 1.º salto da bola na folha de cálculo, apresentando também a representação gráfica. Ana começou por inserir os dados na folha de cálculo para obter a altura da bola, não tendo revelado dificuldades na substituição da variável pelo respetivo valor numérico.

Ana: Primeiro temos de pôr o tempo.

Professora: E depois como sabem a altura?

Ana: Então onde está t vamos substituir pelo tempo.

1. A Carlota atirou uma bola que embateu por diversas vezes no chão.

A bola a partir do momento que tocou no chão descreveu uma trajectória em que a sua altura, em cada instante t, é dada por uma função quadrática.

Na primeira vez, que tocou no chão, a altura A da bola é dada por $A(t) = -20t^2 + 160t$ (A em centímetros e t em segundos).

Na segunda vez, a altura B da bola é dada por $B(t) = -20t^2 + 120t$ (B em centímetros e t em segundos).

Na terceira vez, a altura C da bola é dada por $C(t) = -20t^2 + 80t$ (C em centímetros e t em segundos)

Na quarta vez, a altura D é dada por $D(t) = -20t^2 + 40t$ (D em centímetros e t em segundos).

Por fim, a bola rolou no chão e parou.

Figura 8: Enunciado do problema "A bola saltitona"

No entanto na coluna relativa à altura, inicialmente, inseriu para o instante 0 o cálculo "=-20*0^2+160*0", para o instante 1 "=-20*1^2+120*1", para o instante 2 "=-20*2^2+80*2" e para o instante 3 "=-20*3^2+40*3". A representação da aluna na folha de cálculo foi reveladora de uma compreensão ainda pouco nítida do enunciado, pois era pedida a simulação do primeiro salto e a aluna recorreu também às expressões algébricas das funções que definem os restantes saltos.

Após a minha intervenção, Ana, assim como alguns dos seus colegas recorrem corretamente às expressões para os diferentes saltos.

Ana depois introduziu corretamente os dados na folha de cálculo, recorrendo a uma fórmula, como mostra na figura 9, com os quais obteve, de seguida, a representação gráfica da figura 10.

Tempo	Altura
0	0
1	140
2	240
3	300
4	320
5	300
6	240
7	140
8	0

Tempo	Altura
0	=-20*D4^2+160*D4
1	=-20*D5^2+160*D5
2	=-20*D6^2+160*D6
3	=-20*D7^2+160*D7
4	=-20*D8^2+160*D8
5	=-20*D9^2+160*D9
6	=-20*D10^2+160*D10
7	=-20*D11^2+160*D11
8	=-20*D12^2+160*D12

Figura 9: Resolução da aluna na folha de cálculo e fórmula utilizada

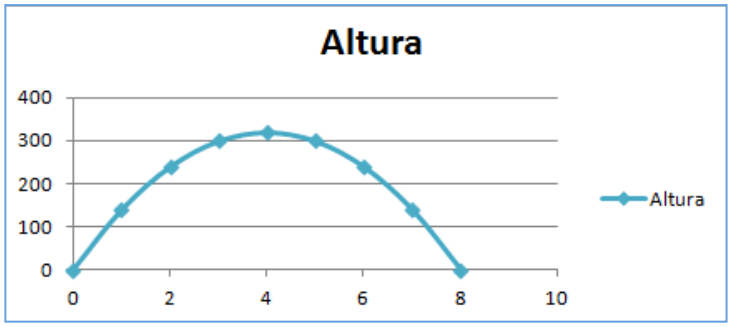
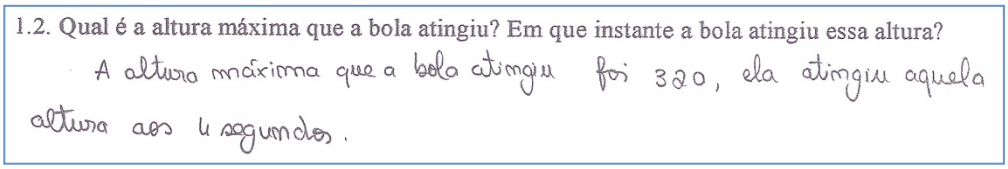


Figura 10: Representação gráfica obtida por Ana do 1.º salto da bola

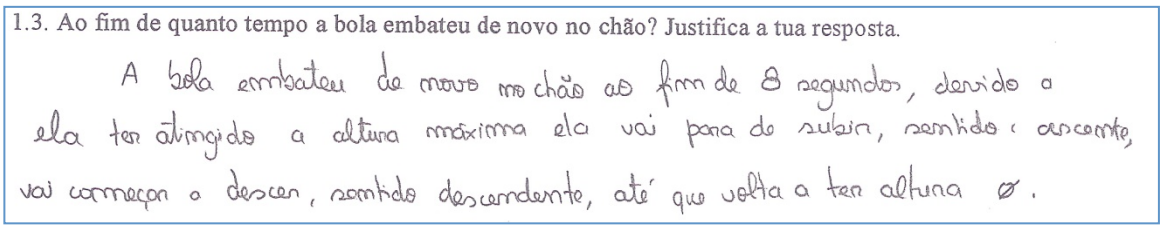
Nas questões seguintes, em articulação com o trabalho realizado na folha de cálculo, os registos com lápis e papel tiveram também o seu lugar, nomeadamente para indicar a altura máxima que a bola atingiu e o instante em que isso aconteceu, como se apresenta na figura 11 a resposta de Ana.


1.2. Qual é a altura máxima que a bola atingiu? Em que instante a bola atingiu essa altura?

A altura máxima que a bola atingiu foi 320, ela atingiu aquela altura aos 4 segundos.

Figura 11: Resposta de Ana

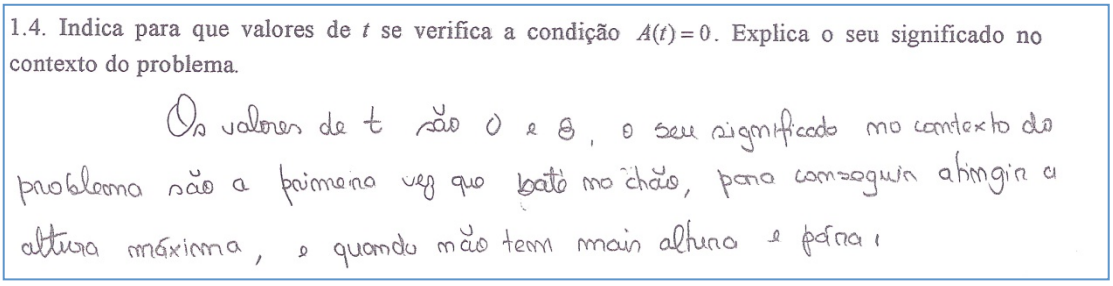
De seguida surgiu uma questão relacionada com tempo que a bola demorou a embater no chão. Na figura 12 podemos observar a resposta de Ana, que não apresenta dificuldades.


1.3. Ao fim de quanto tempo a bola embateu de novo no chão? Justifica a tua resposta.

A bola embateu de novo no chão ao fim de 8 segundos, devido a ela ter atingido a altura máxima ela vai para de subir, sentido ↑ ascendente, vai começar a descer, sentido descendente, até que volta a ter altura 0.

Figura 12: Resposta de Ana

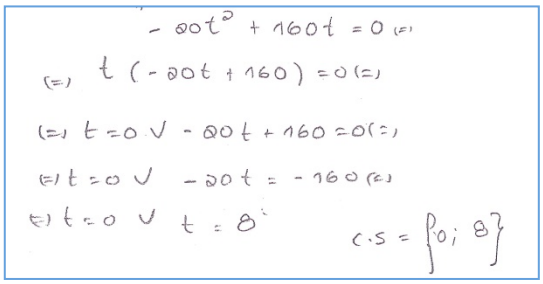
Com a questão 1.4 já se pretende que os alunos interpretem uma condição no contexto do problema. Ana na sua resposta, apresentada na figura 13, não demonstra dificuldades na interpretação da condição. No entanto a sua explicação não é muito clara pois a bola não pára.


1.4. Indica para que valores de t se verifica a condição $A(t)=0$. Explica o seu significado no contexto do problema.

Os valores de t são 0 e 8, o seu significado no contexto do problema são a primeira vez que bate no chão, para conseguir atingir a altura máxima, e quando não tem mais altura e para.

Figura 13: Resposta de Ana

Na questão 1.4, aquando da sua discussão para além do que era solicitado no enunciado foi pedido ainda aos alunos para justificarem algebricamente os valores de *t*. Contrariamente a grande parte dos alunos da turma, Ana rapidamente resolveu a equação recorrendo corretamente à lei do anulamento do produto, como mostra a figura 14.


$-20t^2+160t=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t(-20t+160)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=0 \vee -20t+160=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=0 \vee -20t=-160 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t=0 \vee t=8$

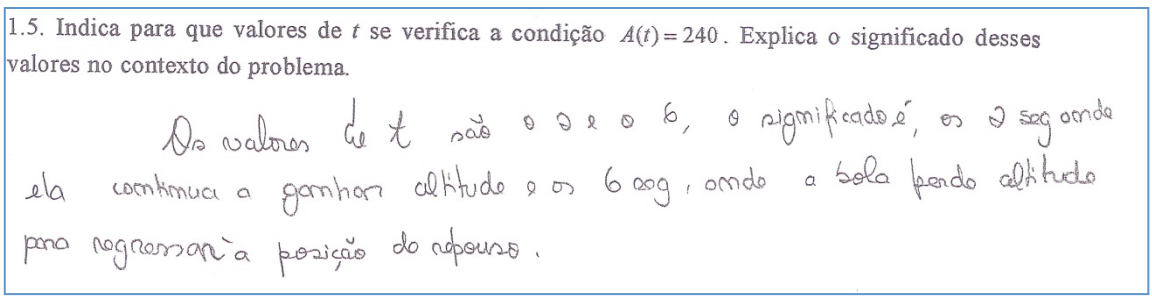
$C.S=\{0;8\}$

Figura 14: Resposta de Ana

A professora reforça ainda a conexão entre as representações que os alunos têm presentes (dados da tabela, representação gráfica e algébrica) para uma ampliação da compreensão do significado da solução da equação.

> Professora: … Vocês já tinham respondido a esta questão observando a tabela e observado o gráfico. Agora têm uma resolução algébrica. … No vosso gráfico quando é que a parábola intersecta o eixo dos xx?
>
> Turma: No 0 e 8.
>
> Professora: Portanto significa que 0 e 8 são as raízes ou as soluções daquela equação que ali está.

Na resposta à questão 1.5, apresentada na figura 15, Ana apesar de indicar corretamente os valores para *t*, revela algumas dificuldades na explicação do significado dos valores encontrados. Estas dificuldades parecem ter sido clarificadas no momento da discussão com a turma.


1.5. Indica para que valores de t se verifica a condição $A(t)=240$. Explica o significado desses valores no contexto do problema.

Os valores de t são o 2 e o 6, o significado é, os 2 seg onde ela continua a ganhar altitude e os 6 seg, onde a bola perde altitude para regressar à posição do repouso.

Figura 15: Resposta de Ana à questão 1.5

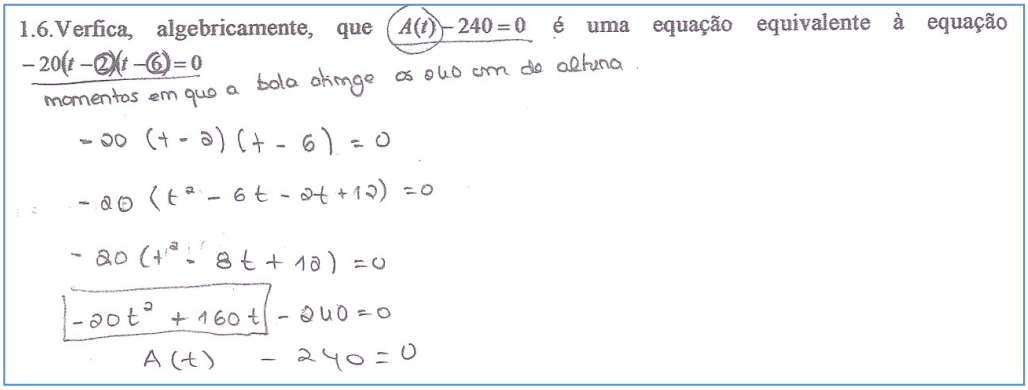


Figura 16: Resposta de Ana à questão 1.6

Muitos alunos demonstraram dificuldades na resolução da questão 1.6, apresentada na figura 16, sendo que inicialmente alguns não a resolveram. Ana conseguiu resolver até ao penúltimo passo. Dadas as dificuldades dos alunos e uma vez que alguns já tinham conseguido resolver, uma aluna, a pedido da professora, foi ao quadro e apresentou a sua resolução, acompanhada pela explicação do seu processo de resolução. A professora explicou, por fim, que é possível escrever uma equação do segundo grau como um produto de fatores, deixando visíveis as suas soluções, ou seja, na forma $c(x-r_1)(x-r_2)=0$, onde *c* é uma constante e r_1 e r_2 são as raízes.

Conclusão

A integração da folha de cálculo nesta experiência de ensino teve em atenção as orientações curriculares atuais e também o facto de esta ferramenta facilitar o desenvolvimento do pensamento algébrico. O trabalho realizado anteriormente com os alunos da turma permitiu-lhes alguma familiaridade com a folha de cálculo, uma vez que o vocabulário utilizado neste ambiente é distante do habitual em Matemática – "o utilizador tem de ser ele próprio a criar uma linguagem, pois não existe uma tradução oficial para o ajudar" (Haspekian, 2003, p. 123). Quando o professor de Matemática assume esta função, este tem de procurar construir este vocabulário com os seus alunos: o que representa uma célula, uma coluna, uma fórmula, o que significa arrastar para baixo a alça de uma célula com uma fórmula, o que é o *feedback* numérico devolvido pelo computador, etc.

No estudo do tópico, na folha de cálculo, Ana procedeu à nomeação de colunas, o que lhe permitiu identificar as variáveis presentes nos problemas. Este processo de nomeação de colunas, que permite identificar um conjunto de números com um único nome dá uma imagem da variável, fornece um suporte de apoio importante para a atividade de lápis e papel, sendo uma ação que faz refletir os alunos, permitindo-lhes compreender o seu significado matemático (Wilson, 2007).

Após a nomeação de colunas, Ana prosseguiu para o estabelecimento das relações entre as variáveis identificadas, através da geração de variáveis coluna. Este procedimento associa-se à facilidade de experimentação que o Excel faculta no arrastamento de variáveis célula, assim como, à necessidade da existência de um processo de reflexão (Wilson, 2007). Estas representações, na folha de cálculo, assentes no estabelecimento de relações funcionais possibilitaram-lhe o estabelecimento de relações necessárias que lhe facilitaram a obtenção das respostas pretendidas, o que vem ao encontro daquilo que Dettori *et al*. (2001) afirmam relativamente ao estabelecimento de relações entre variáveis presentes nos problemas com a folha de cálculo. Por outro lado, a folha de cálculo induziu a aluna, assim como os seus colegas,

num processo de generalização característico deste recurso, destacado por Calder (2009) e Dettori *et al*. (2001).

As tarefas propostas incentivaram o estabelecimento de conexões entre o trabalho realizado com a folha de cálculo e com lápis e papel. A folha de cálculo permitiu um primeiro contato com a representação gráfica de uma função quadrática. Esta representação, em paralelo com a tabela, e com as representações em linguagem natural, com lápis e papel, possibilitou a Ana a compreensão do significado de resolver uma equação do 2.º grau mesmo antes da aprendizagem formal. Salientam-se também as conclusões a que a aluna chegou, com lápis e papel, recorrendo à linguagem algébrica formal, nomeadamente na resolução de equações. Este tipo de conexões foi essencial para o desenvolvimento do seu pensamento algébrico como é destacado por Dettori *et al*. (2001). O trabalho, nestes dois ambientes, proporcionou a Ana a compreensão do significado de factorização de uma equação do 2.º grau a partir das suas raízes ou zeros. Segundo Vaiyavutjamai e Clements (2006) e Didiş *et al*. (2011), os alunos devem resolver tarefas que levem os à compressão dos significados ao invés de se limitarem a aplicar apenas procedimentos memorizados.

Destacamos assim que o ambiente proporcionado pela folha de cálculo se mostrou propício para o desenvolvimento do pensamento algébrico da aluna, no estudo do tópico, sem o constrangimento do uso do simbolismo algébrico (Zazkis & Liljedahl, 2002) tendo também proporcionado a compreensão do significado deste tipo de escrita com lápis em papel. Ana, apesar de não ter demonstrado muitas dificuldades na ficha de diagnóstico, apresentava alguma dificuldade, por exemplo, em relação à diferença de quadrados. Aparentemente, a aluna, no ano letivo anterior apenas desenvolveu uma compreensão instrumental da diferença de quadrados pois reconhece o exemplo mostrado apenas por se lembrar que era o mesmo que tinha sido dado aquando do estudo para o teste intermédio. A folha de cálculo permitiu desenvolver uma compreensão relacional (Skemp, 1976) da diferença de quadrados, que depois usou em situações novas, como no cálculo de produtos. Permitiu ainda ampliar a sua compreensão relacional no que respeita ao significado de raízes ou zeros de uma equação de 2.º grau dando fundamento às suas repostas.

Referências

Ainley, J., Bills, L., & Wilson, K. (2004). Construting meanings and utilities within algebraic tasks. In M. J. Høines & A. B. Fuglestad (Eds), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Vol. 2, pp. 1-8). Bergen, Norway: PME.

Arcavi, A. (2006) El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. In I. Vale *et al*. (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp.29-48). Lisboa: SEM-SPCE.

Bardin, L. (1977). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Calder, N. (2009). Visual tensions when mathematical tasks are encountered in a digital learning environment. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & C. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp.249-256). Athens: PME.

Dettori, G., Garuti, R., & Lemut, E. (2001). From arithmetic to algebraic thinking by using a spreadsheet. In R. Sutherland, T. Rojano, A, Bishop & R. Lins (Eds). *Perspectives on school algebra* (pp. 191-208). Dordrecht: Kluwer.

Didiş, M, Baş, S., & Erbaş, A. (2011). Students' reasoning in quadratic equations with one unknown. In M. Pytlak, E. Swoboda & T. Rowland (Eds*.), Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Rzeszów, Poland.

Haspekian, M. (2003). Instrumental approach to understand the problems of the the spreadsheet integration. In T. Triandafillidis & K. Hatzikiriakou (Eds.). *Proceedings of the 6th International Conference Technology in Mathematics Teaching* (pp. 118-124). Athens: New Technologies.

Haspekian, M. (2005). An 'instrumental approach' to study the integration of a computer tool into mathematics teaching: The case of spreadsheets. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *10*(2), 109-141.

Kieran, C. (2007). Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante*, *16*(1), 5-26.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

Rojano, T. (2002). Mathematics learning in the junior secondary school: Students' access to significant mathematical ideas. In L. English, M. B. Bussi, G. A. Jones, R. A. Lesh & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (vol. 1, pp. 143-161). New York, NY: Routledge.

Schoenfeld, A. (2008). Early algebra as mathematical sense making. In J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 479-510). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77,* 20-26.

Sutherland, R. (1993). *Project AnA: The gap between arithmetic and algebra (R000232132). Final report to ESRC*. Institute of Education, University of London.

Vaiyavutjamai, P., & Clements, M. A. (2006). Effects of classroom instruction on students' understanding of quadratic equations. *Mathematics Education Research Journal*, *18*(1), 47-77.

Wilson, K. (2007). Naming a column on a spreadsheet. *Research in Mathematics Education*, *8*, 117-132.

Zazkis, R., & Liljedhal, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, *49*, 379-402.

Este artigo faz parte do Projeto Mat@Web (Resolução de Problemas de Matemática: Perspetivas sobre uma competição interativa na Web) – Projeto financiado pela Fundação para a Ciência e Tecnologia (PTDC/CPE-CED/101635/2008).

O PENSAMENTO ALGÉBRICO E A ARITMÉTICA

Laura Bandarra Pinto
Agrupamento de Escolas Artur Gonçalves
laurabandarra@gmail.com

Resumo. Visando a transversalidade do currículo, as atuais orientações curriculares sugerem que o desenvolvimento do pensamento algébrico deve ocorrer desde o primeiro ciclo. Duas das vertentes do pensamento algébrico é a Aritmética generalizada e o Pensamento Funcional, em que se interliga a Aritmética e a Álgebra e surge a "algebrização" do currículo. O presente texto relata um estudo que incide na forma como alunos dos 5.º e 9.º anos exploram duas tarefas de natureza algébrica com recurso à folha de cálculo, e analisa que componentes do pensamento algébrico surgem no decorrer deste processo.

Palavras-chave: Pensamento algébrico, Aritmética generalizada, Pensamento funcional, "Algebrização" do currículo, Tarefas

Introdução

A Álgebra é uma poderosa ferramenta matemática, mas também é uma das áreas em que os alunos mostram mais dificuldades de aprendizagem (Radford, 2009). De acordo com a investigação, as dificuldades que os alunos manifestam na aprendizagem da álgebra escolar residem, em grande parte, na utilização de simbologia desprovida de significado, com ênfase na aplicação de regras e técnicas, visando a manipulação simbólica e com elevado grau de abstração (Canavarro, 2009; Kaput, 1999).

Para alterar este panorama e de forma a promover a aprendizagem dos conceitos algébricos com compreensão, as atuais orientações curriculares preconizam que os alunos devem desenvolver o pensamento algébrico no decorrer do ensino básico e desde os primeiros anos (ME, 2007; NCTM, 2007).

Em particular, a Álgebra surge desde o primeiro ciclo, em articulação com outros ciclos, e capacidades transversais. Valoriza-se a Aritmética generalizada e o pensamento funcional (Blanton & Kaput, 2011; Carraher & Schliemann, 2007) e privilegia-se o significado e a compreensão dos conceitos (Kaput, 2008; ME, 2007; NCTM, 2007; Ponte, 2006).

Blanton e Kaput (2005) definem o pensamento algébrico como um processo pelo qual os alunos generalizam as ideias matemáticas a partir de casos particulares, estabelecem essas generalizações através do discurso argumentativo, e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequada à sua idade. Neste contexto, pensar algebricamente não implica obrigatoriamente a utilização da simbologia algébrica (Radford, 2000), mas reside em generalizar aspetos particulares, elevando o raciocínio ou comunicação a um nível onde o foco já não são os casos ou situações em si mesmas, mas antes os padrões, procedimentos, estruturas, e as relações através de e entre eles (que por sua vez se tornam novos objetos de nível superior para o raciocínio ou comunicação) (Kaput, 1999).

A esta forma de encarar o pensamento algébrico encontram-se subjacentes as ideias de generalização e formalização e surgem dois aspetos distintos, que contrastam com a imagem tradicional da álgebra escolar centrada na manipulação formal destituída de significado. Um primeiro aspeto relaciona-se com o facto de existirem outras formas para além da simbólica dos alunos poderem se exprimir algebricamente, tais como a linguagem natural, os diagramas, as tabelas, as expressões numéricas e os gráficos (Carraher & Schliemann, 2007; Kieran, 2007).

O segundo tem a ver com a ênfase na compreensão e a produção de significados para os símbolos, em que o pensamento algébrico surge associado à generalização de ideias gerais resultantes de um raciocínio com compreensão.

Pelo atrás exposto, torna-se relevante analisar que componentes do pensamento algébrico os alunos mobilizam quando exploram tarefas de natureza algébrica.

Neste documento, descreve-se a análise de algumas produções efetuadas pelos alunos dos 5.º e 9.º anos, no decorrer da exploração dessas situações. O objetivo primordial é perceber como generalizam e formalizam as situações, ou seja, que formas do pensamento algébrico manifestam quando resolvem tarefas com recurso à folha de cálculo.

Saliente-se que esta iniciativa faz parte da fase inicial de um estudo de caráter mais abrangente que a autora do artigo está a realizar sobre o conhecimento profissional que os professores de matemática mobilizam quando planificam, concretizam e refletem em torno de tarefas de natureza algébrica. A recolha de dados desta investigação iniciou-se em dezembro de 2011 e as sessões presenciais de trabalho colaborativo são gravadas em formato áudio e decorrem desde janeiro de 2012.

O pensamento algébrico e a aritmética generalizada

Uma das vertentes do pensamento algébrico é a Aritmética generalizada. Neste âmbito, o desenvolvimento do pensamento algébrico ocorre desde o primeiro ciclo através do estudo da Aritmética. Privilegia-se a aprendizagem dos conceitos algébricos centrada nos números e operações, em que a compreensão da Álgebra começa na aprendizagem da Aritmética (Carraher, Schliemann & Schwartz 2008; Kaput, 2008; Kieran, 2007; Mason, 2008; Rojano, 2002).

Desta forma, os alunos que aprendem Aritmética como um domínio matemático em que entendem estruturas, fazem e testam hipóteses e operam com os símbolos, com compreensão, ficam também preparados para trabalhar com a Álgebra (Schoenfeld, 2008). O foco da Aritmética deixa de ser a abordagem de relações entre os números particulares e medidas e cálculo de respostas numéricas e passa a centrar-se nas relações entre conjuntos de números e medidas, e a descrição de relações entre variáveis.

Neste âmbito, as tabelas e a notação algébrica desempenham papéis cruciais porque permitem identificar padrões, representar múltiplos valores e compreender as relações entre dois conjuntos de variáveis. Com a concretização desta perspetiva, os alunos compreendem melhor a Aritmética e constroem as bases que permitirão uma melhor aprendizagem da Álgebra.

Para fundamentar esta "algebrização aritmética do currículo" e a introdução dos conceitos algébricos nos anos iniciais, Carraher e Schliemann (2007) verificam que os alunos do 3.º ano de escolaridade conseguem desenvolver uma notação não convencional consistente para representar os elementos e as relações, na resolução de problemas que envolvem quantidades conhecidas e desconhecidas, e utilizar as regras de resolução das equações.

Por sua vez, Cusi e Malara (2007), referem que a linguagem algébrica deve ser construída de uma forma progressiva, através da natural e da aritmética, em que o simbolismo algébrico é obtido através de refinamentos. Para atingir este objetivo, consideram que, desde os primeiros anos de escolaridade, os alunos devem trabalhar com os números na forma canónica e não canónica, analisar as diferenças entre representações e resoluções algébricas e utilizar os diversos significados do sinal de "=", nomeadamente o de operador e identidade. Em relação às alterações metodológicas a realizar, estas investigadoras sugerem a concretização de um

"contrato didático" em que os alunos aprendem gradualmente a linguagem algébrica, refletindo sobre a utilização das letras, a compreensão do sinal de "=", as infinitas representações numéricas e a identificação das propriedades aritméticas. Para além disto, enunciam, ainda, a necessidade de se construir o conhecimento e a linguagem matemática de uma forma conjunta, através da reflexão e discussão coletiva dos alunos.

De acordo com Blanton e Kaput (2003), a "algebrização do currículo " envolve três mudanças nas práticas letivas, nomeadamente a "algebrização" de materiais já existentes, o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos e a criação de uma cultura de sala de aula e de escola que promova o pensamento algébrico. A "algebrização" de materiais consiste na transformação de tarefas de natureza aritmética e de problemas com palavras de resposta numérica em situações que promovam a construção de padrões, e a elaboração de conjeturas, generalizações e justificações matemáticas de factos e relações. A par desta "algebrização de tarefa", na sala de aula, o professor deve colocar algumas questões que proporcionem a explicitação e o suporte do raciocínio algébrico, nomeadamente "Diz-me o que pensas?", "Resolves-te isto de outra forma?", "Como é que sabes que isto é verdade?", "Será que isto funciona sempre?", pois uma prática de sala de aula que favorece a conjetura, a argumentação e a generalização contribui para a "algebrização" das tarefas e a valorização do pensamento dos alunos.

O pensamento funcional

Blanton e Kaput (2011) consideram que uma outra forma de fomentar o pensamento algébrico, desde os primeiros anos, é quando o currículo e o ensino oferecem oportunidades de os alunos desenvolverem o pensamento funcional. Para estes investigadores, os alunos que conseguem obter ideias abstratas enraizadas na compreensão e nos acontecimentos concretos são aqueles que, nos primeiros anos, desenvolvem representações e linguagens para analisar, descrever e simbolizar padrões e relações, transformam as estruturas matemáticas e os símbolos de objetos opacos a transparentes (Kaput, 1995), e integram o concreto, o táctil e as experiências visuais para sustentar o desenvolvimento da compreensão matemática.

Blanton e Kaput (2011) consideram que o pensamento funcional engloba construir e generalizar padrões e relações, usando diversas linguagens e representações e tratar as generalizações como objetos matemáticos úteis para si próprios, sendo este aspeto necessário à compreensão dos conceitos algébricos formais.

Para fundamentar que este tipo de pensamento pode ser desenvolvido, desde os primeiros anos, estes autores analisam as representações que os alunos utilizam, a evolução da linguagem natural que empregam para descrever relações funcionais, a forma como selecionam e controlam os dados, as operações que utilizam para interpretar relações funcionais e a forma como expressam a covariação e a relação entre quantidades. Em particular, em relação às representações e à notação, Blanton e Kaput (2011) concluem que os alunos necessitam de interagir com ideias matemáticas complexas, negociar um novo sistema de notação e compreender e utilizar as representações como objetos do raciocínio matemático. Desta forma, a introdução dessas componentes nos primeiros anos ajuda a aumentar a capacidade cognitiva dos alunos e permite-lhes organizar relações de covariação e de correspondência. Assim, ao dar a hipótese aos alunos de começarem a utilizar as representações simbólicas, desde cedo, permite que eles explorem ideias mais complexas, nos anos seguintes. Por exemplo, no terceiro ano de escolaridade, os alunos já conseguem não só simbolizar, mas também descrever e discutir relações funcionais.

Na perspetiva destes investigadores, para desenvolver o pensamento funcional, é necessário que as normas sócio matemáticas estabelecidas na sala de aula pressuponham conjeturar, argumentar e generalizar de uma forma intencional, onde os argumentos são considerados pelos alunos como uma forma de construírem o seu conhecimento, com confiança. Referem que para isto, é necessário que os professores possuam um "sentido algébrico" que permita identificar as ocasiões em que as tarefas aritméticas se podem relacionar com as generalizações matemáticas e consigam interpretar os registos e os discursos dos alunos. Assim, quando os professores conseguem transformar as tarefas aritméticas em oportunidades para estabelecer e expressar generalizações, eles ultrapassam as restrições impostas pela cultura de escola, os recursos limitados e a falta de experiência em trabalhar com situações que desenvolvem o pensamento algébrico, e constatam que este é uma forma de pensamento presente em toda a matemática.

Em suma, ao focarem-se no pensamento funcional dos alunos, os professores desenvolvem-se profissionalmente porque possuem a capacidade de identificar oportunidades de sala de aula para generalizar, compreender as representações, as ferramentas linguísticas e simbólicas que suportam o raciocínio algébrico dos alunos. Ficam, ainda, com a capacidade de negociar o ensino e o conhecimento matemático com a comunidade de prática em que se inserem, de forma a desenvolverem o seu próprio conhecimento sobre o ensino e a aprendizagem da Álgebra.

As tarefas e a tecnologia

O computador poderá ser um bom recurso para relacionar a linguagem algébrica e a numérica permitindo o estabelecimento de conexões entre a Álgebra e os Números e Operações.

De acordo com os *Princípios e normas para a Matemática escolar* (NCTM, 2007), a utilização da tecnologia permite visualizar noções básicas sob diferentes perspetivas, enriquecendo a atividade matemática. A folha de cálculo, o Geogebra e as applets (aplicações) "são muito úteis para promover a aprendizagem de aspetos específicos da Álgebra" (Ponte, Branco & Matos, 2009, p. 17).

Em particular, a folha de cálculo permite organizar e analisar dados e criar sequências de números, explorar o significado de tendências nos dados e usar diferentes representações para as mostrar. Permite, ainda, interligar o simbolismo algébrico e o sistema de notação verbal informal (Tabach,Hershkowitz, Arcavi & Dreyfus, 2008). Sobre este último aspeto, Rojano (2002) refere que a folha de cálculo é um bom instrumento de mediação semiótica, que ocupa uma posição intermédia entre a Aritmética e a Álgebra e permite que os alunos passem dos intuitivos métodos aritméticos para os algébricos. Salienta que a utilização desta ferramenta possibilita representar as relações de diferentes formas (linguagem natural, expressões analíticas, linguagem aritmética, representação gráfica, fórmulas intrínsecas à folha de cálculo) e compreender a noção de *variável*, utilizando as funcionalidades dos conceitos *variável célula* e *variável coluna*: (i) *variável célula* - a letra *A*2 pode representar uma variável, um valor concreto, uma referência geográfica ou material, ou uma variável abstrata; (ii) *variável coluna,* gerada através de uma fórmula, pode também representar a variável de uma nova expressão contida em uma outra célula.

No entanto, a autora adverte que, por vezes, os alunos não reconhecem que a notação *A*2 representa uma variável. Sobre este assunto, Wilson, Ainley e Bills (2005) consideram que designar a coluna de valores por uma letra contribui para a compreensão da noção de *variável* e, consequentemente, a evolução da compreensão em Álgebra.

Metodologia

Tendo em conta o propósito, objetivo e a natureza dos resultados finais que se pretendem obter, este estudo possui natureza qualitativa, na modalidade de estudo de caso instrumental, com características descritivas (Merriam, 1988; Stake, 2009). Neste caso, temos o estudo de dois casos, uma turma do 5.º ano e uma do 9.º ano do concelho de Torres Novas.

As turmas. As turmas de 5.º e 9.º anos envolvidas neste estudo são heterogéneas e a maioria dos alunos manifesta algumas dificuldades de aprendizagem e compreensão dos conceitos matemáticos. A turma de 5.º ano é constituída por doze alunas e seis alunos e exploraram a tarefa 1, a do 9.º ano por 8 alunas e 19 alunos. Durante este ano letivo, os alunos de ambas as turmas já exploraram tarefas de investigação e desenvolveram trabalho a pares, mas não utilizaram a folha de cálculo para estudar relações funcionais.

As tarefas. Os enunciados das tarefas 1 e 2 (em anexo) exploradas nas turmas dos 5.º e 9.º anos, respetivamente, resultam de uma adaptação de uma proposta de um manual do 5.º ano de escolaridade. A elaboração deste material decorreu numa das sessões de trabalho colaborativo que a investigadora (a autora deste texto) e duas professoras de duas escolas distintas do distrito de Santarém dinamizam no âmbito da realização de um estudo de caracter mais abrangente. A investigadora é a professora titular da turma do 9.º ano e as aulas de 5.º ano são ministradas por uma das professoras que integra a equipa de trabalho colaborativo.

Na tarefa 1, os alunos do 5.º ano utilizam a folha de cálculo para obter as dízimas resultantes das frações de denominador 11 e verificam as regularidades existentes nos resultados obtidos. Por sua vez, na tarefa 2, os alunos do 9.ºano recorrem à folha de cálculo para analisar as regularidades que se observam nas dízimas resultantes das frações de numeradores e denominadores inferiores a 20.

A análise de dados. Neste documento, a investigadora analisa algumas produções efetuadas pelos alunos dos 5.º e 9.º anos, no decorrer da exploração dessas situações. Para perceber que componentes do pensamento algébrico se manifestam quando os alunos exploram tarefas de natureza algébrica e recorrem à utilização da folha de cálculo, utiliza-se uma categorização das formas de pensamento algébrico presente na literatura (Quadro 1).

Quadro 1 - Categorização das formas de pensamento algébrico (Blanton & Kaput, 2005; Kaput, 2008)

Aritmética generalizada	**Explorar propriedades e relações entre os números inteiros**
	Explorar as propriedades das operações nos números inteiros
	Explorar a igualdade para expressar uma relação entre quantidades
	Tratar algebricamente os números
	Resolver igualdades com valores desconhecidos
Pensamento funcional	Simbolizar quantidades e operar com expressões simbólicas
	Representar dados graficamente
	Determinar relações funcionais
	Determinar valores desconhecidos usando dados conhecidos
	Identificar e descrever padrões numéricos e geométricos

Resultados obtidos

As produções dos alunos do 5.º ano

Na questão 2.3., os alunos do 5.º ano utilizam a folha de cálculo para realizar cálculos morosos e verificar que regularidades existem nas dízimas que resultam das frações de denominador 11. No decorrer da exploração da tarefa, a professora da turma verifica que os alunos manifestam dificuldades em formalizar os raciocínios e apenas alguns expressam as suas ideias em linguagem natural.

João relaciona os numeradores e denominadores das frações e verifica quais as frações que representam números inteiros.

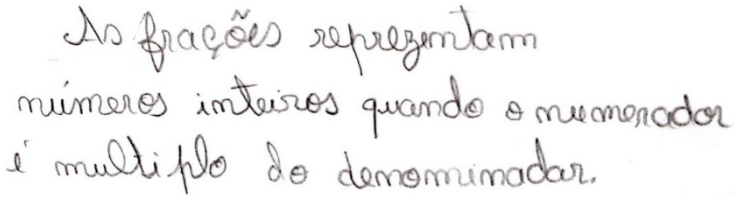


Figura 1 – Resolução do João

Já Margarida verifica que qualquer fração em que o numerador é múltiplo do denominador representa um número inteiro e expressa esta generalização através da linguagem natural.

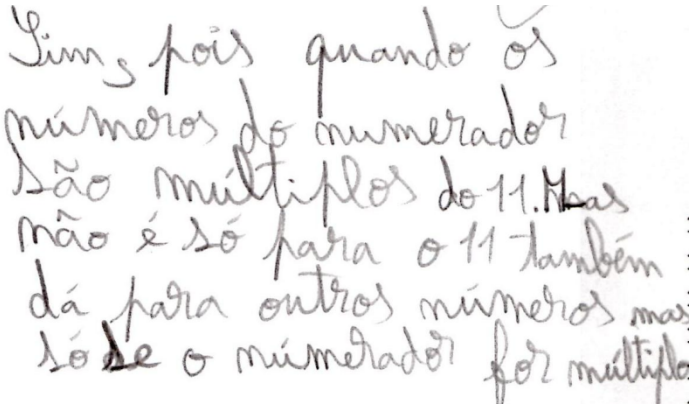


Figura 2 – Resolução da Margarida

Por sua vez, Vasco relaciona as noções de *dízima* e *adição de frações*, pois verifica que a regularidade existente nas dízimas obtidas ocorre quando se adicionam as frações de numerador natural inferior a dez aos números naturais.

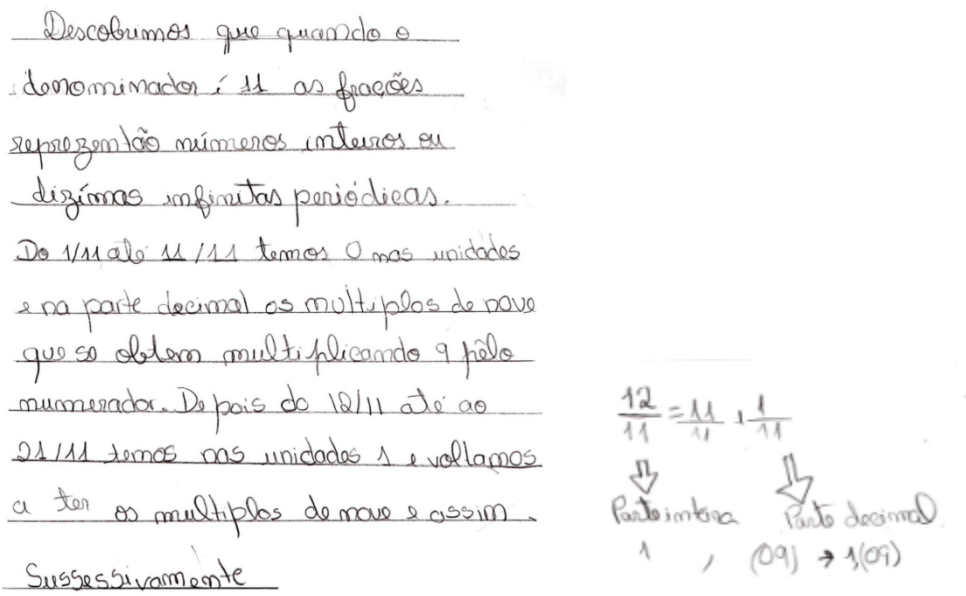


Figura 3 – Resolução do Vasco

Em termos globais, estes alunos identificam a estrutura matemática da situação, estabelecem relações numéricas, generalizam uma regra para determinação da dízima de qualquer fração de denominador 11 e expressam este raciocínio em linguagem natural. No decorrer deste processo, os alunos exploram propriedades e relações entre números inteiros e tratam algebricamente os números.

As produções dos alunos do 9.ºano. Utilizando a folha de cálculo, os alunos do 9.º ano constroem uma tabela e atribuem valores naturais inferiores a 20 aos numeradores e denominadores das frações (Figura 4).

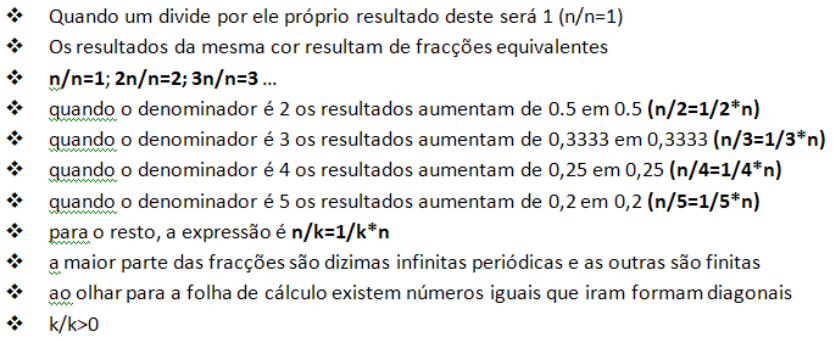
	Coluna2	Coluna3	Coluna4	Coluna5	Coluna6	Coluna7	Coluna8	Coluna9	Coluna10	Coluna11	Coluna12	Coluna13	Coluna14	Coluna15
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	0,5	0,3333333	0,25	0,2	0,1666667	0,1428571	0,125	0,1111111	0,1	0,09090909	0,08333333	0,07692308	0,07142857	0,06666667
2	1	0,6666667	0,5	0,4	0,3333333	0,2857143	0,25	0,2222222	0,2	0,18181818	0,16666667	0,15384615	0,14285714	0,13333333
3	1,5	1	0,75	0,6	0,5	0,4285714	0,375	0,3333333	0,3	0,27272727	0,25	0,23076923	0,21428571	0,2
4	2	1,3333333	1	0,8	0,6666667	0,5714286	0,5	0,4444444	0,4	0,36363636	0,33333333	0,30769231	0,28571429	0,26666667
5	2,5	1,6666667	1,25	1	0,8333333	0,7142857	0,625	0,5555556	0,5	0,45454545	0,41666667	0,38461538	0,35714286	0,33333333
6	3	2	1,5	1,2	1	0,8571429	0,75	0,6666667	0,6	0,54545455	0,5	0,46153846	0,42857143	0,4
7	3,5	2,3333333	1,75	1,4	1,1666667	1	0,875	0,7777778	0,7	0,63636364	0,58333333	0,53846154	0,5	0,46666667
8	4	2,6666667	2	1,6	1,3333333	1,1428571	1	0,8888889	0,8	0,72727273	0,66666667	0,61538462	0,57142857	0,53333333
9	4,5	3	2,25	1,8	1,5	1,2857143	1,125	1	0,9	0,81818182	0,75	0,69230769	0,64285714	0,6
10	5	3,3333333	2,5	2	1,6666667	1,4285714	1,25	1,1111111	1	0,90909091	0,83333333	0,76923077	0,71428571	0,66666667
11	5,5	3,6666667	2,75	2,2	1,8333333	1,5714286	1,375	1,2222222	1,1	1	0,91666667	0,84615385	0,78571429	0,73333333
12	6	4	3	2,4	2	1,7142857	1,5	1,3333333	1,2	1,09090909	1	0,92307692	0,85714286	0,8
13	6,5	4,3333333	3,25	2,6	2,1666667	1,8571429	1,625	1,4444444	1,3	1,18181818	1,08333333	1	0,92857143	0,86666667
14	7	4,6666667	3,5	2,8	2,3333333	2	1,75	1,5555556	1,4	1,27272727	1,16666667	1,07692308	1	0,93333333
15	7,5	5	3,75	3	2,5	2,1428571	1,875	1,6666667	1,5	1,36363636	1,25	1,15384615	1,07142857	1
16	8	5,3333333	4	3,2	2,6666667	2,2857143	2	1,7777778	1,6	1,45454545	1,33333333	1,23076923	1,14285714	1,06666667
17	8,5	5,6666667	4,25	3,4	2,8333333	2,4285714	2,125	1,8888889	1,7	1,54545455	1,41666667	1,30769231	1,21428571	1,13333333
18	9	6	4,5	3,6	3	2,5714286	2,25	2	1,8	1,63636364	1,5	1,38461538	1,28571429	1,2
19	9,5	6,3333333	4,75	3,8	3,1666667	2,7142857	2,375	2,1111111	1,9	1,72727273	1,58333333	1,46153846	1,35714286	1,26666667
20	10	6,6666667	5	4	3,3333333	2,8571429	2,5	2,2222222	2	1,81818182	1,66666667	1,53846154	1,42857143	1,33333333
21	10,5	7	5,25	4,2	3,5	3	2,625	2,3333333	2,1	1,90909091	1,75	1,61538462	1,5	1,4
22	11	7,3333333	5,5	4,4	3,6666667	3,1428571	2,75	2,4444444	2,2	2	1,83333333	1,69230769	1,57142857	1,46666667
23	11,5	7,6666667	5,75	4,6	3,8333333	3,2857143	2,875	2,5555556	2,3	2,09090909	1,91666667	1,76923077	1,64285714	1,53333333
24	12	8	6	4,8	4	3,4285714	3	2,6666667	2,4	2,18181818	2	1,84615385	1,71428571	1,6
25	12,5	8,3333333	6,25	5	4,1666667	3,5714286	3,125	2,7777778	2,5	2,27272727	2,08333333	1,92307692	1,78571429	1,66666667
26	13	8,6666667	6,5	5,2	4,3333333	3,7142857	3,25	2,8888889	2,6	2,36363636	2,16666667	2	1,85714286	1,73333333
27	13,5	9	6,75	5,4	4,5	3,8571429	3,375	3	2,7	2,45454545	2,25	2,07692308	1,92857143	1,8
28	14	9,3333333	7	5,6	4,6666667	4	3,5	3,1111111	2,8	2,54545455	2,33333333	2,15384615	2	1,86666667
29	14,5	9,6666667	7,25	5,8	4,8333333	4,1428571	3,625	3,2222222	2,9	2,63636364	2,41666667	2,23076923	2,07142857	1,93333333
30	15	10	7,5	6	5	4,2857143	3,75	3,3333333	3	2,72727273	2,5	2,30769231	2,14285714	2

Figura 4 – Resolução de André e Ana

Após a construção desta tabela, analisam as listas de números e a forma como as construíram, constatam que existem algumas regularidades e atribuem a cada uma delas uma cor distinta. Durante esta fase dos trabalhos, a professora da turma refere que é necessário generalizar e formalizar as sequências obtidas.

A maioria dos grupos verifica que as dízimas obtidas são finitas e infinitas periódicas e que a sequência dos números naturais ocorre quando o numerador é múltiplo do denominador. Alguns também constatam que todas as dízimas resultam do produto entre números naturais e as frações de numerador 1.

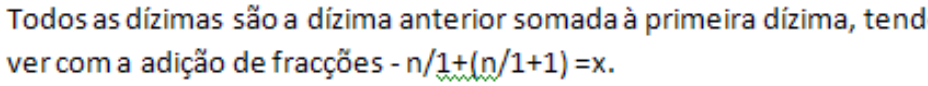
Em particular, Dinis e João generalizam e formalizam, utilizando a simbologia algébrica, as sequências de frações que representam números naturais e as restantes situações. Identificam frações equivalentes, analisam e descrevem as sequências numéricas de uma forma recursiva.



- Quando um divide por ele próprio resultado deste será 1 (n/n=1)
- Os resultados da mesma cor resultam de fracções equivalentes
- **n/n=1; 2n/n=2; 3n/n=3** …
- quando o denominador é 2 os resultados aumentam de 0.5 em 0.5 **(n/2=1/2*n)**
- quando o denominador é 3 os resultados aumentam de 0,3333 em 0,3333 **(n/3=1/3*n)**
- quando o denominador é 4 os resultados aumentam de 0,25 em 0,25 **(n/4=1/4*n)**
- quando o denominador é 5 os resultados aumentam de 0,2 em 0,2 **(n/5=1/5*n)**
- para o resto, a expressão é **n/k=1/k*n**
- a maior parte das fracções são dizimas infinitas periódicas e as outras são finitas
- ao olhar para a folha de cálculo existem números iguais que iram formam diagonais
- k/k>0

Figura 5 – Resolução de Dinis e João

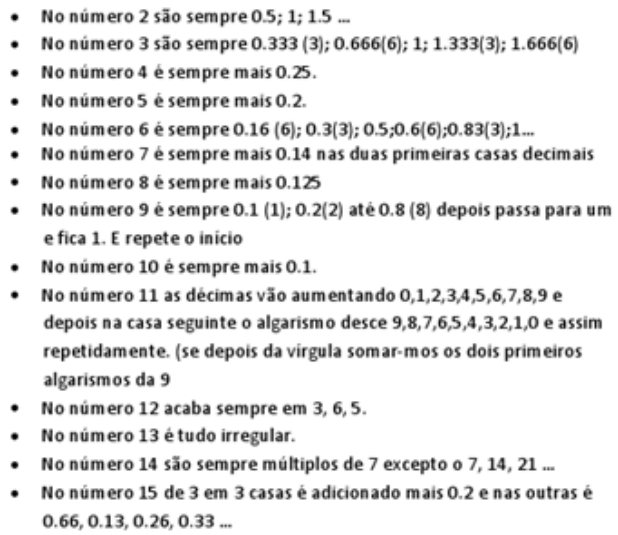
Já Conceição e Rodrigo conseguem relacionar as regularidades obtidas nas dízimas com a adição de frações e formalizam esta situação, utilizando a linguagem natural e a simbologia algébrica, mas esta surge de forma incorreta.



Todos as dízimas são a dízima anterior somada à primeira dízima, tendo isto a ver com a adição de fracções - n/1+(n/1+1) =x.

Figura 6 – Resolução de Conceição e Rodrigo

Por sua vez, Joana e a Filipa analisam as todas as dízimas obtidas, analisam a parte decimal dos valores obtidos, verificam que existem algumas regularidades, generalizam e formalizam os seus raciocínios através da linguagem natural, explorando as propriedades e relações entre números.



- No número 2 são sempre 0.5; 1; 1.5 …
- No número 3 são sempre 0.333 (3); 0.666(6); 1; 1.333(3); 1.666(6)
- No número 4 é sempre mais 0.25.
- No número 5 é sempre mais 0.2.
- No número 6 é sempre 0.16 (6); 0.3(3); 0.5;0.6(6);0.83(3);1…
- No número 7 é sempre mais 0.14 nas duas primeiras casas decimais
- No número 8 é sempre mais 0.125
- No número 9 é sempre 0.1 (1); 0.2(2) até 0.8 (8) depois passa para um e fica 1. E repete o início
- No número 10 é sempre mais 0.1.
- No número 11 as décimas vão aumentando 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 e depois na casa seguinte o algarismo desce 9,8,7,6,5,4,3,2,1,0 e assim repetidamente. (se depois da vírgula somar-mos os dois primeiros algarismos da 9
- No número 12 acaba sempre em 3, 6, 5.
- No número 13 é tudo irregular.
- No número 14 são sempre múltiplos de 7 excepto o 7, 14, 21 …
- No número 15 de 3 em 3 casas é adicionado mais 0.2 e nas outras é 0.66, 0.13, 0.26, 0.33 …

Figura 7 – Resolução de Joana e Filipa

Em termos globais, estes alunos identificam as estruturas matemáticas da situação, estabelecem e generalizam relações numéricas, e formalizam estes raciocínios, utilizando as linguagens natural e algébrica. No entanto, mostram alguma dificuldade em utilizar a simbologia algébrica para expressar a forma como pensam. Assim, ao explorarem a tarefa 2, os alunos identificam e descrevem padrões numéricos, e simbolizam quantidades.

Conclusão

A concretização simultânea de duas aulas que abordam tópicos semelhantes permite analisar de que forma os alunos dos 5.º e 9.º anos identificam a estrutura matemática das situações, estabelecem relações numéricas, generalizam os raciocínios e formalizam as situações, utilizando a linguagem natural ou a algébrica, e o recurso à folha de cálculo.

No 5.º ano, os alunos exploram propriedades e relações entre números inteiros e tratam algebricamente os números, ou seja, desenvolvem formas do pensamento algébrico relacionadas com a Aritmética generalizada (Blanton & Kaput, 2005; Kaput, 2008). Neste caso, a folha de cálculo revela-se útil porque facilita a elaboração de cálculos morosos e permite que os alunos focalizem a sua atenção sobre a regularidade observada e as propriedades das operações com números. Contudo, apenas alguns alunos conseguem formalizar os raciocínios em linguagem natural e relacionar a regularidade obtida com a adição de frações.

No 9.º ano, os alunos exploram propriedades e relações entre números inteiros, tratam algebricamente os números, identificam e descrevem padrões numéricos, e simbolizam quantidades, ou seja, desenvolvem formas do pensamento algébrico relacionadas com a Aritmética generalizada e o pensamento funcional (Blanton & Kaput, 2005; Kaput, 2008). Para explorar a Tarefa 2, a utilização da folha de cálculo torna-se proveitosa porque permite realizar cálculos morosos de forma rápida, fomenta o surgimento de relações numéricas, facilita a generalização e formalização de raciocínios. No entanto, alguns alunos mostram alguma dificuldade em utilizar a simbologia algébrica para expressar relações.

Sendo assim, no decorrer da exploração das tarefas, a folha de cálculo é utilizada, no 5.º ano, para organizar e analisar dados e criar sequências de números e, no 9.º ano, os alunos

recorrem também a esta ferramenta para explorar o significado de tendências nos dados e usar diferentes representações para as mostrar (Tabach, Hershkowitz, Arcavi & Dreyfus, 2008).

Em termos globais, a concretização desta experiência permite verificar que componentes do pensamento algébrico os alunos oriundos de dois ciclos distintos mobilizam quando exploram uma tarefa de natureza algébrica, com recurso à folha de cálculo. Nas produções dos alunos dos 5.º ano e 9.º anos surgem aspetos relacionados com a Aritmética generalizada, e também estes alunos mostram possuir raciocínios relacionados com o pensamento funcional.

Para além disto, também permite analisar a influência da natureza de uma tarefa nas explorações realizadas pelos alunos. No 9.º ano foi explorada uma tarefa mais aberta e analisadas as regularidades presentes em diversas sequências numéricas, no 5.º ano a situação proposta resume-se ao estudo das dízimas que resultam das frações de denominador 11.

Referências

Blanton, M. L., & Kaput, J. J. (2003). Developing elementary teachers' "algebra eyes and ears." *Teaching Children Mathematics, 10*(2), 70-77.

Blanton, M., & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning, *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(5), 412-446.

Blanton. M., & Kaput, J. J. (2011). Functional Thinking as a Route Into Algebra in the Elementary Grades. In J. Cai, & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 5-23). Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Canavarro, A. P. (2009). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante 16*(2), 81-118.

Carraher, D., & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 669-705). Charlotte, NC: NCTM & Information Age Publishing.

Carraher, D.W., Schliemann, A.D., & Schwartz, J.L. (2008). Early algebra is not the same as algebra early. In J. Kaput., D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 235-272). Mahwah, NJ, Erlbaum.

Cusi, A., & Malara, N. (2007). Approaching early algebra: Teachers' educational processes and classroom experiences. *Quadrante, XVI* (1), 57-80.

Kaput, J. J. (1995). A research base for algebra reform: Does one exist. In D. Owens, M. Reed, & G. M. Millsaps (Eds.), *Proceedings of the 17th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 71–94). Columbus, OH: The ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema, & T. Romberg (Orgs.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York, NY: Routledge

Kieran, C. (2007). Learning and teaching Algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F.K.Lester, Jr., (Ed.), *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Mason, J. (2008). Making Use of Children's Powers to Produce Algebraic Thinking. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.) *Algebra in the Early Grades*. (pp. 57-94). Lawrence Erlbaum. New York.

Merriam, S. (1988). *Case study research in education: A qualitative approach.* San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Ministério da Educação. (ME) (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

NCTM. (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Eds.), *Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *A Álgebra no ensino básico*. Ministério da Educação, DGIDC.

Radford, L. (2000). 'Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis', *Educational Studies in Mathematics* 42, 237–268.

Radford, L. (2009). *Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective*. Plenary Lecture presented at the Sixth Conference of European Research in Mathematics education (CERME 6). Université Claude Bernard, Lyon, France, January 28–February 1, 2009.

Rojano, T.(2002). The potential of Spreadsheets in the Learning of Algebra. *The International Journal of Educational Policy Research and Practice*, *3*(2), 91-106.

Schliemann, A.D., Carraher, D.W., & Brizuela, B. (2007). *Bringing Out the Algebraic Character of Arithmetic: From Children's Ideas to Classroom Practice.* Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. H. (2008). Early algebra as mathematical sense making. In J. J. Kaput, D. W.Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 479-510). New York:Lawrence Erlbaum Associates.

Stake, R. (2009). *A arte da investigação com estudos de caso*. Lisboa. Fundação Calouste Glubenkian.

Tabach, M., Hershkowitz, R., Arcavi, A., & Dreyfus, T. (2008). Computerized environments in mathematics classrooms. In L. English (Ed.). *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed.) (pp. 784-805). New York: Routledge.

Wilson, K., Ainley, A., & Bills, L. (2005). In H. L. Chick, & J. L. Vincent (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 321-328. Melbourne: PME.

Anexo

Tarefa 1 (5º ano)

Frações e mais frações…

1. A Eva e o Duarte estão a fazer um jogo para descobrir o número que cada fração representa.

A Eva começou pela fração $\frac{1}{3}$ e determinou o seu valor $\frac{1}{3}$ = 1:3=0,3333…

Eva: - Que engraçado! $\frac{1}{3}$ não representa um número inteiro. Dá um número infinito, em que o 3 se está sempre a repetir.

Duarte: - Então, todas as frações representam números infinitos!

1.1 E tu, concordas com o Duarte?

Escreve outras frações e com a ajuda da calculadora descobre o número que cada uma representa. Por fim, explica como pensaste para chegar à resposta.

2. Vamos agora estudar frações com denominador 11.

2.1. Usando a calculadora, representa na forma de dízima cada uma das seguintes frações:

$$\frac{1}{11} \qquad \frac{2}{11} \qquad \frac{3}{11} \qquad \frac{4}{11} \qquad \frac{5}{11} \qquad \frac{6}{11}$$

2.2 Sem usar a calculadora, conjetura como ficaram representadas, na forma de dízimas, as seguintes frações: $\frac{8}{11}$ e $\frac{9}{11}$. Explica o teu raciocínio.

2.3 Com a folha de cálculo, representa na forma de dízima outras frações de denominador 11.

2.3.1 Analisa as frações que representam números inteiros. Consegues encontrar uma regra para que isso aconteça? Explica o teu raciocínio.

2.3.2. Consegues descobrir alguma regularidade nas outras frações em que o denominador é 11? Diz-me o que estás a pensar.

Tarefa 2 (9.º ano)

Considera algumas frações de denominador inferior a 20.

Analisa as dízimas resultantes destas frações, tenta generalizar as regularidades que encontras e explica o teu raciocínio.

Nota: Para explorar esta situação podes utilizar a folha de cálculo.

A EXPLORAÇÃO DE TAREFAS MATEMÁTICAS PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO DE ALUNOS DO 4.º ANO DE ESCOLARIDADE[1]

Célia Mestre
Agrupamento de Escolas Romeu Correia
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
celiamestre@hotmail.com

Hélia Oliveira
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ul.pt

Resumo: Este texto apresenta a exploração de uma tarefa em aula, enquadrada numa prática de ensino-aprendizagem exploratório. Insere-se num estudo de implementação de uma experiência de ensino com o objetivo de promover o desenvolvimento do pensamento algébrico com alunos do 4.º ano. Em particular, este texto analisa a forma como a professora/investigadora conduziu os momentos de discussão da tarefa e de sistematização das aprendizagens, tendo em conta os objetivos matemáticos para esta aula, numa perspetiva dialógica de desenvolvimento do conhecimento matemático. A professora/investigadora assume o papel de orientadora da discussão favorecendo um papel ativo por parte dos alunos tanto na explicação das suas formas de pensamento como na compreensão das explicações dos colegas. Observa-se a existência de uma reconstrução coletiva das ideias matemáticas trabalhadas pelos grupos e a sua sistematização promovendo um consenso social na sua forma de representação.

Palavras-chave: ensino-aprendizagem exploratório, discussão coletiva, tarefas matemáticas, construção dialógica do conhecimento, pensamento algébrico.

Introdução

No âmbito da Educação Matemática em Portugal, o atual Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), representa uma inovação curricular em diversos aspetos, nomeadamente como fator de mudança nas práticas de ensino-aprendizagem da Matemática e consequentemente nas aprendizagens matemáticas que os alunos realizam (Ponte & Serrazina, 2009). Essa mudança pode ser concretizada pela passagem do ensino direto para um ensino-aprendizagem exploratório (Ponte, 2005). Embora essa prática de ensino possa conduzir a aprendizagens significativas dos alunos, ela constitui um constante desafio para o professor que o procura implementar.

Este texto incide sobre a prática da professora/investigadora em torno da realização de uma tarefa numa aula, num quadro de ensino exploratório, que pretende promover o desenvolvimento do pensamento algébrico de alunos do 4.º ano. Em particular, assumindo uma perspetiva dialógica de desenvolvimento do conhecimento matemático em sala de aula, pretende analisar-se a forma como a professora/investigadora conduziu o momento de

[1] Trabalho realizado no âmbito do Projeto P3M - *Práticas Profissionais de Professores de Matemática*, apoiado pela FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

discussão do trabalho dos alunos na tarefa e o momento de sistematização das aprendizagens, tendo em conta os objetivos matemáticos para esta aula.

Ensino-aprendizagem exploratório

A aprendizagem que os alunos fazem está dependente da atividade que realizam e da reflexão que fazem sobre a mesma (Ponte, 2005), e deste modo a seleção das tarefas que são trabalhadas em sala de aula deve ter em conta o tipo de atividade que propõe aos alunos. Assim, tarefas que conduzem a procedimentos rotineiros são diferentes de tarefas que exigem aos alunos pensar conceptualmente e que os estimulam a estabelecer conexões (Stein & Smith, 1998). De acordo com *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 1994), as tarefas matematicamente válidas devem respeitar as seguintes características: apelar à inteligência dos alunos, desenvolver a compreensão e a aptidão matemática, estimular os alunos a estabelecer conexões e a desenvolver um enquadramento coerente para as ideias matemáticas, apelar à formulação e resolução de problemas e ao raciocínio matemático, promover a comunicação sobre a Matemática, mostrar a Matemática como uma atividade humana permanente, ter em atenção diferentes experiências e predisposições dos alunos e promover o desenvolvimento da predisposição de todos os alunos para fazer Matemática. As tarefas são "um elemento fundamental na caracterização de qualquer currículo, pois elas determinam em grande medida as oportunidades de aprendizagem oferecidas aos alunos" (Ponte, 2005, p. 23).

A principal característica do ensino-aprendizagem exploratório é que promove nos alunos a descoberta e a construção do conhecimento (Ponte, 2005). Para tal, a exploração de tarefas abertas e a gestão que das mesmas se faz na aula, proporcionando aos alunos momentos de discussão entre pares e coletivamente, são oportunidades fundamentais para a construção do conhecimento.

Baxter e Williams (1996, cit. Baxter & Williams, 2010) propõem a designação do "ensino orientado pelo discurso" (*discourse-oriented teaching*, no original) para descrever as ações do professor que promovem a construção do conhecimento matemático através da comunicação entre os alunos. Os mesmos autores descrevem o ambiente de sala de aula que promove este tipo de ensino de acordo com a estrutura seguinte: (1) as tarefas matemáticas são apresentadas aos alunos; (2) os alunos trabalham na tarefa a pares ou em pequenos grupos, enquanto o professor circula pelos grupos encorajando-os, desafiando-os, questionando-os e dando-lhes sugestões, se necessário; (3) os alunos apresentam as suas resoluções à turma; (4) o professor sistematiza as apresentações. Conscientes da dificuldade inerente à implementação desta estrutura de sala de aula, os autores referem que o professor deverá promover suportes sociais que ajudem os alunos a trabalhar em conjunto. Por exemplo, os alunos devem ser encorajados a explicar as suas formas de pensamento e a compreenderem as explicações dos colegas. As regras que conduzem a esta forma de comunicação na sala de aula devem ser explicitamente identificadas e postas em prática até fazerem parte da cultura de sala de aula. À medida que os alunos interiorizam essas regras, assumem um papel de maior responsabilidade no discurso matemática de sala de aula. Baxter e Williams (2010) concluem que em salas de aula onde existe esta prática de ensino, os professores falam menos e os alunos mais do que o que seria esperado numa sala de aula de ensino mais tradicional, pois o tempo de aula é organizado de forma a que sejam dadas mais oportunidades de comunicação aos alunos, tanto em pequeno grupo como durante a discussão coletiva com toda a turma.

Tendo em conta o complexo desafio de orientar uma turma em torno de uma discussão coletiva que promova aprendizagens matemáticas significativas, Stein, Engle, Smith e Hughes

(2008) apresentam um modelo composto por cinco práticas para a orquestração de discussões coletivas: (1) antecipação das prováveis respostas dos alunos a tarefas matemáticas cognitivamente exigentes, (2) monitorização do trabalho autónomo dos alunos, (3) seleção das resoluções particulares dos alunos para apresentação durante a discussão coletiva, (4) sequenciar adequadamente as resoluções dos alunos a serem apresentadas, (5) ajudar a turma a estabelecer conexões matemáticas entre as diferentes resoluções dos alunos e entre ideias chave. Os autores consideram que as discussões coletivas devem ser impulsionadas por tarefas matemáticas cognitivamente exigentes e que o papel que o professor assume deverá permitir a construção de um sentido pessoal e coletivo das ideias matemáticas exploradas na aula. Para isso, as discussões coletivas devem suportar a aprendizagem matemática dos alunos, ajudando-os a aprender o discurso matemático, tornando o seu pensamento público para que possam construir e avaliar as suas ideias matemáticas e as dos outros (Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008).

Na perspetiva de Wells (2000) as salas de aula devem assumir-se como comunidades de investigação, onde a turma trabalha colaborativamente em torno de um mesmo objetivo, construindo dialogicamente o conhecimento e onde também o professor deve assumir-se como investigador integrante dessa comunidade. O professor, enquanto líder e organizador da comunidade de investigação, não pode evitar a responsabilidade de selecionar atividades que promovam a melhor oportunidade possível para o desenvolvimento individual e social de cada membro da comunidade. De acordo com este autor, os princípios que definem uma sala de aula enquanto comunidade de investigação numa perspetiva dialógica do conhecimento são os seguintes:

- As atividades propostas aos alunos envolvem-nos inteiramente como indivíduos em que encontram um sentido real para a sua participação. Desta forma, a aprendizagem é entendida não como simples aquisição de capacidades ou informações isoladas.
- As atividades são situadas e únicas, situadas no tempo e espaço. As atividades são influenciadas por se desenvolverem numa comunidade com indivíduos particulares que utilizam ferramentas particulares e que têm as suas próprias histórias.
- O currículo é entendido como meio e não como fim. Os saberes e capacidades prescritos no currículo são ferramentas culturais que deverão ser usadas significativamente tanto individual como socialmente.
- Os resultados de uma atividade são tanto planeados como emergentes, pois embora os objetivos da atividade sejam conhecidos, ela alimenta-se da imprevisibilidade da situação em que ocorre.
- As atividades devem permitir a diversidade e a originalidade para que promovam o desenvolvimento de cada um dos participantes, individualmente e como comunidade.

Na conceptualização de uma sala de aula enquanto comunidade de investigação, a turma trabalha colaborativamente, o conhecimento é construído dialogicamente e o currículo orientado pela perspetiva investigativa (Wells, 2000).

A promoção do desenvolvimento do pensamento algébrico na sala de aula

O pensamento algébrico pode ser encarado como um processo em que os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de exemplos particulares, estabelecem essa generalização através do discurso da argumentação, e expressam-na gradualmente de uma forma simbólica apropriada à sua idade (Blanton & Kaput, 2005). Tendo em conta a definição mais recente de pensamento algébrico apresentada por Kaput (2008), Blanton (2008) salienta

as duas vertentes que considera essenciais para uma compreensão mais abrangente desse conceito: a aritmética generalizada e o pensamento funcional. Enquanto a primeira se prende com a utilização da aritmética para desenvolver e expressar generalizações, a segunda consiste na identificação de padrões numéricos e geométricos para descrever relações funcionais.

A introdução do pensamento algébrico na escola elementar constitui uma oportunidade de construir o desenvolvimento conceptual dos conceitos matemáticos mais profundos e complexos desde os primeiros anos de escolaridade (Blanton & Kaput, 2005). A algebrização do currículo matemático na escola elementar depende da capacidade dos professores transformarem os materiais de ensino com que trabalham usualmente a aritmética, possibilitando a exploração de regularidades, a formulação de conjeturas, a generalização e a justificação matemática de factos e relações. Neste sentido, Blanton e Kaput (2005) sugerem as seguintes práticas de ensino para a construção do pensamento algébrico nos alunos: (1) integração natural e espontânea de conversas algébricas na sala de aula; (2) exploração gradual dos temas algébricos durante um significativo período de tempo; (3) integração de múltiplos e independentes processos algébricos válidos; (4) adaptação e desenvolvimento de tarefas matemáticas para promover o pensamento algébrico. Estes autores acrescentam ainda que a construção de uma prática de ensino que promova o desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos requer um significativo processo de mudança nos professores, os quais, muitas vezes, estão habituados a trabalhar a aritmética de uma forma mais enclausurada em si mesma. Ou seja, os professores devem desenvolver *olhos e ouvidos algébricos*: olhar a matemática que ensinam de uma nova perspetiva e estar atentos ao raciocínio que os alunos expressam, ouvindo-os. Desta forma, os professores serão capazes de identificar, modificar e adaptar materiais e conversações de sala de aula, explorando-os algebricamente.

Metodologia do estudo

Opções metodológicas

Os resultados apresentados neste texto inserem-se num estudo mais amplo, de implementação de uma experiência de ensino (Gravemeijer & Cobb, 2006), onde se exploraram tarefas para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos de uma turma de 4.º ano de escolaridade do 1.º Ciclo do Ensino Básico, ao longo de um ano letivo.

Este texto foca-se numa tarefa, envolvendo a exploração das relações funcionais identificadas em uma sequência pictórica crescente e incide no modelo de aula usado para implementação da tarefa analisando a atividade que a professora e os alunos desenvolveram, durantes as fases da discussão coletiva e de sistematização das aprendizagens. Para recolha dos dados, foi feita uma gravação em formato vídeo da aula e analisados os referidos momentos. A aula foi dinamizada pela investigadora deste estudo (primeira autora deste artigo), tendo a professora titular de turma assumido um papel de coadjuvante, apoiando os alunos nos diferentes pares e a segunda autora colaborado na recolha dos dados. Na análise dos dados procurou-se evidenciar o papel que a professora/investigadora e os alunos assumem durante esses momentos da aula.

A experiência de ensino

A experiência de ensino decorreu durante o ano letivo 2010/11 e foram desenvolvidas quarenta e duas tarefas, organizadas em cinco sequências de acordo com os temas e tópicos matemáticos da planificação anual definida pela professora titular de turma, respeitando a perspetiva de conceber o pensamento algébrico como um *fio condutor curricular* (NCTM,

2000), numa lógica de integração curricular. As tarefas foram introduzidas na experiência de ensino com uma média de duas tarefas por semana e com a duração de 90 minutos cada uma.

A turma onde decorreu a experiência de ensino era constituída por 19 alunos, 7 raparigas e 12 rapazes, com uma média de nove anos de idade. Embora a turma estivesse a trabalhar de acordo com o PMEB (Ponte *et al*., 2007) desde o 3.º ano de escolaridade, no início da experiência de ensino os alunos revelavam algumas dificuldades na exploração de questões que envolviam o sentido de número, privilegiando quase exclusivamente a utilização dos algoritmos na sua resolução.

As tarefas centraram-se na exploração das relações numéricas e das propriedades das operações, numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número, e tendo em conta os tópicos matemáticos do programa, como já foi referido. A exploração destas tarefas tinha como objetivos a identificação de regularidades e expressão da generalização através da linguagem natural, e a iniciação de um percurso em direção à simbolização através da passagem da linguagem natural para a linguagem matemática.

O modelo de aula desenvolvido desde o início da experiência de ensino procurou respeitar os principios do ensino exploratório, organizando a aula em quatro fases distintas: apresentação da tarefa, trabalho autonómo dos alunos, discussão coletiva e sistematização das aprendizagens. A tarefa apresentada neste texto foi a nona tarefa da quinta sequência e realizou-se no final do ano letivo. A tarefa intitulada "Os colares"[2] (Anexo I) enquadrava-se no tópico Regularidades, do tema Números e operações, e, com a sua exploração pretendia-se que os alunos fossem capazes de:

- identificar as variáveis envolvidas na sequência apresentada: número de contas azuis e número de contas vermelhas;
- reconhecer as relações entre as variáveis: o número de contas azuis é o quadruplo do número de contas vermelhas e a relação inversa;
- reconhecer que as relações de covariação e invariância se mantém ao longo da sequência: o número de contas azuis depende do número de contas vermelhas (e vice-versa) e essas relações mantém-se ao longo da sequência;
- expressar em linguagem natural e em linguagem simbólica a generalização das relações encontradas.

Apresentação dos resultados

Em seguida, é apresentada a exploração da tarefa "Os colares", como foi feita em sala de aula, nos momentos de discussão coletiva e de sistematização das aprendizagens. Apresentam-se pequenos excertos desses momentos da aula que revelam como os alunos comunicam as suas resoluções e procuram compreender as explicações dos colegas, e evidenciando o papel assumido pela investigadora na construção dialógica do conhecimento matemático.

Ao iniciar a discussão coletiva, a investigadora retoma a tarefa centrando os alunos no seu objetivo. Também relembra como os alunos que assistem à apresentação dos colegas devem proceder, incentivando-os a colocarem questões ou a fazerem comentários. Em seguida, solicita ao par Carolina e Daniel que vá mostrar como descobriu a relação entre o número de contas azuis e o número de contas vermelhas. Carolina começa a explicar a forma como resolveram a tarefa.

[2] Tarefa adaptada de Ponte, J. P., Silvestre, A. I., Garcia, C. & Costa, S. (2010).

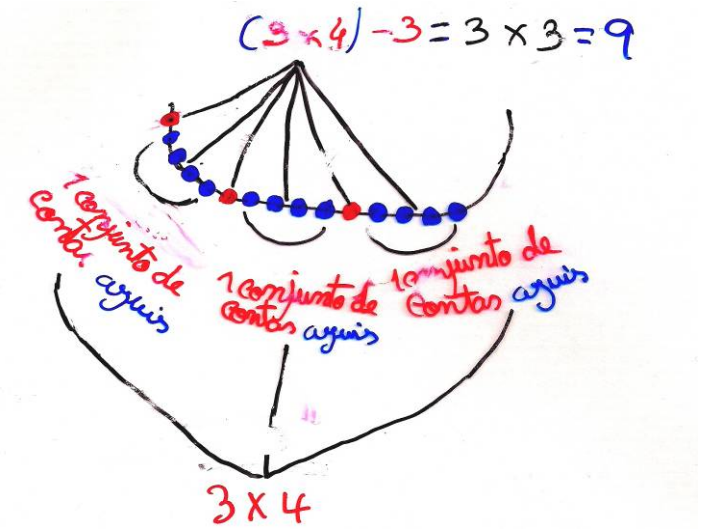


Fig. 1 - Resolução do par Carolina e Daniel.

> Carolina - Então, nós primeiro fizemos o terceiro colar, que a Maria fez. Fizemos esse exemplo e descobrimos que há três conjuntos: há o conjunto das contas azuis, que é este aqui… É um conjunto de contas azuis, um conjunto de contas azuis e um conjunto de contas azuis. Depois nós juntámos aqui e fizemos 3 vezes 4 porque cada conjunto de contas azuis tem 4 contas e fizemos 3 vezes 4. E depois em cima fizemos 3 vezes 4 menos 3 igual a 3 vezes 3, igual a 9.

Nessa altura, alguns alunos começam a manifestar-se, interpelando a colega para que explique melhor as suas ideias. A investigadora pede à Carolina que seja mais clara na sua explicação. O excerto seguinte mostra como os colegas que assistem à apresentação estão genuinamente interessados em compreender as ideias que são apresentadas pela colega.

> Carolina – Então porque azuis vem de azul e, por isso, escrevemos a azul. Então nós fizemos 3 vezes 4, é um 3 e um 4, 3 vezes 4. Menos 3 que é dos 3 vermelhos e depois igual a 3 vezes 3 porque 3 vezes 4 menos 3 é igual a 3 vezes 3. Igual a 9.
>
> Rita – Carolina, o 9 é do quê?
>
> Carolina –É do 3 vezes 3…
>
> Rita – Sim, mas o 9 vem de onde? O 9 serve para quê?
>
> Carolina – É a relação entre as contas vermelhas e as azuis.
>
> I. – Porque é que tiraste dali aquele 3? 3 vezes 4 é o quê? O que é que significa?
>
> Carolina – 3 vezes 4 é o conjunto de contas azuis mais um conjunto de contas azuis mais um conjunto de contas azuis…
>
> Gonçalo – Porque é que é o 4?
>
> Carolina – O 4 são as 4 bolas azuis…
>
> Daniel – São 3 conjuntos de 4 contas.
>
> I. – De que cor?
>
> Daniel – Azuis.

Carolina – Então 3 vezes 4 menos os 3 vermelhos que é igual a 3 vezes 3 que é igual a 9.

João – Ah, então 3 vezes 4 menos 3 é 9.

A investigadora utiliza o contexto da tarefa, solicitando à aluna que exemplifique o seu raciocínio com outros colares da sequência. Desta forma, pretende que o raciocínio deste par seja compreendido pelo maior número de alunos.

I. – É a diferença... Explica lá com os outros colares… se isso acontece com os outros colares… a ver se nós entendemos aquilo que tu dizes da diferença. O que é que acontece no primeiro colar, nessa diferença?

Carolina – Então é 4 vezes 1, que dá 4 menos 1 dá 3, a diferença é de 3.

I. – Então explica lá isso no segundo colar.

Carolina – O primeiro é 3, se for o segundo é 6, se for o terceiro é 9, se for o quarto é 12, se for o quinto é 16…

Vários alunos – Não, é 15.

I. – É 15. Aquilo que este par esteve a pensar é que a diferença vai ser sempre o quê?

Vários alunos – Três.

Em seguida, a investigadora solicita ao par António e Diogo que apresente a sua forma de resolução. Começa por referir que estes alunos usaram a tabela e que esta foi também uma representação usada por outros pares. Os alunos começam por indicar como encontraram uma relação entre o número de contas azuis de cada colar.

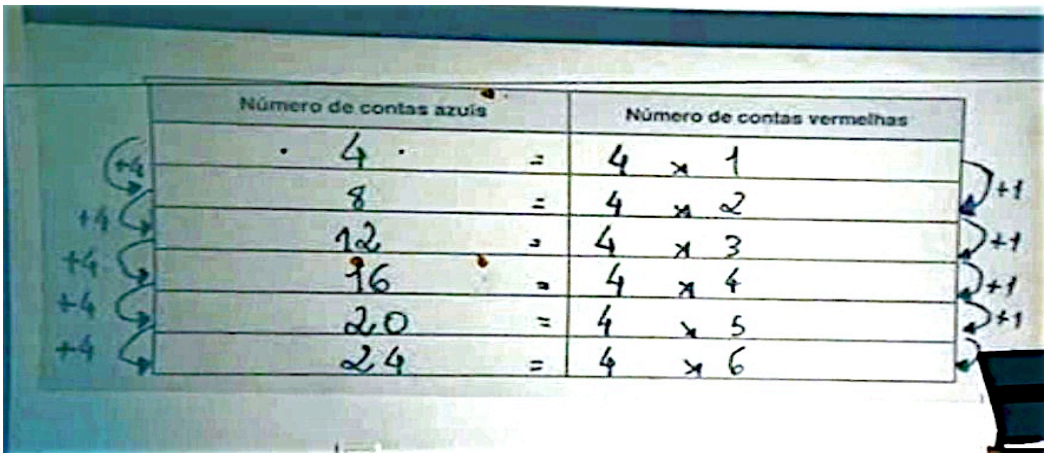


Fig. 2 - Resolução do par António e Diogo.

António – Então, nós fizemos a tabuada do 4 que vai de 4 em 4, que 4 vezes 1 dá 4, 4 vezes 2 dá 8, 4 vezes 3 dá 12, 4 vezes 4 dá 16, 4 vezes 5 dá 20, 4 vezes 6 dá 24. E aqueles vão sendo mais 1. 1, 2, 3, 4, 5, 6. O 8 é múltiplo de 4, o 12 também, o 16 também, o 20 também e o 24 também.

I. – E esses valores aí dizem respeito a quê? Esse 4, 8 e o 12…

Diogo – Ao número de contas azuis…

I. – Então o número de contas azuis é sempre o quê, António?

António – É sempre de 4 em 4.

No momento de discussão desta resolução, vários alunos referem que a tabela está confusa por ter introduzido na segunda coluna o "4x", comentando que assim o número de contas azuis seria igual ao número de contas vermelhas. Desta forma, neste momento da aula, os alunos cooperam para melhorar o produto dos colegas. Assim, João, propõe que se utilizem os parênteses e vai mostrar no acetato como concretizar a sua sugestão.

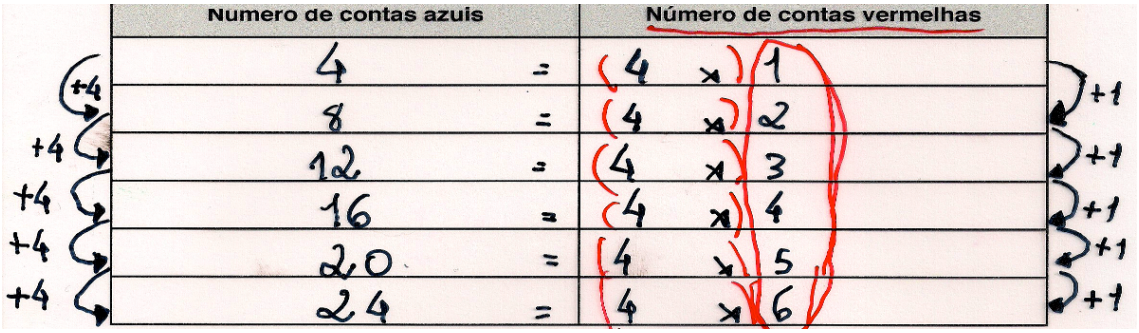


Fig. 3 - Reconstrução da resolução do par António e Diogo, proposta pelo João.

Por fim, os alunos concluem que as relações encontradas deveriam estar expressas fora da tabela. Neste momento, os alunos exploram a relação entre as operações inversas e Matilde explicita essas relações do seguinte modo: "O número de contas azuis a dividir por 4 é igual ao número de contas vermelhas. O número de contas vermelhas vezes 4 é igual ao número de contas azuis".

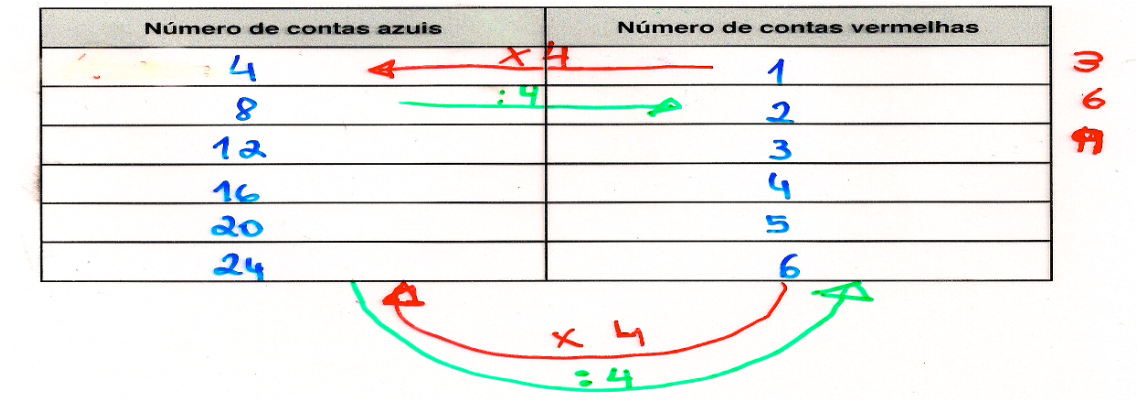


Fig. 4 - Reconstrução coletiva da tabela.

Continuando a exploração da tabela, os alunos relacionam estas descobertas com a apresentação do par Carolina e Daniel, estabelecendo a conexão entre os dois modos de resolução. Neste momento, entendem não só a questão da "diferença" referida por esse par, como também questionam a validade desse método mais recursivo para obter generalizações mais distantes.

André – 4 menos 3 vai dar o resultado do número de contas vermelhas…

Rita – Mas isso é só porque tu sabes o resultado. Ali no outro é menos 6, no 12 é menos 9 e depois isso é porque sabes o resultado, senão não sabias isso…

Fábio – Como aquele grupo disse, que a diferença era sempre 3. Mas, para isso ele tinha de saber o resultado, porque senão ele estava a fazer menos 3 que vai dar 2.

Gonçalo – Ya. Precisam de saber o resultado das 2 colunas.

I. – Para utilizar sempre esse pensamento teria de saber a diferença entre cada colar…

Gonçalo – E precisava de saber as duas colunas primeiro.

Fábio – Ya. Porque se não faziam menos 3 que não ia dar o número de contas vermelhas.

Em seguida, a investigadora solicita ao par Matilde e André que apresente a sua resolução, referindo que já tinham chegado a essa conclusão. Este momento é usado para ajudar a consolidar o que já tinha sido referido pelos alunos e para mostrar outra forma de expressar as relações entre as variáveis envolvidas na sequência.

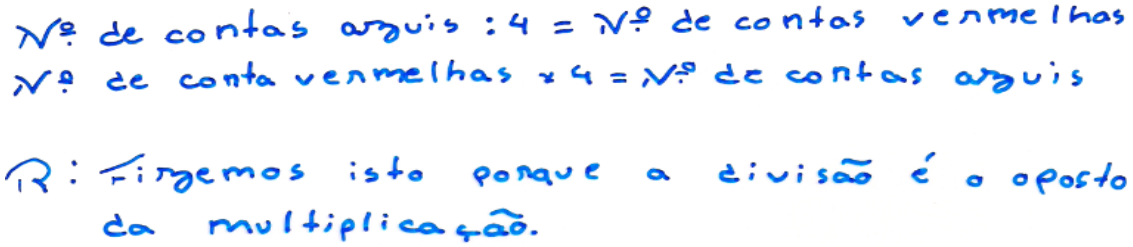


Fig. 5 - Resolução do par Matilde e André.

O par seguinte, Gonçalo e Henrique, mostra e explica a forma como expressou a relação entre as contas vermelhas e as contas azuis. Estes alunos apresentam uma representação simbólica dessa relação e explicam-na pormenorizadamente.

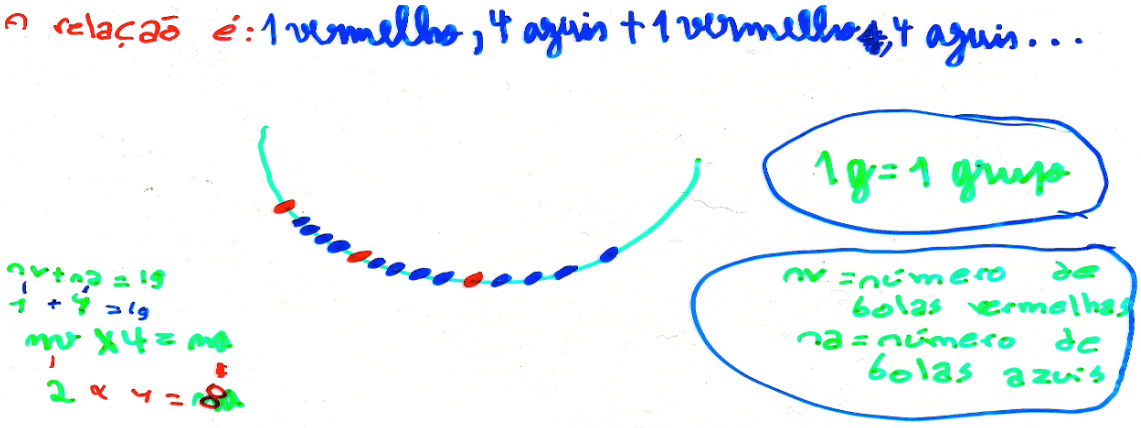


Fig. 6 - Resolução do par Gonçalo e Henrique.

Gonçalo – Primeiro vimos que… a relação era sempre 1 vermelho, 4 azuis, mais 1 vermelho e 4 azuis, mais 1 vermelho e 4 azuis e sempre assim. Depois, só para explicar primeiro antes disso, "1g" é 1 grupo, "nv" é número de bolas vermelhas e "na" é o número de bolas azuis. Aqui fizemos só um exemplo de um colar e aqui fizemos "nv + na =

1g". É assim, "nv" o número de bolas vermelhas dando o exemplo do 1, tinha de ser o 1, depois o "na" que é o número de bolas azuis que era o 4, era igual a grupo, por exemplo, deste vermelho até este azul era um grupo, deste vermelho até este azul era outro grupo, deste vermelho até este azul era outro grupo, depois ia haver muitos mais grupos.

Carolina – Sim, mas como é que 1 mais 4 igual a 1 grupo?

Gonçalo – 1 mais 4 [aponta para o desenho do colar] o grupo era este pedaço. E depois aqui há o "nv x 4 = na", por exemplo, era como tinham na tabela, eles disseram que era 2 vezes 4 o 8, que era o 8.

Finalmente, a investigadora solicita ao par Marco e Fábio que mostre a sua resolução. Estes alunos também representam simbolicamente a relação entre as contas vermelhas e as contas azuis, mas utilizam uma simbologia diferente do par anterior.

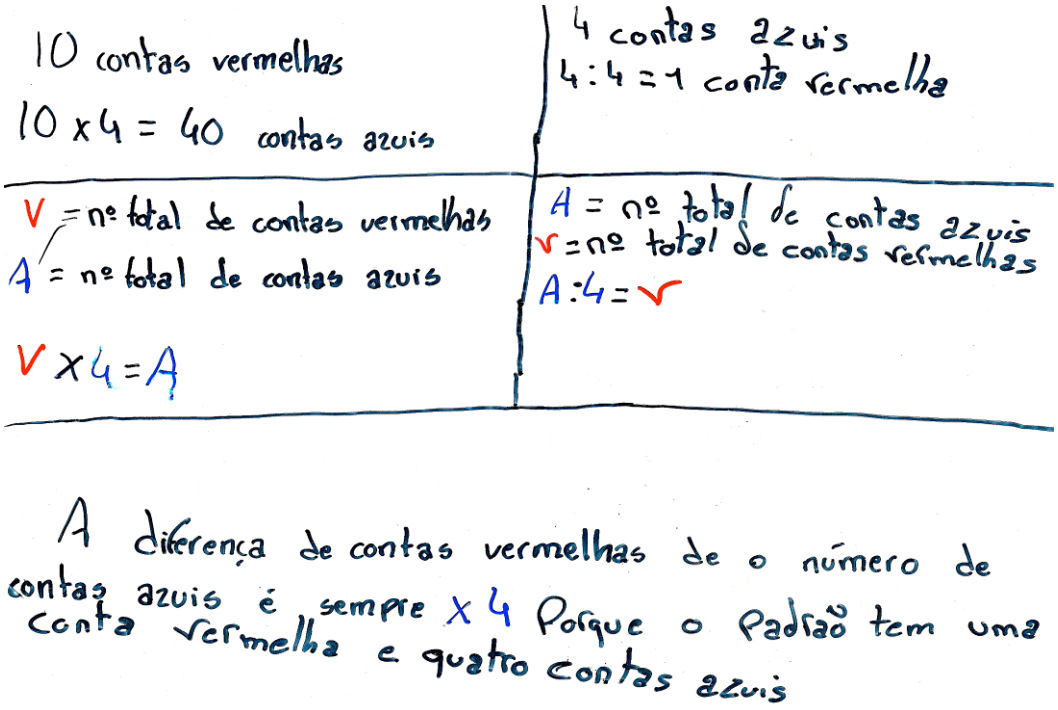


Fig. 7 - Resolução do par Marco e Fábio.

Após a apresentação do par Marco e Fábio, a investigadora propõe a comparação entre as representações usadas por este par e pelo par Gonçalo e Henrique. Para que seja mais fácil essa comparação, projeta os dois acetatos em simultâneo. Desta forma, a investigadora pretende que os alunos estabeleçam uma conexão entre as duas resoluções e que isso contribua para o desenvolvimento do seu sentido de símbolo. Os alunos comparam as duas representações, referindo as suas diferenças.

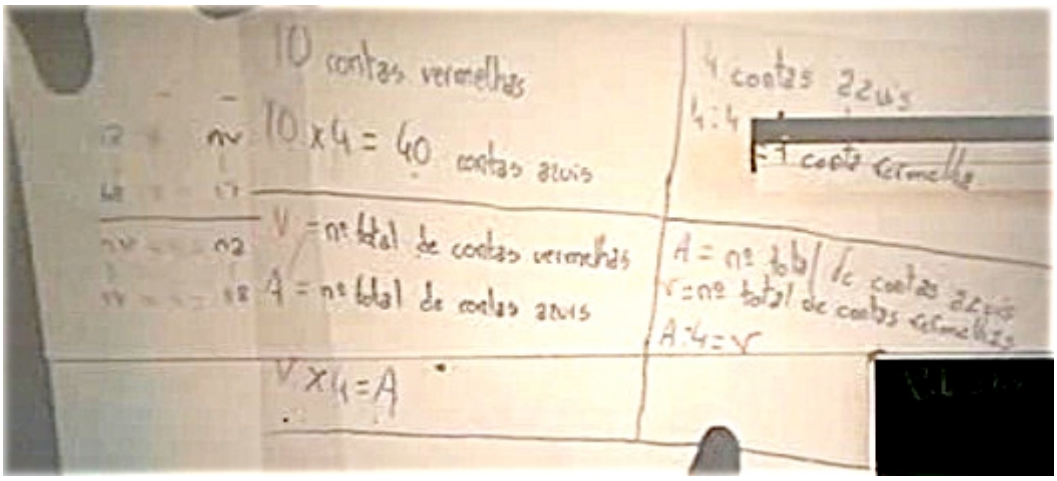


Fig. 8 - Comparação entre as resolução dos pares Gonçalo-Henrique e Marco-Fábio.

Gonçalo – É a mesma coisa. O "v" se não fosse um número qualquer eles punham lá um número. O "v" significa qualquer número, mas têm de ser vermelhas e o "a" qualquer número de azuis e é a mesma coisa.

Carolina – Está ali escrito "v igual a número total de contas vermelhas".

João – Então, mas pode ser um número qualquer… ali o "a" pode ser o 20, o 40, pode ser um qualquer.

Fábio – Não podem ser números ímpares nem múltiplos de 4.

I. – Pronto, isso é verdade na relação, mas entre esta forma de escrever a relação e esta forma de escrever há grandes diferenças? (...) mesmo assim qual será aquela que é mais fácil de usar?

Lawry – A do Fábio.

I. – Porquê? O que é que a do Fábio e do Marco mostra que possa parecer mais fácil?

Daniel – É mais simples.

Rita – Professora, eu acho que a do Gonçalo é mais fácil…

Enquanto os alunos se dividem sobre a opção que tomariam para representar a expressão da generalização da relação, a investigadora aproveita para clarificar um aspeto que considera importante na utilização da representação simbólica, através da intervenção do Gonçalo.

Gonçalo – É a mesma coisa, mas só que o meu grupo acrescentou os "n's".

I. – É importante o que está a dizer o Gonçalo porque nós temos de saber que aquele "a" ali não é conta azul, é o número de contas azuis e aquele "v" ali representa o número de contas vermelhas.

Concluido o momento de discussão coletiva, é chegado o momento de sistematização das aprendizagens, de acordo com os objetivos de exploração da tarefa. Para tal, a investigadora projeta a seguinte tabela:

Número de contas azuis	Número de contas vermelhas
?	15
68	?

Fig. 9 - Tabela explorada no momento de sistematização.

A tabela é explorada no coletivo. A investigadora solicita a alguns alunos que completem as linhas que têm o ponto de interrogação, começando pela descoberta do número de contas azuis.

> I. – Então eu agora gostava que vocês pensassem no seguinte: nós estivemos até aqui a trabalhar a relação entre o número de contas vermelhas e o número de contas azuis, certo? Tenho aqui duas colunas: o número de contas azuis numa coluna e o número de contas vermelhas. Eu sei uma coisa aqui, ao ler aquela tabela, sei o quê?
>
> Daniel – O número de contas vermelhas é 15.
>
> I. – O número de contas vermelhas é 15. Sei mais alguma coisa? Eu sei o número de contas azuis?
>
> Vários alunos – Não
>
> Fábio - Não sabemos o número de contas azuis.
>
> I. – Então, eu sei o número de contas vermelhas que é 15, não sei o número de contas azuis. Como é que eu posso saber o número de contas azuis?
>
> Elisabete – Fazer 15 vezes 4.

Depois, a investigadora solicita aos alunos que expressem essa relação para qualquer número de contas azuis. Desta forma, retoma o que tinha sido trabalhado pelos pares e procura que os alunos cheguem a acordo sobre uma forma de representar simbolicamente essa relação.

> I. – Então como é que eu posso expressar essa relação? Vocês já disseram várias formas, uma forma fácil, rápida de eu dizer essa relação entre o número de contas azuis e o número de contas vermelhas, ou melhor, se eu souber o número de contas vermelhas, como é que eu sei o número de contas azuis?
>
> João – Fazemos vezes 4.
>
> I. – Como é que eu posso representar aqui? Quem é capaz de dizer? Escrever uma forma que dê para saber para qualquer número de contas azuis, sabendo o número de contas vermelhas?
>
> Fábio – N vezes 4
>
> Gonçalo – “nv” vezes 4 é igual a “na”.

Através do mesmo processo, os alunos descobrem o número de contas vermelhas sabendo o número de contas azuis. Nesta altura, identificam a utilização das operações inversas que era um dos objetivos de exploração da tarefa.

> I. - Então e agora, se eu souber o contrário? Se eu souber o número de contas azuis, isto é, 68, mas não sei o número de contas vermelhas?
>
> Beatriz – 68 a dividir por 4.
>
> I. – Então o que é que eu fiz aqui?
>
> Fábio – O inverso da multiplicação.

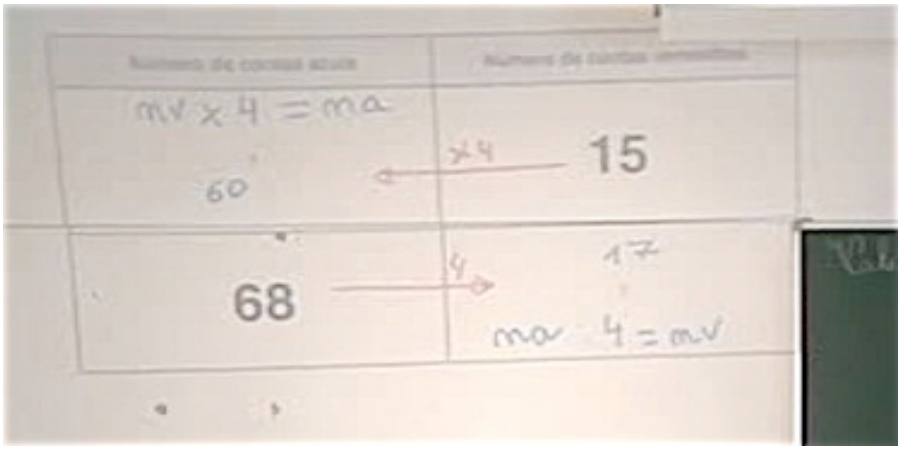


Fig. 10 - Resolução coletiva da tabela no momento de sistematização.

Considerações finais e conclusões

Tendo em conta que a tarefa apresentada se realizou no final da experiência de ensino, pode considerar-se que a cultura de sala de aula construída durante o percurso de um ano letivo, já se caracteriza pelo envolvimento dos alunos enquanto comunidade de investigação, que tem um mesmo objetivo e numa perspetiva dialógica de construção do conhecimento (Wells, 2000). De facto, pelos pequenos excertos apresentados, pode constatar-se a forma como os alunos integram a discussão coletiva, assumindo um papel ativo tanto na explicação das suas formas de pensamento como na compreensão das explicações dos colegas (Baxter & Williams, 2010), inclusivamente reconstruindo os produtos apresentados de modo a fazer-lhes sentido individualmente e na comunidade que integram.

Quanto aos principais aspetos que caracterizam a prática de ensino da professora/investigadora, centremos a nossa análise nos momentos de discussão coletiva da aula. Nestes momentos a investigadora assume um papel de orientadora da discussão, solicitando maior clareza nas apresentações, reforçando ideias matemáticas importantes, promovendo conexões entre as ideias, resoluções e representações apresentadas, e assegurando-se que todos os alunos investem nesse momento de forma ativa. Naturalmente que, anteriormente a essa fase da aula, a investigadora já se inteirou das diferentes resoluções produzidas pelos alunos, selecionando-as e sequenciando-as para uma discussão mais produtiva (Stein, Engle, Smith & Hughes, 2008). Nesta seleção e sequenciação, a investigadora opta pela crescente complexidade nas representações usadas pelos alunos, iniciando a discussão com uma representação pictórica da sequência para uma melhor compreensão da

sua estrutura, passando a uma exploração das relações funcionais expressas numa tabela, seguindo a apresentação da generalização em linguagem natural e terminando na discussão de duas representações diferentes da generalização em linguagem simbólica.

No momento seguinte de sistematização das aprendizagens, o papel assumido pela professora/investigadora torna-se mais diretivo. Nesta fase, pretende que as ideias chave relacionadas com a exploração da sequência numa perspetiva de pensamento funcional fiquem bastante claras e sejam apropriadas por todos os alunos da turma. Assim, usando as ideias que tinham emergido das resoluções dos pares e que tinham sido exploradas coletivamente, a investigadora conduz os alunos à síntese das ideias fundamentais e procura um consenso social na sua forma de representação.

Considerado como fundamental o processo de seleção das tarefas que são exploradas em sala de aula, a tarefa aqui apresentada revela-se muito significativa para a promoção do pensamento algébrico dos alunos, nomeadamente na vertente do pensamento funcional. No entanto, é pela sua exploração em sala de aula e pela atividade que os alunos realizam e a reflexão que produzem que poderemos considerar as aprendizagens dos alunos (Ponte, 2005). Para tal, e no respeitante ao desenvolvimento do pensamento algébrico, é importante que os professores desenvolvam *olhos e ouvidos algébricos* (Blanton & Kaput, 2005) para que integrem natural e espontaneamente a abordagem dos conteúdos e procedimentos algébricos na sala de aula, durante um período de tempo significativo que permita a sua maturação gradual.

Assumindo a complexidade inerente a todo este processo, é razoável conceber que o que se apresenta neste texto apenas reflete parcialmente o ambiente de aprendizagem vivido em sala de aula. De facto, as situações de construção de aprendizagens são demasiado ricas para se compactarem em tão limitada imagem, pois todos os momentos da aula são entendidos como oportunidades para a construção do conhecimento matemático, numa perspetiva dialógica. No entanto, pelas opções tomadas pela professora/investigadora e pela forma como os alunos reagem à prática de ensino por ela orientada, podemos concluir que os resultados de uma vivência tão intensa contribuirão não só para uma construção da identidade matemática de cada aluno, como para a evolução do seu desenvolvimento integral enquanto cidadãos.

Referências

Bater, J. A. & Williams, S. (2010). Social and analytic scaffolding in middle school mathematics: managing the dilemma of telling. *Journal Mathematics Teacher Education, 13*, 7-26.

Blanton, M. L. (2008). Algebra and the elementary classroom. *Transforming thinking, Transforming Practice*. Heinemann: Portsmouth, NH.

Blanton, M. & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In Kaput, J. J.; Carraher, D. W. & Blanton, M. L. (Eds.). *Algebra in the early grades* (pp. 5 -17). New York: Lawrence Erlbaum Associates

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

Murray, M. K. (2010). Early algebra and mathematics specialists. *The Journal of Mathematics and Science: Collaborative Explorations, 12*, 73 – 81.

National Council of Teachers of Mathematics (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: IIE e APM.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards of school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). Design research from a learning design perspetive. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Eds.), *Educational Design Research* (pp. 45-85). London: Routledge.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. & Serrazina, L. (2009). O novo programa de Matemática: uma oportunidade de mudança. *Educação e Matemática, 105*, 2-6.

Ponte, J. P., Silvestre, A. I., Garcia, C. & Costa, S. (2010). *O desenvolvimento do conceito de proporcionalidade direta pela exploração de regularidades. Tarefas para o 1.º e o 2.º ciclos do Ensino Básico. Materiais de apoio ao professor.* Projeto IMLNA - Promover a aprendizagem matemática em números e álgebra. Lisboa: IE e UBI.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Helping teachers learn to better incorporate student thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 10*(4), 313-340.

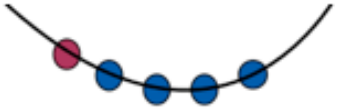
Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*, 268–275.

Wells, G. (2000). Dialogic inquiry in education: Building on the legacy of Vygotsky. In C. D. Lee and P. Smagorinsky (Eds.) *Vygotskian perspetives on literacy research* (pp. 51-85). New York: Cambridge University Press. Retirado de https://www.csun.edu/~SB4310/601%20files/dialogicinquiry.pdf.

Anexo I

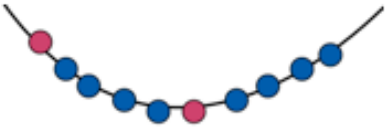
Tarefa "Os colares"

A Maria está a fazer colares para oferecer às suas amigas. Só tem contas de duas cores - azuis e vermelhas. Começou por construir o primeiro colar:

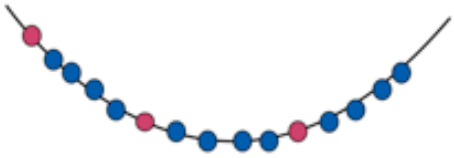


1.º colar

Depois, fez o segundo e o terceiro colares:



2.º colar



3.º colar

1. Desenha o quarto colar construído pela Maria.

2. Preenche a tabela:

Número de contas azuis	Número de contas vermelhas

3. Como podes escrever a relação entre o número de contas azuis e o número de contas vermelhas? Mostra como pensaste.

PRÁTICAS AVALIATIVAS NA EXPLORAÇÃO DE UMA TAREFA EM CONGRESSO MATEMÁTICO

Paula Fonseca
Agrupamento de Escolas de Pinhal de Frades
fonsecapspaula@gmail.com

Ana Maria Boavida
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Setúbal
ana.boavida@ese.ips.pt

Leonor Santos
Instituto da Educação, Universidade de Lisboa
leonorsantos@ie.ul.pt

Resumo: A avaliação não é uma ação dissociada do processo educativo mas inerente a esse processo e, portanto, quotidiana. O trabalho realizado diariamente na aula é de grande importância para a aprendizagem dos alunos, contribuindo fortemente para o seu sucesso ou insucesso. Este poster, foca-se nas práticas avaliativas de uma professora durante a exploração de uma tarefa cujas resoluções foram discutidas no âmbito de um congresso matemático.

Palavras-chave: Práticas avaliativas; avaliação reguladora no quotidiano; comunicação matemática.

A análise do Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB, ME, 2007), evidencia a necessidade de haver uma estreita ligação entre gestão curricular e avaliação. Esta possibilita apreciar o progresso dos alunos e diagnosticar problemas de aprendizagem, o que contribui para o professor poder adequar a sua ação. O programa refere, ainda, que as atividades de ensino e aprendizagem devem integrar uma avaliação continuada de caráter regulador que se deve tornar natural na atividade da aula e não ser uma interrupção da mesma.

A importância da avaliação estar entrelaçada com o trabalho quotidiano da aula é sublinhada por diversos autores. Pinto e Santos (2006) referem que este trabalho está repleto de interações avaliativas, micro balanços sobre o desenvolvimento de tarefas realizadas pelos alunos, e de intervenções reguladoras por parte do professor. Destacam que grande parte do sucesso ou insucesso na aprendizagem está associado ao modo como o professor vai usando estas interações. Também Fosnot e Dolk (2002) sublinham que a melhor e talvez a mais válida forma de avaliação é a "avaliação no momento" [1] que surge quando professor e alunos interagem a propósito da resolução de tarefas matemáticas. Para estes autores, espera-se que à medida que os alunos exploram e discutem tarefas cognitivamente desafiadoras, se vão apropriando de "ideias matemáticas poderosas"[2] que são pontos de referência na "paisagem de aprendizagem"[3] dos tópicos matemáticos. Para o professor conhecer os pontos por onde passam e os significados atribuídos, é essencial que os questione e que lide com o que dizem e fazem, de modo a que as trocas discursivas permitam a progressão.

[1] "Assessement in moment" no original.
[2] "Big ideias" no original.
[3] "Landscape of learning" no original.

A avaliação no quotidiano é, assim, indissociável de uma comunicação posta ao serviço da aprendizagem. Esta ideia tem eco no PMEB que considera a comunicação matemática uma capacidade transversal a todos os temas matemáticos, um objetivo central e uma importante orientação metodológica. Neste âmbito, atribui ao professor um papel essencial na criação de oportunidades para que haja uma *comunicação reflexiva e instrutiva* (Brendefur & Frykholm, 2000) em que o cerne é a construção e negociação de significados.

Um contexto favorável a este tipo de comunicação são os *congressos matemáticos* (Fosnot & Dolk, 2002). Trata-se de discussões coletivas com certas características em que os alunos são incentivados a envolver-se numa atividade que tem fortes semelhanças com a da comunidade dos matemáticos (Boavida, 2008). Nas fases que antecedem o congresso, resolvem problemas criteriosamente selecionados para trabalhar ideias matemáticas poderosas mas "a resolução de problemas é apenas um ponto de partida. É uma rampa de lançamento para o intenso discurso matemático durante o congresso" (Dolk, 2008, p. 52). É essencial que o professor promova este discurso e apoie a reflexão de modo a que os alunos aprofundem a compreensão das ideias matemáticas em jogo e se apropriem de formas de raciocinar cada vez mais eficientes e precisas. Desta forma, as interações que ocorrem assumem um caráter regulador pois permitem ao professor compreender as forças e limitações dos processos de pensamento dos alunos, o que lhe é útil para sustentar a atividade matemática e delinear o ensino subsequente.

Este poster, que se insere num estudo mais amplo em fase de desenvolvimento, tem por objetivo apresentar as práticas avaliativas de uma professora do 5º ano de escolaridade durante a exploração de uma tarefa em contexto de congresso matemático e analisar os seus contributos para a regulação das aprendizagens.

Referências

Boavida, A. M. (2008). Arqueologia educativa e congressos matemáticos: Potencialidades e desafios. Em J. Brocardo *et al*. (Eds.) *O sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 55-59). Lisboa: Escolar Editora.

Brendefur, J., Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: two preservice teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education 3*, 125-153.

Dolk, M. (2008). Problemas realistas: Um ponto de partida para uma sequência de oportunidades de aprendizagem. Em J. Brocardo *et al*. (Eds.) *O Sentido do Número: reflexões que entrecruzam teoria e prática*. (pp. 35–53). Lisboa: Escolar Editora.

Fosnot, C. & Dolk, M. (2002). *Constructing Fractions, Decimals and Percents*. Portsmouth: Heinemann.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME/DGIDC.

Pinto, J. & Santos, L. (2006). *Avaliação para as aprendizagens*. Lisboa: Universidade Aberta.

CONTANDO AZEITONAS NO PRÉ-ESCOLAR: POTENCIALIDADES DO COLAR DE CONTAS, MOLDURAS DE DEZ E PRATOS COM PONTOS NO DESENVOLVIMENTO DO CONCEITO DE NÚMERO

Maria José Delgado, Paula Serio, Fernanda Azedo, Maria
João Barradas, Maria de Jesus Oliveira e Mariana Honrado
Centro Infantil Nª Srª do Carmo
mjdelgadoo4@hotmail.com

Resumo: Esta apresentação baseia-se num projecto realizado no pré-escolar, ao longo de um ano, com o objectivo de compreender como é que as actividades de *subitizing*, parte-todo e mais-menos, desenvolvidas em simultâneo e utilizando o colar de contas, pratos de pontos e molduras de dez, contribuem para o desenvolvimento do sentido de número. O estudo baseou-se em dados obtidos a partir de conversas informais e na análise das produções escritas das crianças e revelou que os alunos de quatro e cinco anos são capazes de representar e explicitar relações numéricas.

Palavras chave: pré-escolar, relações numéricas, colar de contas, molduras de dez, pratos de pontos

Jung (2011) sugere que, desde cedo, sejam proporcionadas às crianças experiências significativas que envolvam três tipos de relações numéricas: *subtizing*, mais-menos e parte-todo, as quais estão relacionadas entre si e podem ser desenvolvidas em simultâneo.

Por outro lado, é indispensável a utilização de materiais manipuláveis, adequados a crianças do pré-escolar, que sirvam de suporte às suas ações e as ajudem a explicitar, com maior facilidade, as diferentes perceções que têm de um dado número. Mas para que essas ideias passem para um nível explícito de tomada de consciência, componente essencial do conhecimento, os alunos devem ser encorajados a partilhar com os outros os seus raciocínios (Clements, 1999).

Quando as crianças são capazes de compreender, representar e explicitar relações numéricas, isto significa que estão a desenvolver o sentido de número e quanto maior for o número de relações que as crianças conseguirem criar nas suas mentes, para um determinado número, melhor é o seu sentido de número (Van de Walle, 1988).

Este poster ilustra um projecto desenvolvido com crianças de 3, 4 e 5 anos, em cinco salas do ensino pré-escolar do Centro Infantil Nª Srª do Carmo, em Moura. Diferentes actividades envolvendo os três tipos de relações numéricas acima referidas foram levadas a cabo, regularmente, ao longo do ano e foram desenvolvidas em simultâneo. Como suporte das actividades foram utilizados materiais estruturados, nomeadamente o colar de contas, as molduras de dez e os pratos de pontos. Os materiais constituíram um apoio e incentivo no sentido dos alunos explicitarem as acções que executavam e os raciocínios que faziam.

Este estudo tem como objectivo procurar compreender em que medida as actividades de subtizing, parte-todo e mais-menos, levadas a cabo de forma continuada e com os materiais de suporte, desenvolvem o sentido de número das crianças.

O poster apresenta exemplos das actividades desenvolvidas com os alunos, e ilustra os seus registos e produções, assim como raciocínios, explicações e comentários proferidos quando explicavam o que tinham feito e como tinham pensado. A análise destes dados permitiu-nos

ter uma melhor percepção daquilo que os alunos compreendem ou não, e das possíveis razões dessa (in)compreensão.

Verificámos que as crianças de 3, 4 e 5 anos fazem a contagem do número de elementos de padrões simples, de forma instantânea; as crianças mais velhas utilizam os padrões que já conhecem para compor novos padrões, passando assim a saber, instantaneamente, o número de elementos desses novos padrões. Confirmámos que todas estas crianças compreendem, representam e explicitam relações numéricas, o que significa que estão a desenvolver o sentido de número. Verificámos ainda que o número de relações que estas crianças criam nas suas mentes, para um determinado número, vai aumentando, o que significa que vão ampliando o seu sentido de número.

Referências

Clements, D. H. (1999). Subitizing: What is it? Why teach it?, *Teaching Children Mathematics, 5* (7), 400-405.

Clements, D. H. (1999). Concrete manipulatives, concrete ideas, *Contemporary Issues in Early Childhood, 1*, 45-60.

Jung, M. (2011). Number relationships in preschool, *Teaching Children Mathematics, 17* (9), 551-557.

Van de Walle, J. (1988). The early development of number sense, *Arithmetic Teacher*, *35*, 15-21.

Contextos de desenvolvimento de práticas de ensino

CONTEXTOS DE DESENVOLVIMENTO DE PRÁTICAS DE ENSINO

Hélia Oliveira
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ul.pt

Susana Carreira
Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade do Algarve
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
scarrei@ualg.pt

Introdução

A importância do estudo das práticas profissionais e, em particular, dos contextos para o seu desenvolvimento, assenta em duas ideias fundamentais: a *aprendizagem da matemática* está intrinsecamente ligada às práticas do professor e *ensinar matemática* é uma atividade complexa. Em primeiro lugar, o que os alunos aprendem decorre fortemente do currículo implementado pelo professor, pelas condições de aprendizagem que este proporciona na sala de aula e, de uma forma mais geral, pelo modo como apoia os alunos na sua aprendizagem. O campo da educação matemática precisa de conhecer estas práticas, relacionando ensino e aprendizagem, sendo que intervenções de natureza variada que visam a transformação das práticas têm, em geral, subjacentes a intenção de melhoria das aprendizagens dos alunos. Em segundo lugar, afirmamos a complexidade associada à prática do professor. Do ponto de vista da investigação e da formação de professores, há um grande interesse no estudo das práticas profissionais, e das condições para o seu desenvolvimento, na medida em que sendo complexa, esta é uma atividade que ilusoriamente parece ser muito simples (Grossman, Hammerness, & McDonald, 2009).

Desenvolvimento de práticas de ensino

Ao falarmos sobre o desenvolvimento de práticas de ensino é inevitável a associação ao lugar fundamental em que estas ocorrem: a sala de aula. O contexto da sala de aula é portanto o espaço privilegiado para a observação de práticas profissionais de professores e de futuros professores e para o seu próprio desenvolvimento, no sentido da sua transformação. Do ponto de vista da investigação, a observação dessas práticas corresponde a entrar no mundo da ação letiva do professor, situando-nos num dos significados possíveis que Magdalene Lampert nos apresenta para "prática", na sua conferência neste seminário: aquilo que os professores fazem para ensinar matemática. O desenvolvimento de práticas de ensino, encarado enquanto aprendizagem através do ensino, é um pilar importante do desenvolvimento profissional do professor, no entanto, a investigação tem ainda uma compreensão limitada dos processos que lhe estão associados em situações reais de sala de aula (Leikin & Rota, 2006). A componente de planificação do processo de ensino e aprendizagem é outra das dimensões essenciais das práticas profissionais e que merece cada vez mais a atenção por parte da formação e da investigação sobre o professor.

No campo da educação, a prática aparece, por vezes, em contraponto à teoria, sendo que a primeira se associa à ação e a segunda ao pensamento e ao conhecimento, uma forma de pensar que, segundo Lampert (2009), decorre da influência do dualismo cartesiano entre a

mente e o corpo. No entanto, mesmo reconhecendo-se que a experiência, enquanto prática continuada, não suscita necessariamente aprendizagem no sentido de desenvolvimento ou crescimento profissionais, cada vez mais se vem reconhecendo a especificidade do conhecimento que o professor desenvolve a partir de vários domínios. Nesse sentido, por exemplo, a noção de conhecimento pedagógico do conteúdo, constructo muito presente na investigação sobre o professor, nacional e internacionalmente, tem vindo a ser concetualizado como um conhecimento orientado para a ação e incorporado na prática (Ponte & Chapman, 2006; Boaler, 2003).

As renovações curriculares que têm surgido por todo o mundo, nas últimas décadas, trazendo perspetivas inovadoras na edução matemática trazem novos desafios às práticas profissionais. No entanto, ainda que muitos programas de formação inicial e contínua tenham aderido a essas novas perspetivas, como é o caso nos EUA, através das orientações do *National Council of Mathematics Education*, segundo Gainsburg (2012) o ensino da matemática na generalidade das salas de aula nesse país tem sofrido poucas alterações. Provavelmente o mesmo se passa noutros países.

As novas práticas profissionais que as reformas curriculares visam constituem na realidade "práticas ambiciosas" (Kazemi, Franke & Lampert, 2009) e que levantam questões importantes quanto aos modos de apoiar o professor no desenvolvimento do seu conhecimento que se cruzam com a necessidade de a própria formação de professores, inicial e contínua, perspetivar de um modo diferente a natureza desse conhecimento (Askew, 2008). Um dos obstáculos a essa mudança tem sido o fosso entre o mundo da investigação e o da formação e o da escola ou, dito de outra forma, entre várias comunidades de prática (Gainsburg, 2012; Grossman, Hammerness, & McDonald, 2009; Leikin, 2008). De facto, situando-nos no segundo significado que Magadlene Lampert nos apresenta, a prática é também "a busca contínua de uma profissão ou ofício com uma linguagem partilhada, ferramentas e princípios que suportam a ação", ou se adotarmos uma perspetiva mais social, esta prática envolve um empreendimento conjunto (Wenger, 1998). Deste modo, a formação e a investigação que valoriza as práticas de ensino tem procurado aproximar-se dos grupos de professores nos seus contextos de trabalho, estudando e promovendo a colaboração entre pares e a reflexão sobre a prática, assim como, estimulando e colaborando na investigação que os professores fazem sobre a sua própria prática (Ponte, Quaresma & Branco, 2012).

Discutir e investigar o desenvolvimento de práticas de ensino

O conjunto de textos que integram esta secção dedicada ao tema "Contextos de desenvolvimento de práticas de ensino" provém de estudos com vários olhares e preocupações sobre a prática de ensino de professores, principalmente, no nosso país, mas não só. Estas representam diferentes formas de pensar as condições e os contextos de transformação de práticas de ensino, associadas a processos de formação ou de desenvolvimento profissional.

O reconhecimento da especificidade da atividade de ensino do professor e do papel da cultura profissional está bem patente em linhas de investigação e formação como o *Lesson Study* que se encontra presente em textos desta secção. Neste movimento, a formação de professores decorre no seio da comunidade de professores de uma mesma escola, assumindo a dimensão de colaboração entre os professores um papel central no processo formativo. Oriundo de culturas profissionais asiáticas em que a autonomia e a perspetivas individuais são menos estimuladas, este movimento tem vindo a suscitar muito interesse da investigação no mundo ocidental. Através desses estudos é possível começar a perceber em que medida tais perspetivas podem ser introduzidas no nosso país, e noutros com tradições culturais

semelhantes à nossa, e que transformações terão de sofrer para melhor ajustarem a estas outras realidades. Que lugar tem nesse contexto a autonomia e individualidade do professor, tão característica da cultura profissional do professor (e, já agora, dos educadores matemáticos) no nosso país?

No nosso país, nos últimos anos registou-se um ímpeto importante na formação dos professores do 1.º e 2.º ciclos que ensinam matemática através do desenvolvimento do Programa de Formação Contínua em Matemática. Assente em ideias inovadoras sobre a formação, influenciado pela investigação nacional e internacional no tema, este programa centra-se nas práticas dos professores, integrando as dimensões de planificação e condução de aulas e a reflexão conjunta sobre as mesmas. Tendo em conta a sua dimensão temporal e número de professores que abrangeu, importa agora perceber do ponto de vista da investigação o que foi alcançado pelo programa. Que componentes se revelaram mais promissores? O que nos ensina sobre futuros caminhos a seguir na formação de professores dos primeiros anos, tendo em conta a sua formação, predominantemente, generalista? Alguns dos textos apresentados decorrem de estudos que incidem sobre as práticas de professores que frequentaram este programa ou que foram formadoras, permitindo aprofundar a discussão sobre esta formação.

Outro grupo de estudos presente nesta secção remete-nos para a problematização da prática de ensino, do ponto de vista do papel mediador do professor na aprendizagem. A análise das práticas permite perceber a atenção que é dada às tarefas que propõem e aos recursos que disponibilizam aos alunos em sala de aula merece por parte de muitos professores, no entanto, colocam também questões importantes quanto ao modo como atendem à atividade matemática dos alunos. Em particular, o conhecimento que manifestam dos alunos e dos seus processos de aprendizagem, à medida que os apoiam no decurso de realização de tarefas com um bom potencial matemático, configura-se como uma via importante para o questionamento da sua ação mediadora.

A concluir

A formação de professores e de futuros professores seguindo ideias reformadoras de renovação curricular necessita de considerar a complexidade da prática de ensino e, como tal, não pode cair na falácia de que a transformação de práticas que se observa na superfície ou com alguns professores, pontualmente, é significativa. Entre os estudos aqui apresentados observa-se, em certa medida, o que Liljedahl (2010) refere como condições para uma mudança robusta de práticas: a intervenção continuada, o apoio e a colaboração. Possivelmente, se pensarmos a prática de ensino como um "empreendimento conjunto", fará sentido a investigação apostar no *desenvolvimento* em vez de *transformação* ou mudança, pois há que continuar a aprofundar a relação entre o ensino e a aprendizagem, tanto do ponto de vista teórico como a partir da perspetiva dos professores, e ter em conta como os professores equacionam a intensificação do seu trabalho (Ballet & Kelchtermans, 2008), a partir do que consideram poder traduzir-se numa melhor aprendizagem para os seus alunos.

Referências

Askew, M. (2008). Mathematical Discipline Knowledge Requirements for Prospective Primary Teachers, and the Structure and Teaching Approaches of Programs Designed to Develop That Knowledge. In P. Sullivan & T. Wood (Eds.), *Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development* (pp. 13-35). Rotterdam: Sense Publishers.

Ballet, K., & Kelchtermans, G. (2008). Workload and willingness to change: Disentangling the experience of intensified working conditions. *Journal of Curriculum Studies, 40*, 47–67.

Beswick, K, Callingham, R., & Watson, J. (2012). The nature and development of middle school mathematics teachers' knowledge. *Journal of Mathematics Teacher Education*. *15*(2), 131-157.

Gainsburg, J. (2012). Why new mathematics teachers do or don't use practices emphasized in their credential program. *Journal of Mathematics Teacher Education*. (*on-line first*, DOI 10.1007/s10857-012-9208-1).

Grossman, P., Hammerness, K., & McDonald, M. (2009) Redefining teaching, re-imagining teacher education. *Teachers and Teaching: theory and practice*, *15*(2) 273–289.

Kazemi, E., Franke, M., & Lampert, M. (2009, July). Developing pedagogies in teacher education to support novice teacher's ability to enact ambitious instruction. *Keynote Address to the 32nd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia, New Zealand*. Retrieved October 7, 2011 from http://www.merga.net.au/documents/Kazemi.pdf.

Lampert, M. (2009). Learning Teaching in, from, and for Practice: What Do We Mean? *Journal of Teacher Education. (*OnlineFirst, published on October 7, 2009 as doi:10.1177/0022487109347321)

Leikin, R. (2008). Teams of prospective mathematics teachers. In T. Wood (Series Editor) & K. Krainer (Volume Editors), *International Handbook of Mathematics Teacher Education* (Vol. 3; pp. 63-68). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Leikin, R., & Rota, S. (2006). Learning through Teaching: A Case Study on the Development of a Mathematics Teacher's Proficiency in Managing an Inquiry-Based Classroom. *Mathematics Education Research Journal*, 18(3), 44–68.

Liljedahl, P. (2010). Noticing rapid and profound mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education,13*, 411–423.

Ponte, J. P., Quaresma, M. & Branco, N. (2012). Práticas profissionais dos professores de matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática.1, 65– 86.*

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461–494). Rotterdam, The Netherlands: Sense.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: learning, meaning and identity*. Cambridge: Cambridge University Press.

CONTRIBUTO DAS PRÁTICAS DE FORMAÇÃO PARA AS PRÁTICAS LETIVAS: UM ESTUDO EXPLORATÓRIO

Maria de Lurdes Serrazina
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa
lurdess@eselx.ipl.pt

Resumo: Este texto apresenta um estudo exploratório sobre as perspetivas que têm sobre as suas práticas três professoras do 1.º ciclo a lecionar o 1.º ano de escolaridade, após terem sido formadoras do Programa de Formação Contínua em Matemática (PFCM) para professores do 1.º ciclo, durante os seis anos de vigência deste programa, na mesma instituição de ensino superior. Os dados analisados resultaram fundamentalmente de uma entrevista semi-estruturada a cada uma das três professoras. A entrevista foi áudio-gravada e transcrita. Os dados apontam para que a participação das três professoras no PFCM como formadoras durante seis anos conduziu a um profundo conhecimento do Programa de Matemática do Ensino Básico, ao aprofundamento do seu conhecimento matemático, didático e curricular e ao desenvolvimento da capacidade das professoras para identificarem e selecionarem recursos a usar nas suas práticas letivas. Estes fatores são identificados pelas professoras como os que mais contribuíram para a alteração das suas práticas letivas, nomeadamente quando se referem à sua planificação e à forma como a concretizam nas suas aulas.

Palavras-chave: práticas, tarefas, conhecimento matemático, didático e curricular, planificação, reflexão.

Introdução

O Programa de Formação Contínua em Matemática (PFCM) decorreu de 2005 a 2011 dirigindo-se a professores do 1.º ciclo do ensino básico (alargado em 2006/07 também ao 2.º ciclo). Nele intervieram as 18 instituições públicas de ensino superior (IES), responsáveis pela formação inicial para aqueles níveis de ensino, que organizaram equipas de formadores, constituídas na sua generalidade por docentes da instituição de ensino superior e professores do ensino básico ou secundário com perfil adequado[1]. Muitos destes formadores são professores do 1.º ciclo do ensino básico, que as instituições formadoras identificaram como tendo o perfil definido, possuindo, por vezes, um mestrado ou pós-graduação em Didática da Matemática ou tendo uma participação anterior em projetos nesta área. Em termos nacionais estiveram envolvidos no PFCM 140 formadores, sendo à volta de 100 professores do ensino básico e secundário. Embora este número fosse variando nos diferentes anos de vigência do programa, um número muito significativo manteve-se como formador ao longo dos seis anos. As equipas de formação de cada IES tiveram dimensão e geometria variável, dependendo do local do país onde se localizava a instituição de ensino superior, da população abrangida e dos recursos disponíveis na zona. Assim, co-existiram equipas onde a maioria dos seus membros eram professores do 1.º ciclo, com outras constituídas maioritariamente por professores do 2.º e 3.º ciclos. No que se refere à dimensão variaram de dois formadores (sendo um professor da IES, coordenador do PFCM na instituição) a 25.

[1] A Comissão de Acompanhamento do PFCM definiu um perfil de formador para o PFCM.

Neste texto apresenta-se um estudo exploratório realizado com um grupo de três formadoras que trabalharam na mesma equipa de formação durante os seis anos de vigência do PFCM, todas professoras do 1.º ciclo do ensino básico, que em 2011/12 voltaram a ser professoras titulares de turma, estando a lecionar o 1.º ano do 1.º ciclo. O objetivo deste estudo é compreender como é que estas formadoras encaram o ensino da Matemática nas suas turmas, após a sua experiência de formadoras do PFCM. Mais especificamente, procura-se, compreender como é que consideram que a experiência anterior está a influenciar as suas práticas letivas, em particular a elaboração e concretização da planificação e, em especial, a forma como estão a explorar as tarefas na sala de aula com os seus alunos.

Conhecimento e práticas letivas

Neste trabalho entendo as práticas dos professores como as atividades que regularmente conduzem tomando em consideração o seu contexto de trabalho e os seus significados e intenções, como referido por Ponte e Chapman (2006). Considero ainda que as tarefas que o professor propõe aos alunos são elementos fundamentais e estruturantes para a definição das suas práticas e têm uma importância decisiva na aprendizagem dos alunos (NCTM, 1994; Stein, Remillard & Smith, 2007). Para Bishop e Goffree (1986) é através das tarefas que os alunos se envolvem na construção de significados na sala de aula, daí a importância de desenvolver vários tipos de tarefas como preconizado por Ponte (2005). Esta diversidade fará com que os alunos se vão adaptando a diferentes situações, contribuindo para a sua autonomia e auto-confiança.

Também o atual *Programa de Matemática do Ensino Básico* (PMEB) (ME, 2007) refere que, para além dos exercícios, "o aluno deve ter diversos tipos de experiências matemáticas, nomeadamente resolvendo problemas, realizando atividades de investigação, desenvolvendo projetos, participando em jogos" (p. 8), sendo da responsabilidade do professor propor esses diferentes tipos de tarefas. Em Portugal as práticas letivas parecem estar ainda muito centradas nos exercícios, embora estudos recentes assinalem o início de mudança, referindo práticas letivas de alguns professores que usam de modo significativo outros tipos de tarefas (Ponte & Serrazina, 2004).

Vários estudos (por exemplo, Bishop & Goffree, 1986; Ponte, 2005; Swan, 2007), referem que não basta propor boas tarefas, é preciso que estas sejam bem exploradas na sala de aula. O papel do professor é determinante na exploração das tarefas e o seu sucesso varia com a forma como o professor o faz, em particular o papel que assume (mais ou menos diretivo), a forma como introduz a tarefa, o tipo de perguntas que faz aos alunos durante a sua realização e a duração da discussão entre os alunos (Swan, 2007). Para Stein *et al*. (2007) uma tarefa pode ser proposta a um nível cognitivo elevado, mas a atitude do professor no decurso do trabalho, quando presta um esclarecimento ou dá uma sugestão, pode alterar profundamente a natureza dessa tarefa, comprometendo deste modo possíveis benefícios em termos de aprendizagem. A forma como o professor conduz a exploração de uma tarefa matemática na sala de aula está relacionada com o seu conhecimento profissional, nomeadamente o seu conhecimento matemático, didático e curricular, mas também com o ser capaz de identificar e construir recursos para o ensino e aprendizagem e com a capacidade de reflexão sobre a sua prática. Isto mesmo é referido por Ponte, Quaresma e Branco (2012) quando consideram como um dos aspetos a ter em atenção no estudo das práticas profissionais do professor de Matemática "o conhecimento profissional do professor, nos seus diversos domínios, incluindo a Matemática, o currículo, os processos de aprendizagem, a Didática da Matemática e a sua capacidade de localizar e construir recursos para o ensino-aprendizagem" (p. 25).

O Programa de Formação Contínua em Matemática (PFCM)

Um dos objetivos do PFCM foi o aprofundamento do conhecimento matemático, didático e curricular dos professores que nele participaram, considerando que este conhecimento se desenvolve "essencialmente através da reflexão antes da ação, durante a ação e após a ação sobre as situações concretas e reais de ensino, que permitam analisar e identificar os fatores de sucesso, bem como a origem das dificuldades encontradas, tendo em conta as intenções e objetivos com que a ação educativa foi planificada" (Serrazina, Canavarro, Guerreiro, Rocha, Portela & Saramago, 2005, p. 2). Um outro objetivo foi o de "favorecer a realização de experiências de desenvolvimento curricular em Matemática que contemplem a planificação de aulas, a sua condução e reflexão por parte dos professores envolvidos, apoiados pelos seus pares e formadores" (p. 2). No PFCM entendia-se o conhecimento matemático no sentido definido por Ball e Bass (2003), isto é, o professor deve conhecer a matemática que ensina, mas também ser capaz de a "desmontar" para a poder ensinar aos seus alunos. Por exemplo, não basta a um professor fazer muito bem o algoritmo estandardizado da divisão, tem de compreender a matemática que nele está implícita, de modo a poder ensiná-lo. O professor tem de ser capaz de interpretar e avaliar as explanações dos seus alunos tanto as mais comuns como as menos usuais, não bastando ao professor ter um conhecimento comum da Matemática, tendo também de possuir um conhecimento especializado da mesma.

Por conhecimento didático entende-se a adequação do conhecimento matemático ao ensino, isto é ser capaz de construir/selecionar tarefas e materiais promotores da aprendizagem da Matemática pelos alunos, saber como organizar e gerir a sala de aula, que discurso utilizar, como organizar o trabalho dos alunos (individual, a pares, pequenos grupos ou a turma), conhecimento sobre a aprendizagem e os alunos, por onde começar, como organizar a aprendizagem a partir do que os alunos já sabem, como promover a comunicação e negociação de significados matemáticos entre os alunos e com o professor. Conhecimento curricular é o conhecimento do currículo, das suas finalidades e objetivos, a ligação entre os conteúdos a ensinar, tanto horizontal, como verticalmente, quando e que recursos utilizar, nomeadamente recursos tecnológicos.

O PFCM introduziu uma organização da formação, verdadeiramente centrada nas práticas dos professores envolvidos, com sessões de formação em grupo e sessões de acompanhamento em sala de aula, onde a reflexão sobre as práticas tinha um papel fundamental (Serrazina *et al*., 2005) e onde era central o papel do formador:

> o formador surge como um dos intervenientes, colaborando nas planificações, participando nas dinâmicas de sala de aula, de modo que a reflexão posterior sobre as experiências realizadas com os alunos, seja feita com uma maior profundidade, ajudando a perceber aquilo que resultou, o que deve ser evitado, o que é necessário desenvolver, etc. Nesta perspectiva, o formador tem o papel de um parceiro que questiona com um outro olhar as práticas, ajuda a preparar materiais, propõe novas abordagens num ambiente de colaboração. (p. 3)

Dado o papel atribuído ao formador foi, desde o início do PFCM, proposto que cada instituição organizasse equipas de formação e fortemente recomendado o trabalho em equipa, propondo-se que o horário semanal de cada equipa contemplasse espaços de trabalho conjunto:

> Esta organização [do PFCM] implica um grande esforço da parte dos formadores envolvidos, que também eles não podem ficar isolados. Assim, recomenda-se que cada IES organize o programa de modo a garantir, também entre os formadores, trabalho colaborativo — um espaço de trabalho conjunto na IES para, nomeadamente, reflectir

> sobre as experiências, organizar materiais e aprofundar temas. (Serrazina, Canavarro, Guerreiro, Rocha, Portela & Gouveia, 2006, p. 7)

Esta organização foi, de um modo geral, posta em prática pela generalidade das equipas de formação, embora o trabalho realizado e a forma de organização das diferentes equipas fosse muito variável.

Metodologia

O estudo que aqui se apresenta insere-se numa metodologia qualitativa-interpretativa. A natureza interpretativa do estudo justifica-se, na perspetiva definida por Eisenhart (1988) quando afirma que o "propósito de fazer investigação interpretativa é propiciar informação que permitirá ao investigador atribuir sentido a uma situação a partir das perspetivas dos participantes" (p. 103). O principal instrumento de recolha de dados é o investigador que tenta obter um relato dos participantes da situação em estudo. Para Burgess (1985), a qualidade dos dados obtidos é dependente da qualidade da relação com o investigador.

As professoras, objeto deste estudo, pertenceram a uma equipa alargada do PFCM, composta por vários docentes da instituição formadora, e outros professores do 1.º e do 2.º ciclo do ensino básico. Esta equipa tinha um espaço semanal de trabalho conjunto, que teve diferentes formatos ao longo dos seis anos, mas que se pode caracterizar por ter tido sempre um espaço de trabalho em plenário e outro em pequeno grupo. Este trabalho em pequeno grupo organizou-se por grupos de interesse temáticos (Números e operações, pensamento algébrico, geometria, organização e tratamento de dados, etc.), mas também por afinidades entre as pessoas para estudar determinados tópicos matemáticos, preparar sessões de trabalho, discutir aspetos de interesse comum, olhar criticamente para os portefólios dos formandos, etc.

Uma atenção muito especial foi dada por esta equipa de formação ao desenvolvimento de tarefas e à sua discussão matemática, didática e curricular. As tarefas foram analisadas e discutidas, quer nas suas potencialidades para serem trabalhadas nas sessões de formação em grupo com os formandos, quer na sua eventual adaptação para a sala de aula. A elaboração de cadeias de tarefas para trabalhar determinado tópico, foi objeto de atenção pelos grupos de trabalho, que as elaboraram para os diferentes tópicos programáticos. Estas, depois de discutidas e eventualmente melhoradas ao nível da equipa, constituíram recursos formativos para as sessões de formação em grupo. Estes recursos foram posteriormente editados em brochuras temáticas e disponibilizados aos formandos em formato digital.

Como se disse anteriormente, o estudo que aqui apresento, é um estudo exploratório que incidiu sobre três professoras do 1.º ciclo, aqui designadas por Ana, Maria e Patrícia (nomes fictícios). Aquando do seu envolvimento no PFCM, todas eram professoras com uma larga experiência anterior, tendo duas delas um mestrado em Didática da Matemática já concluído. Maria tinha uma experiência distinta, tendo deixado o 1.º ciclo por alguns anos para ser professora de Inglês, regressando depois ao 1.º ciclo e, através de uma colega, contactado com o grupo de trabalho do 1.º ciclo da Associação de Professores de Matemática, onde estava à data profundamente envolvida. Já durante o PFCM decidiu inscrever-se num mestrado em Didática da Matemática, que entretanto concluiu.

De notar que as três professoras quando foram convidadas a ser formadoras do PFCM não eram professoras do 1.º ciclo "comuns", embora todas tenham sido professoras titulares de turma no ano imediatamente anterior ao início do PFCM. Ana tinha estado durante alguns anos destacada a trabalhar num projeto inovador, Patrícia era uma professora do 1.º ciclo, que

sempre esteve na escola e responsável por uma turma[2]. Maria, como referido, fez a variante de Português/Inglês e foi durante alguns anos professora de Inglês.

Todas mantêm no corrente ano letivo uma ligação com a instituição de ensino superior e continuam envolvidas em processos formativos, mais ou menos formalizados, nos seus agrupamentos. Este envolvimento manifesta-se numa relação informal com as colegas que lecionam o mesmo ano de escolaridade, na mesma escola e que solicitam "ajudas" pontuais, mas também num trabalho formalizado ao nível do agrupamento com os colegas de ano ou de ciclo. Mantêm um encontro de trabalho na ESE uma vez por mês com muitos outros membros da equipa de formação da IES, em que também tenho participado. Nestes encontros são discutidos temas de matemática ou de didática da matemática do seu interesse, para alem da inevitável troca de impressões sobre o seu atual papel.

Para a elaboração deste texto foi realizada uma entrevista semi-estruturada individual a cada uma das professoras no final do 1.º semestre do corrente ano letivo. Estes dados foram complementados pela informação obtida informalmente e pela leitura dos relatórios disponibilizados pela IES. As entrevistas foram áudio-gravadas e posteriormente transcritas e feita a respetiva análise de conteúdo. As questões colocadas na entrevista tiveram uma incidência especial nas práticas de sala de aula, tentando que identificassem diferenças entre as suas práticas anteriores e posteriores ao PFCM, bem como fatores que, no seu entender, contribuíram para essa mudança, com incidência na forma como pensam a planificação do seu ensino e exploram as tarefas na sala de aula.

Contributos das práticas de formação para as práticas letivas

Perspetivas das professoras sobre as suas práticas atuais

As professoras consideram que as suas práticas letivas atuais são bastante diferentes do que assumem terem sido as suas práticas antes do PFCM. Quando questionada sobre isso, Ana afirma o seguinte:

> Sinto que o meu trabalho tem agora mais coerência: penso mais nos conceitos matemáticos, no encadeamento das ideias, na importância dum dado conhecimento como base e estrutura para construir outros e nos processos que os alunos deverão ter a oportunidade de desenvolver.

Patrícia refere-se à sua prática do seguinte modo:

> O PFCM trouxe imensas diferenças à minha prática como professora, nomeadamente uma série de coisas que não estão ligadas com a Matemática, mas também na Matemática. (...). Por exemplo, agora com o voltar à turma, é pela primeira vez, na minha experiência de professora, que estou a trabalhar sem manual, na Língua Portuguesa tenho-o feito muitas vezes, mas na Matemática é a primeira vez e tenho conseguido aproveitar imensas coisas funcionar e agarrar o que surge na vida da turma, da escola.

Maria referiu-se a este assunto dizendo "Agora apetece-me muito mais dar aulas de Matemática", e justifica a sua postura com o conhecimento matemático que adquiriu ao longo deste seu percurso, afirmando:

> O conhecimento matemático que tenho neste momento é completamente diferente do que tinha há seis anos e isso faz toda a diferença, faz com que eu consiga gerir com maior utilidade.

[2] Apenas não teve turma no ano em que teve uma licença sabática para redigir a tese de mestrado.

Patrícia também reconhece em si uma nova postura relativamente à Matemática e afirma-a do seguinte modo:

> a minha relação com a matemática é muito mais rica.

Justifica-a considerando que o PFCM a ajudou a ter um conhecimento muito grande do PMEB e acrescenta, "ganhei gosto de ler sobre a matemática".

Perspetiva sobre a planificação

Um dos aspetos caraterizadores do PFCM foi a importância dada à planificação da atividade letiva, daí o interesse em compreender o papel que a planificação tem para as professoras, agora que voltaram a ser responsáveis por uma turma.

Relativamente à planificação das aulas, Patrícia refere que pode falar num antes e num depois do PFCM, pondo a ênfase no conhecimento que tem atualmente do PMEB em vigor, quando comparado com o que tinha do anterior programa:

> Porque tenho um conhecimento deste programa que não tinha do outro, aqui consigo ver muito mais relações entre as coisas. No anterior programa eu via muito os conteúdos, mas muitas vezes faltava-me estabelecer algumas conexões entre as coisas.

Referindo-se à sua planificação afirma:

> A planificação tornou-se muito mais criativa, em que vejo objetivos mais profundos nas coisas, em que não sei se me posso aproximar daquela ideia de trajetória de aprendizagem, mas penso que é um bocadinho isso também, essa ideia. Consigo ligar as coisas, propor sequências...

Também Ana se refere à influência do conhecimento que tem do PMEB na sua planificação, afirmando que a planificação a que dá muita relevância é a semanal:

> Como tenho um conhecimento do PMEB muito mais profundo: nos vários tópicos e subtópicos, conexão entre temas e/ou capacidades transversais, articulação entre os quatro anos, tenho mais facilidade em tomar decisões sobre o que é importante explorar para que a aprendizagem se vá estruturando de forma sustentada.

Para além do conhecimento do PMEB, também o conhecimento matemático e a experiência como formadora do PFCM são para Ana contributos determinantes para a aquilo que refere como facilidade em planificar:

> É o conhecimento do programa e o conhecimento matemático que está na base do desenvolvimento dos tópicos que me faz ter esta facilidade em planificar a longo prazo e tomar decisões a curto prazo. A experiência adquirida na equipa de formação, no acompanhamento das planificações dos meus formandos, na observação e colaboração com os formandos e crianças nas sessões de acompanhamento das aulas e na dinamização das sessões de formação em grupo que me permitiram ter agora um gosto enorme pelo ensino da Matemática.

Ana refere como exemplo que planificou uma sequência para desenvolver o conceito de dobro "começando pela automatização da soma de dois números iguais até 10" e incluindo nela o alcançar a destreza nos quase dobros, estabelecendo relação com os conceitos de par e ímpar.

Para além do sentido de número e dos outros tópicos matemáticos (geometria, OTD), Ana explicita o pensamento algébrico como algo a que tradicionalmente dava muito pouca atenção:

> Agora nunca deixo de parte na minha planificação as potencialidades do desenvolvimento do raciocínio algébrico, coisa que antes trabalhava superficialmente. Sei que o

> desenvolvimento deste pensamento passa pelo trabalho com sequências com padrão de repetição e de crescimento (nos contexto figurativo e numérico), com relações, a igualdade, as propriedades das operações, as variáveis.

Maria refere o facto de o seu agrupamento se ter candidatado ao novo programa de Matemática no ano anterior à sua generalização e ter sido ela e outra colega que era a coordenadora do programa de Matemática no seu agrupamento que elaboraram as planificações anuais e mensais para o 1.º ciclo do agrupamento. Esta tarefa obrigou-as a pensar profundamente no PMEB e nas formas possíveis de encadear os diferentes conteúdos. Apenas a planificação semanal e diária foi deixada ao professor da turma e para esta tarefa é, atualmente, muitas vezes solicitada pelos professores da sua escola,

> As colegas sempre que há uma dúvida vão à minha sala e perguntam, falam e ajudam a esclarecer... há um grande à-vontade que também resulta de terem todas sido minhas formandas.

Maria considera que a grande mais-valia da sua participação no PFCM é "a assertividade na escolha das tarefas e o facto de eu saber muito bem o que quero com cada uma delas". Relaciona diretamente as tarefas que propõe com o conhecimento matemático que adquiriu, afirmando:

> o conhecimento matemático que ganhei e isso faz toda a diferença, na elaboração das tarefas, na escolha das tarefas, na identificação do percurso que devo trabalhar com os alunos.

Relativamente à natureza das tarefas, Patrícia afirma:

> Sinto que as tarefas que proponho são mais ricas. Antes estava mais voltada para a questão dos procedimentos, embora nos últimos anos em que dei aulas não tanto.

Perspetiva das professoras sobre as suas práticas letivas

As práticas de Ana têm como pano de fundo aquilo que ela está convicta dever ser o percurso de aprendizagem que os seus alunos devem fazer ao longo dos quatro anos do 1.º ciclo:

> Tenho na cabeça uma sequência de aprendizagem que desejo construir com estes alunos ao longo de quatro anos que envolve construir o conhecimento matemático duma forma mais profunda e articulada: é um projeto ambicioso, no qual estou completamente envolvida e motivada.

Já Maria refere

> Se eu sei exatamente o que quero em termos de aquisição de conhecimento matemático, onde quero que eles cheguem, sou muito mais assertiva na forma como giro a situação e como oriento a discussão da tarefa, porque sei para onde quero que eles vão.

Mais uma vez, implícita está a ideia que o conhecimento que tem do PMEB interfere na forma como consegue gerir a sua prática de sala de aula. Esta é uma ideia que é comum às três professoras e que está presente no modo como dizem explorar as tarefas na sala de aula, onde o contributo das suas experiências como formadoras é marcante, tornando inevitável uma comparação entre a sua postura atual e a anterior ao PFCM.

Ana reconhece que a natureza das tarefas que trabalha na sua turma não pode ser desligada de todo o processo,

> como tenho uma maior consciência do encadeamento dos conceitos e do modo como as crianças aprendem, estou mais atenta à natureza das tarefas, à dinâmica da aula que devo

> proporcionar, aos recursos mais eficazes, às diferentes estratégias e dificuldades que as crianças apresentam.

Patrícia compara o seu anterior desempenho em Matemática com o da Língua Portuguesa e refere que enquanto nesta área curricular sempre conseguiu fazer ligações entre os diferentes conteúdos, isso não se passava na Matemática

> Foi uma coisa engraçada que descobri com o PFCM e que eu fazia na Língua Portuguesa mas na Matemática não, via as coisas muito separadas, a ideia de conexões, sabia que existiam mas não fazia e agora acho que estou a conseguir com a minha turma aproveitar as coisas, as coisas estão mais relacionadas.

Considera que isto se deve ao facto de no âmbito do PFCM ter de fazer supervisão na sala de aula, e por esta nem sempre ter corrido bem, ou seja as tarefas não correrem de acordo com o planeado, que a obrigou muitas vezes a pensar com o professor da turma no porquê e o que fazer para ultrapassar a situação.

Afirma que o conhecimento que tem atualmente lhe permite uma atitude muito mais consciente no trabalho com a turma:

> Agora com a minha turma eu sei onde quero chegar, mas também o que quero trabalhar, mas também sei o que deve ser trabalhado antes para que isso resulte. (...) Sinto que tenho muito mais a preocupação de questionar os alunos: "porque é que estás a fazer assim?", "mas porquê, explica?"

Relativamente à forma como consegue promover a discussão sobre as tarefas na sala de aula, Maria afirma:

> Quando estou a discutir as tarefas com os alunos, eu consigo ser muito mais perspicaz, consigo perceber melhor o que me dizem, na maior parte dos casos eu consigo perceber as intervenções dos alunos e por isso não as deixo cair, graças ao conhecimento matemático que adquiri.

Ilustrou a ideia expressa anteriormente com o seguinte episódio:

> Hoje ia trabalhar pela primeira vez a caça ao 100 na matrícula dos carros[3]. Uma matrícula era 87-FA-37 e surgiu a questão, como era o processo de formação das matrículas?, se sabendo esta poderiam afirmar que existiam outras. O Carlos disse se existe esta, eu acho que tem de haver a matrícula 87-FA-36. Perguntei à turma: vocês concordam com o Carlos? Os outros alunos começaram a dizer como é que ele sabe? Pedi ao Carlos para explicar e ele disse se há o 87-FA-37 tem de haver a anterior, que é o número que vem antes do 37. Eu captei logo o que ele queria dizer e disse: eu concordo com o Carlos e mais sei que essa matrícula existe em Portugal. Surgiram várias questões como: Mas tu conheces a pessoa que comprou o carro? Seguiu-se um diálogo com os alunos relativo à construção da sequência numérica.
>
> Depois fizemos com outra matrícula, 87-HX-13. Indicaram matrículas antes e depois. Uma aluna disse "eu tenho a certeza que existe a matrícula 87-HX-01". E eu perguntei: Será que tem razão? "Claro que tem, porque o 01 é a primeira da lista", responderam.

Maria reconhece que, anteriormente teria tido muita dificuldade em lidar com uma situação de sala de aula como esta, sobretudo porque ia para além daquilo que tinha planificado e mesmo quando surgiam dentro da planificação, dificilmente conseguia pegar numa situação que não tinha sido prevista.

Esta mesma opinião é, de algum modo, expressa por Patrícia quando refere que agora as tarefas são mais exploradas:

[3] O objetivo deste jogo é descobrir matrículas de carros em que os dois números somem 100.

> Agora podem-se colocar questões que eu não deixo morrer, posso-lhe dar muitas extensões, pode resultar de coisas que os alunos perguntam. Eu planificava, está planificado está tratado. Agora não posso pegar nela mais tarde. Isto também tem a ver com o meu à-vontade.

Por outro lado, considera que consegue ligar com mais facilidade a Matemática com o que vai acontecendo no dia a dia da escola, sem perder a abordagem dos conteúdos específicos da Matemática e dá como exemplo:

> A minha escola está a comemorar os 50 anos (...). Eu acabei por trabalhar a ideia do 50 e fazer muito trabalho à volta do 50. Peguei na tabela da centena, nos diagramas de Carroll... Fizeram várias formas de representar o 50...

Quando questionada sobre o porquê, refere que "isto resultou da minha experiência de sala de aula como formadora", mas também do trabalho feito na equipa de formadores quando discutiam a partir das tarefas, sobretudo nos pequenos grupos onde a reflexão se aprofundava, mas também nas sessões de formação em grupo, onde encontrou professores com uma grande diversidade de práticas:

> O que o PFCM teve de muito positivo foi de manter professores em formação que tinham práticas muito diferentes e estarmos ali todos a pensar na Matemática.

Maria refere-se também a este aspeto acrescentando que enriqueceu o seu conhecimento matemático no trabalho com os grupos de formação, onde encontrou professores que sabiam bastante Matemática:

> Eu aprendi muito nas discussões nos grupos de formação, até porque tive muitos professores do 1.º ciclo, mas que eram da variante de Matemática/Ciências e aprendi muito com eles. Acho que a partilha é das coisas mais espetaculares. Se estamos atentos ao que os outros dizem aprende-se imenso.

Ana refere um conjunto de recursos que tem disponíveis na sala de aula, como: a reta numérica, estruturada de 10 em 10 em tiras com alternância de cor, a tabela do 100, o calendário, a tabela do registo do tempo, a tabela de adição, a representação dos números nas molduras do dez e no fio de contas, referindo que introduziu mudanças na exploração intencional destes recursos no desenvolvimento de rotinas ou noutras tarefas por ter um maior conhecimento das potencialidades dos diferentes modelos e representações:

> Uns focalizam-se mais numa ideia a desenvolver e outros, pela sua especificidade, ajudam a ampliar ou aprofundar essa ideia quando colocados em confronto.

Refere como exemplo que na sua última turma do 1.º ano não teve logo a preocupação de explorar em simultâneo a reta numérica (modelo linear) e a tabela do 100 (modelo retangular), acrescentando:

> Antes, tanto as retas, como as tabelas começavam no 1. Agora, a primeira fila da tabela vai também do zero ao nove, com a intenção de desafiar os alunos a procurar regularidades e encontrar semelhanças e diferenças com a reta numérica. A par desta exploração promovo também a representação dos números nas molduras do 10, na organização em agrupamentos feitos com as palhinhas e elásticos e no fio de contas. Estas representações diversas surgem no contexto da exploração do Número do Dia.

Ainda relativamente à exploração que faz do número de dia, Ana afirma:

> Agrupar palhinhas soltas, para nelas poder representar também o número do dia, é uma atividade importante porque são os alunos que passam por este processo de agrupar, enquanto nas molduras, tabela, reta e fio de contas a estrutura do 10 já está explícita (...) também desafio os alunos a ver outras representações e relações numéricas.

A propósito das relações numéricas, Ana refere a sua preocupação atual com o sinal de igual, por exemplo que os alunos através das molduras do 10 concluam que existem diferentes representações para o mesmo número, por exemplo que 8+5=10+3, dizendo que antes a preocupação com o sinal de igual era diferente: apenas o associava aos resultados de operações.

Também Patrícia e Maria reconhecem a mais-valia dos recursos que atualmente têm disponíveis e com os quais sabem trabalhar e que antes desconheciam.

Considerações finais

Dos dados apresentados fica claro o contributo que as professoras dizem resultar da sua participação no PFCM para a forma como encaram a sua prática letiva atual, nomeadamente na forma como organizam a sua planificação, enquadrando as tarefas que propõem aos alunos e integrando-as em percursos de aprendizagem. Mas, as três professoras reconhecem que é ao nível da forma como exploram as tarefas na sala de aula que a mudança é mais significativa, atribuindo-lhe um papel fundamental nas suas práticas, como referem Stein *et al*. (2007). As professoras afirmam ter alterado a forma como questionam os seus alunos durante a realização e discussão das tarefas, reconhecendo o papel importante para a aprendizagem dos seus alunos (Swan, 2007). Um outro aspeto referido prende-se com a forma como conseguem estabelecer conexões entre os diferentes tópicos do PMEB e como consideram ser capazes de enquadrar o ensino da Matemática no contexto das suas práticas de ensino como professoras generalistas do 1.º ciclo.

Os aspetos mais referidos pelas professoras como tendo contribuído para a sua postura atual são o conhecimento que têm do PMEB, associado ao aprofundamento que fizeram ao longo dos seis anos do seu conhecimento matemático, didático e curricular, bem como os recursos que têm disponíveis e a forma como são capazes de os gerir, ou seja o seu conhecimento profissional é hoje bastante distinto do que tinham antes do PFCM e parece ter relevo nas suas práticas (Ponte, Quaresma & Branco, 2012). Para este processo relevam os contributos do trabalho desenvolvido semanalmente na equipa de formadores da IES, mas também a supervisão das aulas e as reflexões com os seus formandos sobre as mesmas, bem como as discussões nas sessões de formação em grupo. A capacidade de refletirem sobre a prática é também realçada.

Estas professoras reconhecem o papel do conhecimento matemático, didático e curricular para a alteração das suas práticas letivas e que isso se deve à sua participação no PFCM como formadoras e às características inerentes ao programa de formação. Como foi referido anteriormente, o trabalho aqui apresentado é um estudo exploratório que não foi à sala de aula das professoras e que tem de ser aprofundado, aumentando assim a compreensão sobre que práticas de formação melhor contribuem para enriquecer as práticas profissionais.

Referências

Ball, D. & Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In B. Davis & E. Simmt (Eds.), *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics education Study Group* (pp. 3-14). Edmonton, AB: CMESG/GCEDM.

Bishop, A., & Goffree, F. (1986). Classroom organization and dynamics. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 309-365). Dordrecht: D. Reidel.

Burgess, R. G. (1985) (Ed.). *Strategies of educational research: qualitative methods.* Lewes: Falmer Press.

Eisenhart, M. (1988). The ethnographic research tradition and mathematics education research. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(2), 99-114.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: DGIDC. Retirado de http://sitio.dgidc.minedu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf

NCTM (1994). *Normas profissionais para o ensino da Matemática*. Lisboa: IIE e APM.

Ponte, J. P. (2005) Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 461-494). Roterdham: Sense Publishers.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Branco, N. (2012). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Avances en Investigación en Educación Matemática, 0*.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2004). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Quadrante,13*(2), 51-74.

Serrazina, M. L., Canavarro, A. P., Guerreiro, A., Rocha, I., Portela, J. & Saramago, M. J. (2005). *Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º Ciclo*. http://www.dgidc.min-edu.pt/outrosprojetos/index.php?s=directorio&pid=89#i

Serrazina, M. L., Canavarro, A. P., Guerreiro, A., Rocha, I., Portela, J. & Gouveia, M. J. (2006). *Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º Ciclo.* http://www.dgidc.min-edu.pt/outrosprojetos/index.php?s=directorio&pid=89#i

Stein, M. K., Remillard, J., & Smith, M. (2007). How curriculum influences student learning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 319-369). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Swan, M. (2007). The impact of task based professional development on teachers' practices and beliefs: A design research study. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*, 217-237.

AS TAREFAS COMO SUPORTE À CONDUÇÃO DE AULAS

Cristina Martins
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Bragança
mcesm@ipb.pt

Leonor Santos
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
mlsantos@ie.ul.pt

Resumo: Neste texto apresentamos o papel das tarefas na condução das aulas, no âmbito específico do Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º Ciclo (PFCM), tendo por base uma investigação realizada no âmbito de uma tese de doutoramento na área de Didática da Matemática. Este é um estudo de natureza qualitativa, com recurso ao estudo de caso, envolvendo a participação de três professoras. Ao longo do programa as professoras planificaram diferentes tipos de tarefas, experimentaram-nas em sala de aula e refletiram sobre elas. Uma das conclusões deste estudo aponta que as tarefas experimentadas, na aula de Matemática, serviram como suporte à condução da aula, tanto no que respeita à organização do trabalho em sala de aula, como à comunicação na aula de Matemática.

Palavras-chave: Tarefas, condução de aulas, comunicação na aula de Matemática, organização do trabalho em sala de aula

Introdução

Este texto tem por base uma investigação mais ampla que visou estudar o contributo do Programa de Formação Contínua em Matemática (PFCM) no desenvolvimento profissional de professores do 1.º ciclo (Martins, 2011). Ao longo deste programa os professores planificaram e conduziram tarefas, e refletiram acerca destas, em sessões de formação em grupo (SFG) e sessões de acompanhamento em sala de aula (SAS). O portefólio foi o instrumento utilizado para a avaliação da participação no PFCM.

A seleção de tarefas a propor aos alunos é um aspeto fundamental da planificação de aulas (Ponte, 2005) e, consequentemente, o seu desenvolvimento é igualmente relevante na condução das aulas, encontrando-se relacionado com a comunicação na aula de Matemática e a organização do trabalho em sala de aula (NCTM, 2007). Cabe ao professor confrontar os alunos com diversos tipos de tarefas, quer sejam exercícios de natureza mais rotineira, quer sejam investigações matemáticas que apresentam uma natureza mais aberta. Quando desenvolvem as tarefas, os alunos devem ter oportunidade de comunicar as suas ideias e interagir com as dos outros. As questões colocadas pelo professor desempenham um papel essencial na constituição da comunicação na sala de aula, bem como a discussão dos resultados, estratégias ou ideias emergentes das tarefas desenvolvidas. A organização do trabalho dos alunos, feita em plena articulação com as tarefas propostas, deve passar pelo trabalho individual, pelo trabalho de grupo ou em pares.

Neste artigo, pretendemos apresentar alguns resultados relativos à questão: De que forma as tarefas experimentadas no PFCM contribuíram para a melhoria da condução das aulas e, simultaneamente, para o desenvolvimento profissional das professoras? Em particular, que tarefas foram experimentadas no PFCM? Como foram desenvolvidas? Que etapas foram

contempladas? O desenvolvimento obedeceu à planificação efetuada? Que constrangimentos se colocaram? Como se desenvolveu a comunicação na aula de Matemática? Que tipo de questões foram colocadas? Foi previsto um momento para discussão dos processos e resultados das tarefas? Como foi organizado o trabalho dos alunos em sala de aula? Foram previstas e concretizadas diversas formas de organização? Que vantagens ou condicionantes lhes foram identificadas?

Enquadramento teórico

O professor é o elemento fundamental na condução da aula, é a ele que compete decidir quais as tarefas a desenvolver, como orientar a comunicação na sala de aula, e como organizar o trabalho na sala de aula, de forma que os alunos desenvolvam uma atividade matemática significativa

Ponderando sobre o tipo de tarefas, Ponte (2005), entre outros aspetos, experimenta organizá-las segundo duas dimensões: o grau de desafio matemático e o grau de estrutura. Uma *exploração* é uma tarefa relativamente aberta e fácil. Um *exercício* é uma tarefa fechada e de desafio reduzido. Um *problema* é uma tarefa fechada, mas com elevado desafio. Uma *investigação* é uma tarefa aberta e de desafio elevado.

Segundo Stein e Smith (2009), diferentes tarefas guiam os alunos a diferentes oportunidades de pensar:

> Tarefas que pedem aos alunos a execução de um procedimento memorizado, de maneira rotineira, representam um certo tipo de oportunidade para os alunos pensarem; tarefas que exigem que os alunos pensem conceptualmente e que os estimulem a fazer conexões representam um tipo diferente de oportunidade para os alunos pensarem. (p. 22)

Como referem Martins, Menino, Rocha e Pires (2002) é importante que os alunos, quando trabalham conceitos matemáticos, sejam confrontados com diferentes tipos de tarefas e adiantam que pode acontecer uma boa tarefa ser completamente desaproveitada por uma deficiente exploração ou contrariamente uma tarefa do tipo exercício pode, através de uma orientação ou exploração adequadas, conduzir a um trabalho investigativo. Neste sentido, Ponte (2005) alerta: "Não basta, no entanto, selecionar boas tarefas – é preciso ter atenção ao modo de as propor e de conduzir a sua realização na sala de aula" (p. 12).

No seguimento da ideia anterior, é importante ter em consideração uma forma sistemática e organizada de trabalhar as tarefas na sala de aula. Na resolução de problemas é inevitável, pela sua importância, não referir as fases do modelo de Pólya (1973): 1. *Compreender o problema*, 2. *Delinear um plano*, 3. *Executar um plano*, 4. *Revisão*. No que respeita a uma investigação matemática, Fonseca, Brunheira e Ponte (1999) indicam uma estrutura de aula em três fases: introdução da tarefa, desenvolvimento do trabalho e discussão final/reflexão.

A par das tarefas, o *Programa de Matemática do ensino básico* (Ponte *et al.*, 2007) dá realce à comunicação matemática, sendo esta uma das três capacidades transversais a todo o trabalho na disciplina de Matemática. A comunicação matemática:

> É uma forma de partilhar ideias e de clarificar a compreensão matemática. Através da comunicação as ideias tornam-se objectos de reflexão, aperfeiçoamento, discussão e correcção. O processo de comunicação também contribui para construção de significado e para a consolidação de ideias e, ainda para a sua divulgação. (NCTM, 2007, p. 66)

Ao professor compete ajudar os alunos a falar e escrever acerca das suas ideias matemáticas. Concretamente, as questões colocadas por este desempenham um papel primordial da

constituição da comunicação na sala de aula. O professor deve colocar "boas" questões e de tipos diversos. Way (2001) agrupa as questões em quatro categorias atendendo ao seu papel no contexto de tarefas matemáticas abertas, as questões: (i) de partida assumem a forma de perguntas abertas que pretendem focar o pensamento dos alunos numa determinada direção; (ii) para estimular o pensamento matemático servem para ajudar os alunos a concentrarem-se numa estratégia particular, a procurar regularidades e relações; (iii) para avaliação permitem ao professor ver como os alunos pensam, o que compreendem e como; e (iv) para discussão final são questões para congregar os esforços de toda a turma e partilhar e comparar as estratégias e soluções.

Ponte (2009) vem chamar a atenção para a importância da discussão dos resultados ou processos de resolução ou raciocínio. Reinhart (2000) salienta que as boas discussões levam tempo, todos os alunos aprendem mais quando lhes é dado tempo necessário para investigar, processar os seus pensamentos e refletir sobre e defender as suas descobertas.

Stein, Engle, Smith e Hughes (2008) especificam cinco práticas chave para utilizar, de forma eficaz, as respostas dos alunos nas discussões de sala de aula: (i) antecipação das respostas dos alunos às tarefas; (ii) monitorização das respostas; (iii) seleção especial de alunos para apresentar as suas respostas durante a fase de discussão e síntese; (iv) sequência propositada das respostas dos alunos que serão exibidas; e (v) ajudar os alunos a fazer conexões matemáticas entre as diferentes respostas e entre as respostas dos alunos e as ideias-chave.

Também a organização do trabalho em sala de aula surge em estreita ligação com as tarefas matemáticas a propor e com a comunicação na aula de Matemática. Como referem Ponte *et al.* (2007, p. 10), a "aprendizagem da Matemática pressupõe que os alunos trabalhem de diferentes formas na sala de aula".

O trabalho de grupo é "uma metodologia suscetível de influenciar positivamente o modo como os alunos enfrentam as tarefas que lhes são propostas na aula de Matemática, em especial a realização de projetos e as atividades de exploração e resolução de problemas" (Abrantes, Leal, Teixeira & Veloso, 1997, p. 65). Os alunos que trabalham em díade são os que mais aderem às tarefas propostas, mostrando persistência quando surgem dificuldades, aumentando as potencialidades das tarefas *não habituais* (César, 2000).

Metodologia de investigação

A investigação em causa seguiu um paradigma interpretativo (Stake, 2009), com recurso ao estudo de caso (Yin, 2009). As participantes foram três professoras do 1.º ciclo, Aida, Dora e Sara (nomes fictícios), que voluntariamente se inscreveram no PFCM. Os critérios de seleção utilizados foram o tempo de serviço docente e a formação académica. Aida e Sara têm mais de vinte anos de serviço, tendo a primeira realizado entretanto um mestrado e a segunda um complemento de formação. Dora tem menos de dez anos. Aida sempre se relacionou bem com todas as áreas do saber e o gosto pela aprendizagem sempre foi por si sentido. Para Dora, a Matemática funcionou como a sua área problemática. Teve insucesso enquanto aluna e diz não gostar de Matemática. Sara sempre manifestou gosto pelas disciplinas da área de Ciências, sendo, no geral, a Matemática a sua disciplina preferida no seu percurso enquanto estudante.

Para a recolha de dados foram utilizadas entrevistas semi-estruturadas às três professoras caso, observação participante de sessões de trabalho e de aulas e recolha documental.

Para a análise dos dados foram definidas categorias e subcategorias (Patton, 1987; Stake, 2009). Para o trabalho aqui apresentado, referente à exploração de tarefas na sala de aula, foram definidas as seguintes categorias: (i) tarefas experimentadas; (ii) desenvolvimento das

tarefas; (iii) organização do trabalho em sala de aula; e (iv) comunicação na aula de Matemática.

Apresentação e discussão dos resultados

Tarefas experimentadas

No PFCM, Aida desenvolveu três tarefas numa turma de 4.º ano. Com a primeira tarefa – Resolução de problemas – pretendeu enfatizar o desenvolvimento de estratégias diversificadas e a comunicação matemática:

> Com esta aula tenho como objetivo fomentar nos alunos a capacidade de desenvolver estratégias diversificadas para a resolução de problemas, de formular hipóteses e conclusões lógicas. Pretendo, ainda, promover a capacidade de comunicação, potenciando interações através das quais cada criança explica para os seus colegas as estratégias usadas na resolução dos problemas e ouve as suas opiniões. [portefólio, 1.ª planificação]

Na segunda – Investigação matemática com as tabuadas – o seu enfoque era o raciocínio matemático, uma vez que define como "objetivo principal que os alunos encontrem regularidades numa tabela de duas entradas da multiplicação" [portefólio, 2.ª planificação]. Este tipo de tarefa foi novidade na prática letiva de Aida.

Na sua planificação apresenta a seguinte tabela de dupla entrada (ao lado):

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2		4			10	12	14	16	18	20
3		6	9	12		18	21	24	27	30
4		8		16	20	24	28		36	40
5		10	15	20		30	35		45	50
6		12		24	30		42	48	54	60
7		14	21	28	35	42	49		63	70
8		16		32	40	48	56	64		80
9		18	27	36	45		63	72		90
10		20	30	40		60	70		90	100

[portefólio, 2.ª planificação]

A terceira tarefa – Atividades geométricas com o *tangram* - teve como objetivo principal "a realização de atividades geométricas com o *tangram* e a comparação de áreas" [portefólio, 3.ª planificação].

Dora experimentou tarefas semelhantes a Aida, pela mesma sequência e com objetivos semelhantes, mas numa turma de 3.º ano. Distintamente, na segunda tarefa centrou-se particularmente na descoberta das regularidades nas tabuadas do dois, do cinco e do nove. Esta professora já havia trabalhado com o *tangram* pelo que, na terceira tarefa, pretendia especificamente "fazer revisões e exploração de figuras com o *tangram*" [portefólio, 3.ª planificação]. A realização de uma investigação matemática foi também uma novidade na prática letiva Dora.

Sara desenvolveu as tarefas numa turma de 3.º ano. A primeira e a terceira tarefas experimentadas foram semelhantes às de Aida e Dora e com objetivos igualmente semelhantes. Quando, no seu portefólio, apresenta a primeira tarefa, especifica além da intenção "desenvolver a capacidade de comunicação e interação dos alunos, permitindo que cada criança explicasse as estratégias usadas na resolução de um problema" que a principal intenção era "levar as crianças a abstraírem-se das operações e a utilizarem mais a esquematização" [portefólio, objetivos da 1.ª tarefa].

A segunda, distinta das tarefas realizadas por Aida e Sara, era relativa à realização de um jogo – Jogo do número sorteado – com o objetivo principal de desenvolver o cálculo mental: "Utilizando 4 números dos que te foram dados e os sinais +, -, e x, faz as operações de modo a obteres o resultado igual ao número sorteado" [portefólio, 2.ª planificação].

Sara optou por não desenvolver uma investigação matemática, justificando: "Não senti segurança em fazer" e fundamentou a sua afirmação na dimensão da turma "a turma é muito grande e os alunos são complicados. Não sei se resultaria!". [2.ª reflexão pós-observação].

Desenvolvimento das tarefas

Aida, no geral, desenvolveu as tarefas de acordo com as fases planificadas: introdução da tarefa, desenvolvimento, comunicação dos resultados e avaliação do trabalho desenvolvido. Por exemplo, na primeira reflexão pós-observação, Aida especifica-as:

> No início leram o problema, houve uma fase de explicação para que as crianças entendessem o enunciado. Seguidamente foi deixada ficar a criança consigo própria para poder tentar resolver e encontrar uma estratégia própria. A partir daí é a fase da explicação para todos. E depois no fim uma certa reflexão que já foi muito em grupo, toda a gente acabou por dar a sua opinião sobre a aula. [1.ª reflexão pós-observação]

Em relação à investigação matemática com as tabuadas, Aida considera ter dado pouco tempo à introdução da tarefa, pelo que sentiu que teve que orientar muito o trabalho dos alunos:

> Entrando numa reflexão um bocadinho pessoal, penso que [na fase de exploração] precisei de orientar o raciocínio dos alunos mais do que queria que acontecesse. Porque eles quando começaram a trabalhar limitavam-se a fazer constatações muito óbvias e não iam mesmo fazer aquele tipo de pesquisa que eu queria e depois refleti um pouco e achei que eu devo ter dado pouco tempo à atividade de introdução da tarefa, portanto àquela parte de explicação do que se queria. [2.ª reflexão pós-observação]

Dora considera não ter cumprido a planificação da primeira tarefa, dado não ter proposto tantos problemas como havia pensado. Justifica a sua decisão:

> O facto de não ter dado tudo o que tinha planificado, foi opção minha e porque, como já referi, os alunos já tinham entendido perfeitamente a forma de resolução. Assim, continuar seria apenas para os alunos aplicarem o procedimento já mecanizado. [portefólio, 1.ª reflexão]

Dora, na descrição da investigação matemática, fala da dificuldade sentida pelos alunos em compreenderem o que lhes era pedido e da sua atuação subsequente:

> Os alunos começaram a tentar fazer, mas a palavra regularidades não parecia dizer-lhes muito. Deixei que eles experimentassem livremente o que quisessem sem lhes dar nenhuma indicação. Eles começaram a fazer a tabuada ao contrário, do que estava feito na ficha, em vez de 1x2 fizeram 2x1. Começou a instalar-se algum burburinho na aula (…) Passou algum tempo e como a palavra regularidades era nova decidi dar algumas indicações sobre o seu significado: O que se passa no produto? O que há em comum nos produtos? Parece-me que não foi suficiente. Acrescentei: Vamos lá ver o que significa a palavra regularidade: é alguma coisa que acontece sempre. [portefólio, descrição da 2.ª tarefa]

Na terceira reflexão, avalia o decurso da terceira: "A aula correu dentro da normalidade na medida em que todos os alunos se concentraram e trabalharam harmoniosamente [portefólio, 2.ª reflexão]. Identifica os fatores que contribuíram para satisfação sentida com o desenvolvimento da tarefa: "O comportamento e a tranquilidade dos alunos foram os fatores responsáveis" [portefólio, 2.ª reflexão].

No desenvolvimento das tarefas propostas por Sara verificaram-se algumas ocorrências que condicionaram a gestão do tempo. Na primeira tarefa, dada a dificuldade dos alunos na compreensão do enunciado do problema, teve necessidade de dar mais explicações do que previra: "Eu não tinha a ideia de explicar tanto o problema e foi necessário repetir muitas vezes quantas cabecinhas, quantas patinhas, acho que lhes custou a começar" [1.ª reflexão pós-observação]. Para Sara, esta ocorrência condicionou o tempo previsto para outras fases: "Havia mais miúdos que queriam ir ao quadro mostrar a maneira como fizeram (…) mas pareceu-me que faltou aí tempo e depois para a autoavaliação". [1.ª reflexão pós-observação]

Na segunda tarefa, assinala igualmente que o tempo condiciona e realização das tarefas, pois, se houvesse mais, poderia ter colocado outra hipótese na forma de apresentação dos resultados do jogo, mais concretamente serem os alunos a exporem, além dos números utilizados nas operações, a ordem pela qual as tinham efetuado: "Seria engraçado que com aqueles números e utilizando outra ordem nas operações ver se chegavam ao mesmo resultado. Mas eu queria "dar" um número a cada grupo [cada grupo sortear um número] e assim não dava" [2.ª reflexão pós-observação].

Na terceira tarefa, Sara considera perfeitamente justificável não ter cumprido a planificação, dado ter verificado a necessidade de os alunos contactarem com o *tangram*:

> Penso que foi positivo e enriquecedor o tempo que eles estiveram em contacto com o *tangram*, pois, no final da aula, houve muitas crianças que contornaram as peças numa folha branca, para as recortarem, (…) e o poderem utilizar em casa ou quando lhes apetecesse. [portefólio, descrição da 2.ª tarefa]

Organização do trabalho em sala de aula

Aida, embora, tendo assumido ser o trabalho de grupo o seu modo de organização preferido, diversificou as formas de trabalho em sala de aula, realizando trabalho individual, em pares e de grupo: "Acho que experimentei a maior parte das formas, desde trabalho individual, aos pares, de grupo. E tentei adequar essa forma ao conteúdo de cada aula. Eu penso que nesse aspeto resultou bastante bem" [entrevista final].

Com o trabalho individual pretendeu "perceber o que cada um poderia dar" [1.ª reflexão pós-observação]. Na segunda tarefa teve a intenção de "provocar as interações" [8.ª SFG] entre os alunos e teve em consideração a própria natureza da tarefa: "acho que este tipo de tarefa se proporcionava a este tipo de trabalho (…) Há sempre os alunos que têm mais dificuldade em acompanhar, em fazer as descobertas e um bocadinho apoiados com o colega do lado penso que corre bem" [8.ª SFG].

Em relação à terceira tarefa, individualiza o confronto de soluções entre os elementos de um grupo de trabalho e, simultaneamente, a importância que o trabalho de grupo assumiu:

> Os alunos puderam confrontar soluções diferentes para a realização de uma mesma tarefa. Por exemplo, os alunos descobriram várias soluções para a construção do quadrado com três, quatro ou cinco peças e tiveram oportunidade de verificar que todas eram possíveis. Por outro lado, o trabalho colaborativo constituiu um suporte e um estímulo para as crianças com NEE [necessidades educativas especiais]. [portefólio, 3.ª reflexão]

Dora, no início do estudo, manifestou preferência pela realização de trabalho individual em sala de aula. Associa ao comportamento dos alunos na sala de aula a sua opção por, no presente ano letivo, nunca ter experimentado organizar trabalho de grupo:

> Investigadora: E a nível de trabalho de grupo?

> Dora: Eu ainda nunca os pus a trabalhar em grupo, por isso não posso pronunciar…
>
> Investigadora: Nunca experimentaste?
>
> Dora: Ainda não. Estou a pensar nisso mas ainda não estão suficientemente preparados para trabalhar em grupo, a nível de comportamento. [1.ª reflexão pós-observação]

Dora assume que o barulho associado ao trabalho de grupo é um aspeto que precisa de encarar de forma diferente, com mais naturalidade:

> Embora seja um barulho normal de trabalho de grupo, eu não estou habituada. Estou habituada a ter a sala em silêncio, não estou habituada a trabalhar assim com o barulho. É uma coisa que eu tenho que melhorar, é uma coisa pessoal, não tem a ver com as crianças, a culpa é minha. Tenho que me habituar que quando é trabalho de grupo realmente é um barulho natural. [2.ª reflexão pós-observação]

Dora, no segundo ano de participação do PFCM, deu início à realização de um projeto em *Recolha, organização e análise de dados*. Na planificação incluída no seu portefólio apresentou os objetivos que pretendia atingir com esta tarefa, sendo percetível a existência de uma respeitante à organização do trabalho dos alunos em grupo: "Aplicar as regras de trabalho de grupo" [portefólio, objetivos da 2.ª tarefa, 2.º ano].

Dora, com a sua participação no PFCM, declarou ter ganho confiança na realização de trabalho de grupo, assinala o ter criado o gosto por este modo de organização dos alunos, incidindo na necessidade de estabelecer regras na sala de aula para o seu desenvolvimento:

> Porque eu depois já criei o gosto por trabalhar em grupo. Quer dizer eu tinha gosto por os por a trabalhar em grupo, tinha era receio. A partir do momento em os consegui orientar no sentido de que trabalhar em grupo tinha que ser com regras, a partir dai… e com a tua ajuda, não é?! [entrevista após 1 ano]

Diz não ter tido receio de, no segundo ano do PFCM, ter desenvolvido este modo de trabalho, porque "já os [alunos] conhecia bem e eles a mim. Já sabiam até onde podiam ir" [entrevista após 1 ano]. Além disso, confirma a opinião anteriormente manifestada: "É o que digo, já estão mais responsáveis, já adquiriram as regras, já é possível fazer outro tipo de trabalho" [entrevista após 1 ano].

Sara, no início do estudo, manifestou, preferência pela realização de trabalho individual, sendo associado à valorização da construção do conhecimento pelo aluno: "são eles próprios que estão a construir e a fazer. Quando há um grupo, há sempre um que não faz nada, está a ver o que os outros fazem. Se é individualmente cada um faz. Pouco ou muito, mas vai tentando e vai conseguindo" [3.ª reflexão pós-observação]. Assim, à realização do trabalho de grupo associou a distribuição desequilibrada do trabalho dos alunos. Nomeadamente, ao efetuar a avaliação global da segunda tarefa, refere que "correu como uma aula normal de trabalho de grupo", querendo com isto dizer: "É com barulho. Uns trabalham, outros não trabalham. Acho que é isso" [2.ª reflexão pós-observação].

No segundo ano de participação no PFCM, no projeto desenvolvido no tema *Recolha, organização e análise de dados*, optou pelo trabalho de grupo. Recorda que no ano letivo anterior "era difícil fazer trabalho de grupo" [1.ª reflexão pós-observação, 2.º ano]. Justifica a sua opção, referenciando o número de alunos da turma e o seu comportamento: "Critiquei o facto de serem muitos e o facto de terem comportamentos impróprios. Era difícil a nível de comportamento. Era necessário estar sempre a chamá-los a atenção" [1.ª reflexão pós-observação, 2.º ano]. Desta forma, atribui essencialmente a responsabilidade da realização de trabalho de grupo às características da turma:

> Esta turma está muito melhor. A nível de trabalho está muito melhor. (…) Não quer dizer que sejam alunos excelentes, mas trabalham mais ou menos. Acho a turma que é

> sossegadinha, estão com atenção. Bem comportados, trabalhadores. [1.ª reflexão pós-observação, 2.º ano]

Comunicação na aula de Matemática

Na exploração das tarefas, Aida e Dora colocaram diversos tipos de questões. Exemplificando, na primeira tarefa, Aida colocou *questões de partida* para os alunos chegarem à compreensão do problema:

> Aida: Tem neve, por isso, o piso está muito escorregadio. Aí aparece o grande problema do Pai Natal. Durante o dia ele percorre quantos quilómetros?
>
> Aluno: Dois quilómetros.
>
> Aida: Ele avança dois quilómetros, ele vai para a frente dois quilómetros. E depois quando chega a noite o que é que acontece?
>
> Aluno: Recua, vem para trás um quilómetro.
>
> Aida: Ele recua, ele vem para trás um quilómetro. E o que se passa nos dias seguintes?
>
> Alunos: A mesma coisa.

Na segunda tarefa, Dora perante a dificuldade dos alunos em descobrirem regularidades na tabuada do dois, coloca *questões para estimular o pensamento matemático*: "Uma pista: descobrir o que se passa com os produtos. É sempre o mesmo resultado? (…) Qual é o resultado que vos vai dando à medida que vão aumentando o número?" [2.ª SAS].

No caso de Sara, sobressai essencialmente a colocação de questões de partida. Na experimentação da primeira tarefa, esta professora colocou este tipo de questões como forma de conduzir os alunos à compreensão do problema: "Quantas patas tem uma galinha? E um coelho?; e Quantas cabeças são? E quantas patas?" [1.ª SAS]"

A apresentação e a discussão das estratégias de resolução e dos resultados fizeram sempre parte das tarefas experimentadas pelas três professoras. Aida, na primeira tarefa, após ter verificado que a maioria dos alunos tinha resolvido o problema, propôs que estes apresentassem as suas estratégias de resolução, apresentando *questões para discussão final*. Foi discutida a opinião de todos:

> Aida: Acho que já tiveram muito tempo para pensarem nesse problema e eu agora gostava de saber quem é que já chegou a uma resposta para o problema. Por exemplo, aqui a Carolina acha que o Pai Natal demorará quantos dias?
>
> Carolina: Dez.
>
> Aida: Explica lá aos teus colegas porque é que achas que precisa de dez dias? Podes ler o que escreveste se quiseres.
>
> (…)
>
> Aida: Esta é a versão da Carolina. E o Rúben? Qual foi a versão do Rúben? [1.ª SAS]

Dora nem sempre considerou ser necessária a existência da fase de comunicação dos resultados. No entanto, quer na primeira, quer na segunda tarefa, a professora disponibilizou tempo para esta fase da aula. Na primeira tarefa, após ter verificado que grande parte dos alunos tinha conseguido resolver alguns dos problemas propostos, sugeriu fazer-se a correção e um aluno, que se havia voluntariado para fazê-lo, foi ao quadro apresentar a sua resolução.

Dora disse-lhe: "Podes fazer como tu quiseres, o que é que te levou a teres o resultado que tiveste?" [1.ª SAS].

Sara valorizou a apresentação e discussão dos resultados. Segundo diz, pedir aos alunos para explicitarem o seu raciocínio foi uma preocupação constante: "Tive sempre a preocupação de pedir à criança que estava a fazer a representação no quadro, que fosse dizendo, em voz alta, os passos que ia fazendo" [portefólio, descrição da 1.ª tarefa].

Ao assinalar os aspetos que passou a valorizar através da participação no PFCM e, referindo-se especificamente à comunicação matemática, destaca: "[Agora] Também dou mais valor às interações verbais" [entrevista final]. Sara indica o que entende por interações verbais e explicita o que valorizava, neste âmbito, antes de participar no PFCM:

> Deixá-los falar sobre o problema, sobre as suas estratégias de resolução. Não ligava tanto a estes pontos, à maneira como eles faziam. Ouvia mais a opinião dos alunos para saber o que eles já sabiam sobre o tema no início das tarefas do que propriamente durante e no final. [entrevista final]

Considerações finais

No PFCM, Dora Sara e Aida experimentaram, melhoraram, alteraram, alguns aspetos ligados à condução das aulas, nomeadamente às fases de desenvolvimento das tarefas, à organização do trabalho em sala de aula e à comunicação na aula de Matemática, tendo sido as tarefas experimentadas o suporte para estes acontecimentos.

Aida e Dora alertaram para a importância das fases a considerar na exploração de uma tarefa. Numa investigação matemática, a fase de introdução é imprescindível para uma boa compreensão de uma tarefa. Contudo, é importante ter presente que os alunos para responderem positivamente a todos os tipos de tarefas precisam de estar habituados a um ambiente de aprendizagem em que seja valorizada a diversificação de tarefas e também que o professor tenha uma ideia clara de cada tipo de tarefa que desenvolve, por exemplo que os alunos numa investigação matemática precisam de tempo para fazer as suas descobertas (Fonseca, Brunheira & Ponte,1999).

Embora inicialmente estas professoras tenham apresentado diferentes perspetivas face à organização do trabalho em sala de aula, no PFCM experimentaram vários modos. Para que a aprendizagem matemática se verifique, além da diversificação das tarefas na aula de Matemática, é importante que se diversifiquem os modos de organização do trabalho (Ponte *et al.;*2007). Aida organizou o trabalho em sala de aula em sintonia com as tarefas selecionadas. Dora e Sara foram alertadas para novos modos de organização, embora as conceções pré-estabelecidas sobre o trabalho de grupo tenham condicionado a recetividade de Sara ao trabalho de grupo.

Segundo Abrantes *et al.* (1997), a paciência e persistência devem ser atitudes a considerar pelo professor quando optar por incluir nas suas práticas de sala de aula a organização dos alunos em grupo. Além disso, a experiência de trabalho em grupo ajuda os professores a ganhar confiança e à-vontade neste modo de organização, não deixando contudo cada novo ano letivo, cada nova turma, de ser um novo desafio a enfrentar. Quer Sara, quer Dora associaram este modo de organização ao barulho produzido em sala de aula e à necessidade dos alunos serem mais responsáveis. É, pois, necessário que os alunos tenham oportunidade de viver experiências diversificadas de organização do trabalho em sala de aula, embora não descurando que, por exemplo, a maturidade para trabalhar em grupo esteja

relacionada com o desenvolvimento gradual de competências, atitudes e hábitos necessários à cooperação (Abrantes *et al*., 1997).

No que respeita à comunicação na sala de aula, o questionamento, a apresentação das estratégias e resultados das tarefas foram algumas das práticas observadas. Segundo Way (2001) as questões podem ser usadas pelo professor para guiar os alunos através das investigações enquanto estimulam o seu pensamento matemático e para obter informação acerca do seu conhecimento e estratégias. A possibilidade de analisar e avaliar as estratégias e o pensamento matemático usado pelos colegas é uma forma de o aluno alargar o seu conhecimento matemático (NCTM, 2007).

Do trabalho exposto, ficam algumas questões para reflexão. Dora frequentemente associa o "bom" comportamento dos alunos ao "sucesso" na realização de uma tarefa. Serão as tarefas exploradas responsáveis pelo comportamento adequado do aluno em sala de aula?

No PFCM, Aida, Sara e Dora desenvolveram diferentes tipos de tarefas, alguns constituindo novidade na sua prática letiva. Sara não sentiu segurança em desenvolver uma investigação matemática. Os professores ficam facilmente agarrados a práticas em que se sentem confiantes. O que é, então, necessário para que o professor altere a sua prática letiva e experimente novas tarefas?

Referências

Abrantes, P., Leal, L., Teixeira, P., & Veloso, E. (1997). *Mat_{789}. Inovação curricular em matemática*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

César, M. (2000). Interacções Sociais e Apreensão de Conhecimentos Matemáticos: A investigação contextualizada. In J. P. Ponte, & L. Serrazina (Eds.), *Educação Matemática em Portugal, Espanha e Itália: Actas da Escola de Verão – 1999* (pp. 5-46). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, Secção de Educação Matemática.

Fonseca, H., Brunheira, L., & Ponte, J. P. (1999) As actividades de investigação, o professor e a aula de matemática. *Actas do ProfMat 99* (pp. 91-101). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Martins, C., Menino, H., Rocha, & Pires, M. V. (2002). O trabalho investigativo nas aprendizagens iniciais da matemática. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, & A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 59-82). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Educação Matemática, Secção de Educação Matemática.

Martins, M. C. (2011). O desenvolvimento profissional de professores do 1.º ciclo: Contributo da participação num programa de formação contínua em Matemática (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa).

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática. (original em inglês, publicado em 2000)

Patton, M. (1987). *How to use qualitative methods in evaluation*. Newbury Park, NJ: Sage Publications.

Pólya, G. (1973). *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro: Interciência.

Ponte, J. P. (2005). *Gestão curricular em Matemática*. In GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 11-34). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P. (2009). O novo programa de Matemática como oportunidade de mudança para os professores do ensino básico. Interacções, *12*, 96-114. Disponível em http://www.eses.pt/interaccoes

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. G., & Oliveira, P. (2007). *Programa de matemática do ensino básico*. Disponível em http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf

Reinhart, S. (2000). Never say anything a kid can say. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *5*(8), 478-483.

Stake, R. (2009). A *arte da investigação com estudos de caso* (2.ª ed.). Lisboa: Fundação Calouste Gulhenkian.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (2009). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Educação e Matemática*, *105*, 22-28. (original em inglês, publicado em 1998)

Stein, M. K., Engle, R., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, *10*(4), 313-340.

Way, J. (2001). *Using Questioning to Stimulate Mathematical Thinking*. Retirado de http://nrich.maths.org/public/viewer.php?obj_id=2473&part=index&refpage=monthindex.php em 01/11/2009

Yin, R. K. (2009) *Estudo de caso: Planejamento e métodos* (4.ª ed.). Porto Alegre: Artemed Editora S.A..

PRÁTICAS LETIVAS E FORMAÇÃO CONTÍNUA EM MATEMÁTICA: UM DIÁLOGO NECESSÁRIO

Régis Luíz Lima de Souza[1]
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa /
/ Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo
regisluiz@usp.br

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

Resumo: Este artigo tem por objetivo investigar possíveis influências do Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico (PFCM) no desenvolvimento das práticas de ensino de matemática. O referencial teórico parte de estudos realizados no âmbito da formação de professores tendo por base a formação contínua de professores, o desenvolvimento profissional docente e as práticas letivas. Trata-se um estudo de caso com uma metodologia de natureza interpretativa do tipo qualitativo, envolvendo uma professora [Clara] de classe mista dos 1.º e 2.º anos do ensino básico que participou do programa por dois anos. Os instrumentos utilizados na investigação foram entrevistas semiestruturadas, observação de aulas com utilização de recursos audiovisuais e análise documental dos portfólios e dos planos de aulas. A análise preliminar permite inferir que o PFCM contribuiu significativamente para o desenvolvimento profissional de Clara. Na sua prática letiva, evidenciam-se pelo menos quatro influências decorrentes do PFCM: o modo como explora a resolução das tarefas; a valorização da comunicação do raciocínio matemático dos alunos; a organização dos alunos na sala de aula; e o estabelecimento constante de questionamentos e desafios, estimulando os alunos a pensar e a fazer suas próprias descobertas. O estudo sugere, ainda, que cursos dessa natureza devem procurar modos mais práticos de auxiliar o professor no que respeita à planificação das aulas.

Palavras-chave: Práticas Letivas, Ensino da Matemática, Desenvolvimento Profissional, Formação Contínua.

Introdução

Este artigo apresenta resultados parciais de uma investigação iniciada no ano letivo de 2010/11 no âmbito de dois programas de doutoramento, um no Brasil (Pós-Graduação em Educação da Universidade de São Paulo, linha de pesquisa Ensino de Ciências e Matemática) e outro em Portugal (Doutoramento em Educação da Universidade de Lisboa, na especialidade Didática da Matemática). O estudo de doutoramento, naturalmente mais amplo, consiste no acompanhamento da realidade da sala de aula de oito professores (quatro brasileiros e quatro portugueses), tendo em vista investigar possíveis influências de dois programas de formação contínua em matemática para professores dos anos iniciais no desenvolvimento do conhecimento e das práticas de ensino desta disciplina.

[1] Bolsista Capes. Atualmente cursa Doutorado Cotutela em Educação pela Universidade de São Paulo e Universidade de Lisboa.

O foco deste artigo está no desenvolvimento das práticas de ensino dos professores que pode ser promovido em programas de formação contínua. Há muito se questiona o trabalho dos professores dos anos iniciais do ensino básico no ensino da matemática, recaindo sobre eles grande parte da responsabilidade pelo fracasso dos alunos nesta disciplina. Com esse argumento, governos e instituições têm promovido programas de formação contínua tendo em vista auxiliar o professor no seu desenvolvimento profissional no que respeita ao ensino e a aprendizagem da matemática, reconhecendo assim a importância dos professores do 1.º ciclo bem como sua necessidade de uma formação matemática mais consistente. Deste modo, é amplamente reconhecida a importância da formação contínua para o desenvolvimento profissional docente, promovendo dinâmicas de atualização e aprofundamento do conhecimento necessário para o exercício da profissão.

Tendo em conta esses apontamentos e o objetivo de identificar possíveis influências do PFCM no desenvolvimento das práticas de ensino de matemática, tomamos por base a realidade da sala de aula de Clara[2], uma professora de classe mista com alunos de 1.º e 2.º anos que participou do PFCM por dois anos. A redação final dessa investigação tenciona apresentar dados descritivos e analíticos que contribuam para aprofundar o conhecimento sobre o alcance da formação contínua nas práticas letivas dos professores do 1.º ciclo em matemática, objetivando seu desenvolvimento profissional, bem como servir de referência e/ou ponto de partida para novos programas dessa natureza, indicando caminhos férteis e relevantes dirigidos à Didática da Matemática e à Formação de Professores.

O PFCM

O Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º ciclos do Ensino Básico em Portugal, oficialmente criado em 2005, surgiu da necessidade de melhorar os níveis de sucesso dos alunos em Matemática. Assim, o Despacho conjunto n.º 812 de 24 de outubro de 2005, apresenta como principais objetivos:

> a) Promover o trabalho em rede entre escolas e agrupamentos, em articulação com as instituições de formação inicial de professores; b) Aprofundar o conhecimento matemático, didático e curricular dos professores do 1.º ciclo do ensino básico; c) Favorecer a realização de experiências de desenvolvimento curricular em Matemática; d) Fomentar uma atitude positiva dos professores relativamente à disciplina de Matemática e às capacidades dos alunos; e) Criar dinâmicas de trabalho entre os professores, com vista a um investimento continuado no ensino da Matemática. (p. 15091)

De acordo com os princípios orientadores do PFCM 2010/11, elaborados pela Comissão de Acompanhamento e segundo a coordenadora do programa, Lurdes Serrazina[3], as inscrições para participar do PFCM eram voluntárias, feitas, geralmente, pelos agrupamentos ou pelas instituições de formação, mediante solicitação do professor. As atividades de formação eram desenvolvidas nas escolas dos formandos e, quando a escola não tinha espaço adequado, eram realizadas no agrupamento. A comissão de acompanhamento criou um perfil desejável de formador e, com base nesse perfil, cada Escola Superior de Educação e cada Universidade, por meio de um coordenador institucional, organizou sua equipa de formação, estabelecendo um total de 18 equipas.

[2] O nome da professora bem como da formadora e dos alunos citados nos episódios de aula são fitícios.
[3] Entrevista concedida em 2011 ao primeiro autor acerca do PFCM para fins da pesquisa de doutoramento.

Os princípios orientadores referem ainda que os conteúdos abordados não eram pré-estabelecidos e visavam o desenvolvimento do conhecimento matemático, didático e curricular do professor, tendo como referência o Programa oficial dos 1.º e 2.º ciclos, o Currículo Nacional do Ensino Básico e, mais tarde, a proposta de Reajustamento dos Programas de Matemática do Ensino Básico. Durante o programa havia sessões conjuntas do grupo de formação e sessões de acompanhamento em sala de aula, nas quais o formador acompanhava o professor em aulas correspondentes à condução das atividades matemáticas que concretizavam a planificação trabalhada nas sessões conjuntas. A avaliação era desenvolvida por meio da elaboração de um portfólio que refletia o desenvolvimento profissional do docente.

Da formação contínua ao desenvolvimento profissional docente

A formação contínua de professores deriva do reconhecimento que os conhecimentos e competências adquiridas pelos professores antes e durante sua formação inicial não são suficientes para que possam exercer sua função docente durante toda sua carreira (Ponte, 1994). Diante de tais evidências, busca-se, há muito tempo, uma legitimidade da profissão docente, embora, como destaca Silva (2004), não haja uma conceção única de professor e da formação necessária a este profissional, observando-se que a formação do professor sempre esteve ligada a um momento histórico associado à correlação de forças existentes entre classes e frações de classes sociais. Na mesma direção, Freire (1970) já destacava que estamos num processo de vir-a-ser contínuo, isto é, num processo que, por natureza, é sempre inconcluso e, como sujeitos profissionais da educação, isso não pode ser diferente, embora no século XX a ideia de um profissional pronto após sua formação inicial fosse aceite sem muitos questionamentos.

A necessidade de uma formação constante toma corpo a partir dos anos 90, mas é no início do século XXI que a sociedade passa a impor, de modo mais evidente, cobranças em termos educacionais, depositando na escola e, sobretudo, no professor a responsabilidade de formar e educar as crianças. É nesse contexto que o professor passa a ser reconhecido como protagonista das práticas educativas. Tendo em vista esta demanda, Ponte (2005) destaca que o professor terá de se ver a si mesmo, permanentemente, como um aprendiz, como um agente ativo no seu local de trabalho e como um interveniente disposto a colaborar com os colegas. Para Neto, Jacobucci e Jacobucci (2007) esta é uma tendência que os cursos de formação contínua têm procurado desenvolver.

Diante desse cenário, a formação contínua ganha destaque e passa a ser considerada um importante componente do desenvolvimento profissional docente onde formador e formando assumem papéis relevantes (Killion & Harrison, 1997). Marcelo (2002) enfatiza que o professor necessita desenvolver-se em suas múltiplas dimensões, logo, deve compreender que tem diferentes necessidades de formação, sendo a formação contínua uma delas. Para Morgado (2007) "a formação contínua tem vindo a assumir-se como uma componente nuclear no campo do desenvolvimento profissional e da mudança e/ou inovação das práticas curriculares" (p. 48).

De fato, o desenvolvimento profissional tem-se configurado como um processo amplo e complexo, onde o professor assume um papel significativo na sua aprendizagem (Almeida, 2005; Imbernón, 2002; Ponte, 1994, 2005). Para Pimenta e Libâneo (2002), envolve, além da formação inicial e continuada, relações que se estabelecem no dia a dia da escola com seus pares mediadas pela apropriação de teorias que emergem das problemáticas do cotidiano escolar.

Práticas letivas

Atualmente, um número significativo de pesquisadores se debruçam sobre essa temática com o intuito de compreender o modo como o professor interpreta, desenvolve e ressignifica as suas ações na sala de aula (Franke, Kazemi, & Battey, 2007; Ponte, Quaresma, & Branco, 2012). Para Lenoir (2006) as mudanças nas práticas letivas não são fáceis. A autora discute e aponta aqueles que entende ser os principais entraves na consolidação de mudanças nesse processo, como a resistência à mudança por parte dos professores e a predominância dos processos de transmissão sobre os processos de produção do saber.

É possível observar e, consequentemente, nomear três fases constituídas de numerosas dimensões interconectadas que se identificam na prática letiva do professor: antes (pré-ativa), durante (interativa) e após a aula (pós-ativa). A fase pré-ativa, onde ocorre o planeamento da aula, possibilita o professor refletir para a ação (Alarcão, 2003), planejando e analisando-a tendo em vista suas intencionalidades, prevendo limitações e percalços que porventura possam ocorrer. É nessa fase que se encontram as tarefas propostas, que juntamente com o tipo de discurso que ocorre na sala de aula e com as normas e papéis assumidos por alunos e professores, esses dois últimos componentes da fase interativa da prática letiva, compõem, segundo Franke *et al*. (2007) e Ponte *et al*. (2012), os elementos estruturantes das práticas profissionais. Quanto às tarefas, Ponte (2005) propõe duas dimensões fundamentais para sua análise: o grau de complexidade (reduzida/elevada) e a estrutura (aberta/fechada). Destaca ainda dois elementos essenciais nesse processo: duração e contexto.

A fase interativa da prática letiva compreende as ações desenvolvidas pelo professor durante a aula. De acordo com Schön (2000), esta é a fase em que pode ocorrer reflexão na ação, processo pelo qual o professor pensa sobre algo que ocorre durante a execução da ação em aula, direcionando-o para uma possível intervenção que fará com o objetivo de ressignificá-la enquanto ainda a realiza. Nessa fase também estão presentes as normas sociomatemáticas que se distinguem das normas sociais da sala de aula porque são específicas dos aspetos matemáticos das atividades dos alunos. Para Franke *et al*. (2007) "criar as normas segundo as quais se espera que os alunos partilhem o seu pensamento matemático, desafiem e testem ideias em público, e trabalhem para compreender as ideias dos outros, não é fácil" (p. 249).

Os papéis assumidos por professores e alunos na sala de aula estão intrinsicamente ligados às normas pois, de fato, o professor é quem direciona as ações desenvolvidas na aula, evidenciando o papel de cada ator nesse contexto. Franke *et al*. (2007) compartilham dessa visão ao afirmarem que os professores têm um papel significativo na estruturação como os alunos interagem e se comunicam matematicamente na sala de aula. Freire (1996) destaca em seus escritos dois papéis interessantes em relação ao professor: o papel do professor libertador (dirigente do processo, não está fazendo alguma coisa aos estudantes, mas com os estudantes) e o papel do professor opressor (preso de forma acrítica ao sistema em que vive). O modo de trabalho (individual, em pares, em grupo), segundo Ponte *et al*. (2012), é também uma forma importante de marcar os papéis assumidos por alunos e professores na sala de aula.

A comunicação na sala de aula, terceiro elemento estruturante das práticas profissionais, evidencia, de algum modo, as relações de poder e a produção de significados que se estabelecem nas aulas de matemática. Esse diálogo muitas vezes tem o *status* de verdade absoluta [quando proferido pelo professor], incorporando estratégias que sugerem uma forma correta de fazer matemática nos ambientes escolares, passando assim, a um discurso unívoco, onde uma voz prevalece sobre todas as demais (Ponte *et al*., 2012). Em contrapartida tem-se o discurso dialógico, onde todos interagem num nível de relativa igualdade nessa cadeia de significação. Este discurso caracteriza-se pela interação e participação de diversos

interlocutores, os quais podem representar diferentes visões de mundo bem como distintas interpretações conceituais no campo da matemática.

A fase pós-ativa remete para a avaliação e reflexão daquilo que foi desenvolvido pelo professor antes e durante a aula, permitindo uma nova compreensão e uma análise crítica do que foi realizado. Sob esse aspeto o portfólio assume um papel importante, pois representa as competências do seu criador e fornece uma visão holística sobre este (Hurst, Wilson, & Cramer, 1998). De acordo com Schön (2000) essa fase corresponde a reflexão sobre a reflexão na ação, que permite o professor refletir sobre a ação passada e influir diretamente nas ações futuras, modificando assim suas práticas de ensino. E é ao término dessa terceira fase que o professor é capaz de observar as mudanças ocorridas e aquelas que ainda são necessárias para o exercício da sua profissão.

Metodologia de investigação

O presente artigo, desenvolvido a partir de uma metodologia de natureza interpretativa do tipo qualitativo, é pautado nos pressupostos de um estudo de caso que, segundo Yin (1994), é a estratégia mais adequada quando se pretende conhecer o "como?" e o "porquê?" O trabalho decorre em ambiente natural e foi realizado na perspetiva de identificar possíveis influências do PFCM no desenvolvimento das práticas de ensino de matemática, procurando refletir acerca das ações desencadeadas a partir da realidade das aulas ministradas no ano letivo de 2011/12 pela professora Clara, numa sala composta por 14 alunos dos 1.º e 2.º anos. Embora, oficialmente, esta seja uma sala de 1.º ano possui também 7 alunos do 2.º ano. Utilizamos como recurso metodológico, técnicas qualitativas de análise, nomeadamente: entrevistas semiestruturadas com Clara e a sua formadora em momentos distintos (com Clara foi realizada uma entrevista inicial (EI) e quatro entrevistas pós-aula (EPA), que constituíam momentos de reflexão imediatamente após as aulas); observação de quatro aulas com a utilização de recursos audiovisuais; e análise documental dos portfólios e dos planos de aulas que foram desenvolvidos por Clara durante o PFCM.

Após a atuação no campo de pesquisa, transcrição e textualização dos dados coletados nas entrevistas bem como a análise dos planos de aula e portfólios, o caminho percorrido por meio da reflexão crítica em torno dos dados obtidos permitiu, em nível teórico e prático, estabelecer uma discussão profícua acerca do objetivo estabelecido. O intuito nesse momento foi deixar emergir vestígios que direcionassem a análise dos resultados acerca de três categorias principais: o programa de formação, o formador e as práticas letivas. Esse momento, segundo Garnica (1997), é chamado de análise ideográfica, "porque busca tornar visível a ideologia presente na descrição ingênua dos sujeitos" (p. 116). Esses recortes, eleitos como significativos, podem variar de pesquisador para pesquisador dependendo das vertentes e foco da pesquisa.

A participação da professora no PFCM

Clara frequentou o PFCM por dois anos consecutivos. Há mais de quinze anos exerce a função docente e tem, aproximadamente, cinquenta anos de idade. Dedica-se exclusivamente ao serviço público educacional de Portugal, atuando em dois períodos, manhã e tarde. Formada no magistério, obteve posteriormente o grau de Licenciatura em Educação Básica - 1.º Ciclo por meio do Curso de Complemento de Formação Científica e Pedagógica. O seu percurso

enquanto estudante foi marcado pela estreita relação com sua tia, que sempre a incentivou estudar.

De acordo com Clara, a oportunidade de participar do PFCM foi extremamente relevante, pois "sentia ter uma formação insuficiente em matemática" (EI). Tanto nas entrevistas, quanto na sua prática cotidiana, dá grande importância à sua participação no programa e, especialmente, ao material produzido durante o curso, destacando que o aproveita constantemente nas suas aulas:

> Foram dois anos de trabalho intenso e muito do que aprendi no programa coloco em prática hoje em minhas aulas. Foi muito bom, o curso foi mesmo voltado para aquilo que eu ensinava. Aprendi muita coisa e também me fez despertar o desejo de sempre querer saber mais, isso foi muito importante. (EI)

De fato, tendo a oportunidade de confrontar as tarefas desenvolvidas durante o acompanhamento das aulas com os portfólios analisados, pode verificar-se que algumas ideias são inspiradas em atividades desenvolvidas durante sua participação no PFCM. O desejo em saber mais evidencia-se nos momentos que antecedem suas aulas com a diversidade de materiais que pesquisa para auxiliar a aprendizagem dos alunos assim como o papel que desenvolve junto aos demais colegas da escola:

> Este ano estamos divididos por grupo, eu sou a responsável pelo grupo de professores do 1.º ano, então tem que estudar um bocado, porque depois eu passo nas reuniões algumas sequências de tarefas para os colegas irem desenvolvendo. Nos reunimos todas as quartas e eu é quem coordeno. Ajudo também, um bocadinho, eles trabalharem com o novo programa. (EI)

Isso mostra que o PFCM contribuiu positivamente para que Clara visse a si mesma como uma permanente aprendiz e, sobretudo, que assumisse um papel ativo no seu local de trabalho, colaborando com seus pares, como sugerido por Ponte (2005). Segundo Marcelo (2002) este reconhecimento por parte do professor é fundamental para que ocorra o desenvolvimento profissional docente.

Outro ponto que merece destaque está relacionado com o fato do professor ouvir o aluno e valorizar suas respostas. Para Clara, essa foi uma mudança significativa em sua postura enquanto professora: "O mais difícil pra mim foi aprender a questionar os alunos. A não responder aquilo que eu perguntava para eles. Às vezes eu fazia a pergunta e já ia adiantando a resposta" (EI). Essa postura é observada em todas as aulas acompanhadas e evidencia-se em questões como "Não percebi bem, explica-me lá" e "Como é que chegaste a esse resultado?", expostos no episódio de aula que se apresenta mais adiante.

> As sessões conjuntas também se mostraram de grande valia para Clara, evidenciando que o trabalho coletivo bem como a oportunidade de proporcionar esse momento de partilha aos professores no dia a dia escolar é fundamental para o desenvolvimento profissional docente. Nesse sentido refere: "eu podia ouvir o que o colega tinha feito em suas aulas e que tinha dado certo, podendo assim experimentar também com minha turma" (EI).

O modo como o formador se reporta aos formandos é essencial para um bom relacionamento e, consequentemente, para um bom aproveitamento em termos de aprendizagem. Clara, na sua entrevista inicial destaca que "a formadora se apresentou, disse que era vossa colega e que apenas estava a trabalhar um pouco mais a matemática e que todos, inclusive ela, iam aprender muito". Ratificando os apontamentos feitos pela professora, a sua formadora Joana refere que:

> Desde o início deixei claro que era mais uma ali com os professores, sempre procurei ouvi-los, dar autonomia pra eles. Entrar na sala de aula é muito difícil, portanto, tem que ter muito bom senso e digamos, tem que passar confiança e criar um clima de empatia muito

> grande. Eu estava ali como colega e dizia vou ajudar vocês a refletir e estou mesmo aqui para os ajudar e não tenho qualquer intenção de fazer juízo de valor.

Diante do exposto e como destacado por Killion e Harrison (1997), ressalta-se que o papel do formador é extremamente significativo para se atingir os objetivos do programa, tendo influência direta no desenvolvimento do curso. De fato, um formador bem preparado pode contribuir muito para o desenvolvimento do professor. Essa também é a visão de Clara: "o formador tem que ser uma pessoa que goste e saiba de matemática, que esteja muito dentro do assunto e muito envolvido, pois ele vai ajudar na sala de aula" (EI). A presença da formadora nas suas aulas é um dos itens mais salientados por Clara. Inclusive no questionamento acerca do que poderia ser modificado em uma eventual reformulação do PFCM, a sua resposta foi "aumentar o número de aulas de acompanhamento com a formadora". Segundo Clara:

> Nós podemos fazer um plano de aula, programar, tudo, mas onde eu acho que foi mais importante pra mim foram as aulas, quando a formadora vinha aqui, quando nós dávamos as aulas e ela estava a observar. […] As vezes ela dizia: Está bem, faça como entender! As vezes eu dizia: Olha, não sei se devo fazer isso aqui. E ela dizia: Quer experimentar? Experimenta. Então eu experimentava e pronto e ela estando ali dava mais confiança, isso era muito importante. (EI)

O portfólio foi outro material rico para análise desta pesquisa. Enquanto componente avaliativo do PFCM mostrou-se como um importante instrumento de reflexão da prática docente. Nele, Clara teve a oportunidade de expor o quanto sua participação no programa alterou sua visão em relação ao ensino da Matemática, corroborando com suas ações acompanhadas em sala de aula:

> Hoje o que se pretende do papel do professor é totalmente diferente. O professor deixou de ser aquele que deposita ensinamentos, agora orienta os alunos na descoberta dos saberes. O que se espera das aprendizagens dos alunos é também muito diferente. Eles são sujeitos ativos: leem, interpretam, comunicam suas ideias, discutem os resultados, reformulam e chegam as conclusões. (Portfólio 2009/10, p. 3)

Clara destaca no portfólio a importância do professor promover a discussão, lançar desafios, questionamentos, e sobretudo deixar os alunos pensarem: "Hoje, durante uma tarefa permito que os alunos façam suas descobertas, tirem suas próprias conclusões. Na minha opinião é deste modo que as aprendizagens se tornam mais significativas" (Portfólio 2009/10, p. 3). A elaboração do portfólio desenvolve a capacidade reflexiva e, nesse caso, assumiu um papel importante no desenvolvimento profissional da professora, proporcionando-lhe uma visão mais ampla e crítica acerca da sua prática.

Práticas letivas de Clara

A reflexão sobre as práticas letivas de Clara tem início com a análise dos planos das aulas acompanhadas. Seu plano corresponde a seu discurso, ao destacar que "durante o programa o planeamento era mais elaborado" (EI), no entanto, mesmo dando ênfase ao fato do programa ter servido de base para aprimorar o modo como planeia e organiza suas aulas, os planos apresentados antes do acompanhamento das aulas continham apenas os conteúdos que seriam trabalhados, destoando dos planos desenvolvidos durante o PFCM que incluíam discussão e elaboração de tarefas, subsidiando sua realização na sala de aula, com estratégias para exploração e descrição dos recursos adequados. Isso, de algum modo, limita uma possível reflexão para a ação, como sugere Alarcão (2003). E, ao não prever possíveis limitações e percalços que podem ocorrer durante o desenvolvimento da tarefa, a atuação docente pode

ocorrer de forma menos confiante, o que leva o professor a querer antecipar as respostas dos alunos.

Deixando a fase pré-ativa e passando a abordar elementos da fase interativa, ressalta-se o fato de Clara reconhecer que a mudança mais significativa na sua prática despertou quando a formadora, logo na primeira aula de acompanhamento lhe disse: "Olha Clara, está tudo muito bem, você só tem um defeito, fala muito. Os alunos é que têm que falar". Essa reflexão conjunta desencadeou em Clara a busca por uma nova postura que se evidencia no seu discurso assim como nas suas aulas:

> Sinto que hoje eu dou uma tarefa aos alunos e tento primeiro que cada um faça a sua maneira, respeitando o percurso deles e, depois, quando vamos partilhar, cada um vai explicar como é que fez, como é que chegou lá, isso eu nunca fazia antes do programa de formação. (EI)

No acompanhamento de todas as aulas de Clara, foi possível perceber que ela trabalha com seus alunos em pares ou pequenos grupos, uma prática que também foi desenvolvida com sua participação no programa de formação:

> A formadora sempre nos falava sobre a importância dos alunos trabalharem em grupo. Bem, eu nunca tinha pensado nisso, mas comecei a fazer nas aulas e os miúdos começaram a participar mais, eles discutem uns com os outros e dizem, porque é que fez assim e não do outro jeito. Acho que foi um ganho e eu continuo fazendo. (EI)

Vamos concentrar as observações nas práticas letivas de Clara durante o desenvolvimento de uma tarefa proposta aos alunos do 2.º ano. Segundo seu plano, o conteúdo diz respeito a (i) adicionar e subtrair utilizando a representação horizontal recorrendo a estratégias de cálculo mental e escrito e (ii) resolver problemas envolvendo adições e subtrações.

O problema: Na quinta dos pais do Tiago existe um pomar com 46 árvores. Este ano o pai dele plantou mais 28 árvores. Com quantas árvores irá ficar o pomar?

De acordo com a classificação proposta por Ponte (2005), este problema caracteriza-se como uma tarefa com uma complexidade significativa (para o aluno em causa), que não dispõe de um processo para o resolver de imediato, e onde está perfeitamente especificado o que é dado e o que é pedido.

Clara organiza os alunos em pares, e após observar já tinham registado respostas ao problema, solicita que Lucas e Caio expliquem para os colegas e registem no quadro como raciocinaram matematicamente para resolver o problema. A naturalidade com que os alunos se colocam à frente da sala para explicar seu raciocínio sugere que esta é uma prática habitual.

Na resolução do problema Lucas e Caio relatam que estão somando as dezenas. A professora diz que não percebe o que eles estão fazendo e pede para que expliquem.

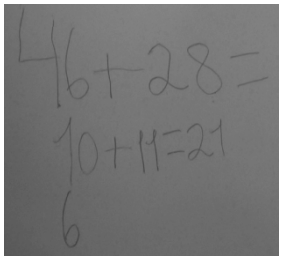


Figura 1. Resolução antes da intervenção da professora.

No entanto, como Clara referiu na entrevista inicial, evidencia-se a ansiedade de ver o produto final e, diante da resolução mal feita, intervém antes dos alunos iniciarem a explicação: "Ora mas isso está mal feito!". Ateve-se a este fato no momento de sua ação, como relata na entrevista pós-aula: "Eu devia ter esperado eles falarem para que pudessem observar o erro".

Esse *insight* da professora ainda enquanto realizava a ação é o que Schön (2000) denomina reflexão na ação.

Após a intervenção de Clara e algumas discussões os alunos finalizam a tarefa, mas Clara não diz ainda se está certo e pergunta se alguém fez diferente. Júlia diz que sim e vai à frente explicar.

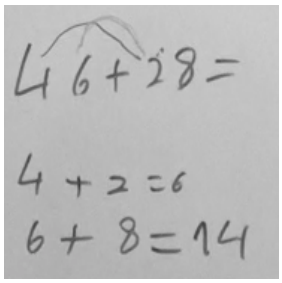


Figura 2. Parte inicial da resolução apresentada por Júlia.

Clara: "Ah, mais vais ter que explicar isso muito devagarinho porque eu não estou a perceber bem.", "Explique lá!", "Porquê 6 e 14?". Esse tipo de apontamento, seguido por questões de inquirição, segundo Ponte *et al*. (2012), favorece o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Diante do encaminhamento dado por Júlia, Clara mais uma vez intervém com questões: "Já está com o problema resolvido? Já sabe qual o resultado?". Júlia retoma a resolução com o auxílio de uma discussão coletiva que se estabelece na sala. Nota-se aqui uma cultura da sala de aula de participação, ou seja, a professora criou um ambiente onde os alunos têm liberdade para contribuir, discordar e argumentar uns com os outros. A própria professora marca a diferença: "Antes eu não deixava os alunos falarem" (EPA).

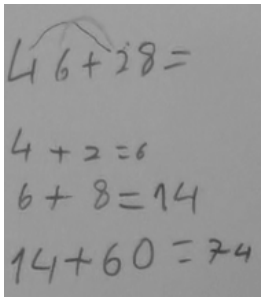


Figura 3. Resolução apresentada por Júlia com o auxílio da sala.

Após a resolução, Clara indaga: "Vamos olhar os dois resultados. O resultado é igual, mas pensaram da mesma maneira?". Novamente observa-se aqui questões e desafios que colocam os alunos a pensar, a assumir um papel ativo na aula, levando-os a raciocinar e fazer associações que estimulam o desenvolvimento do conhecimento matemático.

Conclusão

Este estudo permite inferir que o PFCM contribuiu significativamente para o desenvolvimento profissional de Clara, especialmente no que diz respeito as suas práticas de ensino. Destacam-se pelo menos quatro influências evidentes: o modo como explora a resolução das tarefas; a valorização da comunicação do raciocínio matemático dos alunos; a organização dos alunos na sala de aula; e o estabelecimento constante de questionamentos e desafios, estimulando os alunos a pensar e a fazer suas próprias descobertas.

Como sugere Freire (1996), o papel assumido pela professora na sala de aula tem um caráter libertador, pois não se limita a uma verdade única e dá voz aos diversos sujeitos valorizando suas falas. Essa postura ratifica as ideias de Franke, Kazemi e Battey (2007) quando estes afirmam que os professores têm um papel significativo na estruturação de como os alunos interagem e se comunicam matematicamente na sala de aula.

A presença de outro sujeito na sala de aula, enquanto colaborador, acompanhando as aulas de Clara durante a formação, mostrou-se extremamente benéfico ao surgimento de novas práticas letivas acerca do ensino da matemática, contribuindo também para que a professora desenvolvesse o hábito da reflexão antes, durante e após suas aulas. Nenhumas das resistências apontadas por Lenoir (2006) foram observadas na postura de Clara o que, de algum modo, justifica as mudanças identificadas na sua prática letiva em matemática.

Quanto a planificação da aula a professora tem consciência do que e como fazer, não conseguindo algumas vezes, ou mesmo não tendo tempo para colocar no papel suas ideias de forma tão elaborada como proposto no PFCM. Isto sugere que cursos dessa natureza devem preocupar-se em auxiliar o professor na sua planificação de forma mais prática, permitindo-lhe incorporar essa prática a sua realidade.

Referências

Alarcão, I. (2003). *Professores reflexivos em uma escola reflexiva.* São Paulo: Cortez.

Almeida, M. I. (2005). Formação Contínua de Professores Em Face das Múltiplas Possibilidades e dos Inúmeros Parceiros Existentes Hoje. *Formação Contínua de Professores, 13*.

Despacho conjunto n.º 812 de 24, de outubro de 2005 (2005). Cria e regulamenta o programa de formação contínua em matemática para professores do 1.º ciclo do ensino básico. *Diário da República*, II série, n.º 204, pp. 15090-15092.

Franke, M. L., Kazemi, E., & Battey, D. S. (2007). Mathematics teaching and classroom practices. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *The second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 225-256). Charlotte, NC: Information Age.

Freire, P. (1996). *Pedagogia da autonomia: Saberes necessários à prática educativa.* São Paulo: Paz e Terra.

Freire, P. (1970). *Pedagogia do oprimido.* Rio de Janeiro: Paz e Terra.

Garnica, A. V. M. (1997). Algumas notas sobre pesquisa qualitativa e fenomenologia. *Interface: Comunicação, Saúde, Educação*, *1*(1), 109-122.

Hurst, B., Wilson, C., & Cramer, G. (1998). Professional teaching portfolios: Tools for reflection, growth, and advancement. *Phi Delta Kappan, 79*(8), 578-583.

Imbernón, F. (2002). Reflexiones globales sobre la formación y el desarrollo profesional del professorado en el estado español y Latinoamérica. *Educar*, *30*, 15-25.

Killion, J., & Harrison, C. (1997). The multiple roles of staff developers. *Journal of Staff Development*, *18*(3), 33-44.

Lenoir, Y. (2006). Pesquisar e formar: Repensar o lugar e a função da prática de ensino. *Educação e Sociedade*, *27*, 97.

Marcelo, C. (2002). Aprender a enseñar para la sociedad del conocimiento. *Education Policy Analysis Archives*, *10*(35).

Morgado, J. C. (2007). Formação e Desenvolvimento Profissional Docente: desafios contemporâneos. *In* J. C. Morgado & I. Reis (Orgs.), *Formação e Desenvolvimento*

Profissional Docente: Perspectivas Europeias (pp. 41-57). Braga: CIEd, Universidade do Minho.

Neto, J. M., Jacobucci, D. F. C., & Jacobucci, G. B. (2007). Para onde vão os modelos de formação continuada de professores no campo da educação em ciências? *Horizontes*, *25*(1) 73-85.

Pimenta, S. G., & Libâneo, J. C. (2002). Formação dos profissionais da educação: crítica e perspectivas de mudanças. In S. G. Pimenta (Org.), *Pedagogia e pedagogos: Caminhos e perspectivas*. São Paulo: Cortez.

Ponte, J. P. (1994). O desenvolvimento profissional do professor de matemática. *Revista Educação e Matemática*, *31*, 9-12 e 20.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. Quaresma, M., & Branco, N. (2012). Práticas profissionais dos professores de matemática. *Avances en Investigación en Educación Matemática, 0*.

Schön, D. (2000). *Educando o profissional reflexivo: Um novo design para o ensino e a aprendizagem.* Porto Alegre: Artmed.

Serrazina, M. L., Canavarro, A. P., Guerreiro, A., Rocha, I., & Portela, J. (2010). *Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores dos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico*. Recuperado em 12 abril, 2012, de http://www.dgidc.min-edu.pt/outrosprojetos/index.php?s=directorio&pid=89

Silva, A. F. (2004). *Formação de professores para a educação básica no Brasil: Projetos em disputa (1987-2001).* Tese de doutorado, Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

Yin, R. (1994). *Case study research: Design and methods* (2nd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

LA MEDIACIÓN DEL DOCENTE Y LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA DE LOS ESTUDIANTES

Patricia Flores
Universidad Pedagógica Nacional; Cinvestav, México
pflores63@hotmail.com

Olimpia Figueras
Universidad Pedagógica Nacional; Cinvestav, México
figuerao@cinvestav.mx

François Pluvinage
Universidad Pedagógica Nacional; Cinvestav, México
pluvin@math.unistra.fr

Resumen: En este artículo se presenta un marco teórico de referencia diseñado como herramienta para observar y analizar las clases de matemáticas. Esta herramienta es resultado de varios acercamientos a la clase de matemáticas de maestros de educación básica inscritos en un programa de desarrollo profesional en matemática educativa. En el ejemplo que se analiza se observan rasgos que pueden considerarse características compartidas de la situación de muchos maestros de educación básica respecto a la conciencia de su papel como mediador de la actividad matemática de los alumnos. Paradójicamente sus certezas respecto a lo que implica una situación de enseñanza se constituyen en limitantes para promover el aprendizaje.

Palabras-clave: Actividad matemática, mediación docente.

Antecedentes

En México la educación básica se considera un medio para proyectar un crecimiento social con equilibrio. Las autoridades educativas ven en la formación de maestros el motor que impulsa el proyecto educativo del país, por lo que han propuesto diversas acciones con el afán de mejorar la práctica docente. No obstante, la mayoría de dichas acciones se han caracterizado por cursos cortos y obligatorios encaminados a compensar, corregir o actualizar los conocimientos de los docentes.

En 2005, con el propósito de considerar una intervención con relación a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas escolares, investigadores del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN diseñaron un programa de estudios de posgrado orientado hacia el desarrollo profesional en matemática educativa de los docentes de educación básica en servicio.

Como parte de la filosofía del programa, se argumenta que el desarrollo profesional no necesariamente es una modificación de la práctica docente por razones de déficit, y se proponen entre sus objetivos: 1) la profundización en los conocimientos de las matemáticas en general y sobre todo de la que se estudia en educación básica, y 2) la reflexión de los docentes sobre lo que implica la enseñanza de las matemáticas en la escuela (Figueras & Rigo, 2005, p. 42). El constructo eje del programa de posgrado fue la constitución de la clase de matemáticas en un aula experimental entendida como un espacio donde el docente observa procesos de aprendizaje y reflexiona sobre su práctica para promover la construcción de conocimiento

matemático. En consecuencia, el eje de reflexión y aprendizaje fue la clase de matemáticas de los profesores participantes.

Esta propuesta coincide con las ideas de Elbaz (1983), Shulman (1987) y Grossman (1990) quienes consideran que la clase de los maestros en servicio es una fuente de formación ya que los maestros por las diversas situaciones que se les presentan en la clase, ponen en juego diversos tipos de conocimientos, elaboran ideas sobre cómo hacer las cosas y llevan a cabo estrategias para regular el aprendizaje de sus alumnos. En el contexto de la clase de matemáticas se coincide con autores como Ball (1988), Rowland (2008) y Saraiva y Ponte (2003) quienes afirman y argumentan que en la formación de docentes es muy importante que éstos reflexionen sobre la clase, sus incidencias y lo productivo del trabajo colaborativo.

La toma de conciencia y la reflexión del docente sobre su trabajo no son acciones espontáneas, ya que implican una intencionalidad y una toma de decisiones ante los sucesos de la clase. Para los autores de este documento, enseñar es una actividad de la que se aprende con base en la reflexión sobre las experiencias que tienen lugar en la clase. Pero, ¿sobre qué tiene que reflexionar el docente para que enseñar sea una experiencia formativa?

El objetivo del estudio es el siguiente:

Caracterizar las formas de promoción de la actividad matemática en el aula por parte de los profesores en servicio, inscritos en un proceso de desarrollo profesional.

Se considera la siguiente hipótesis:

La conciencia del docente sobre su papel como mediador en la clase influye en la promoción de la actividad matemática de los estudiantes.

Para comprender la situación educativa en cuestión se utilizó el triángulo didáctico propuesto por Houssaye (1993) pero de manera ampliada como se puede ver en la Figura 1.

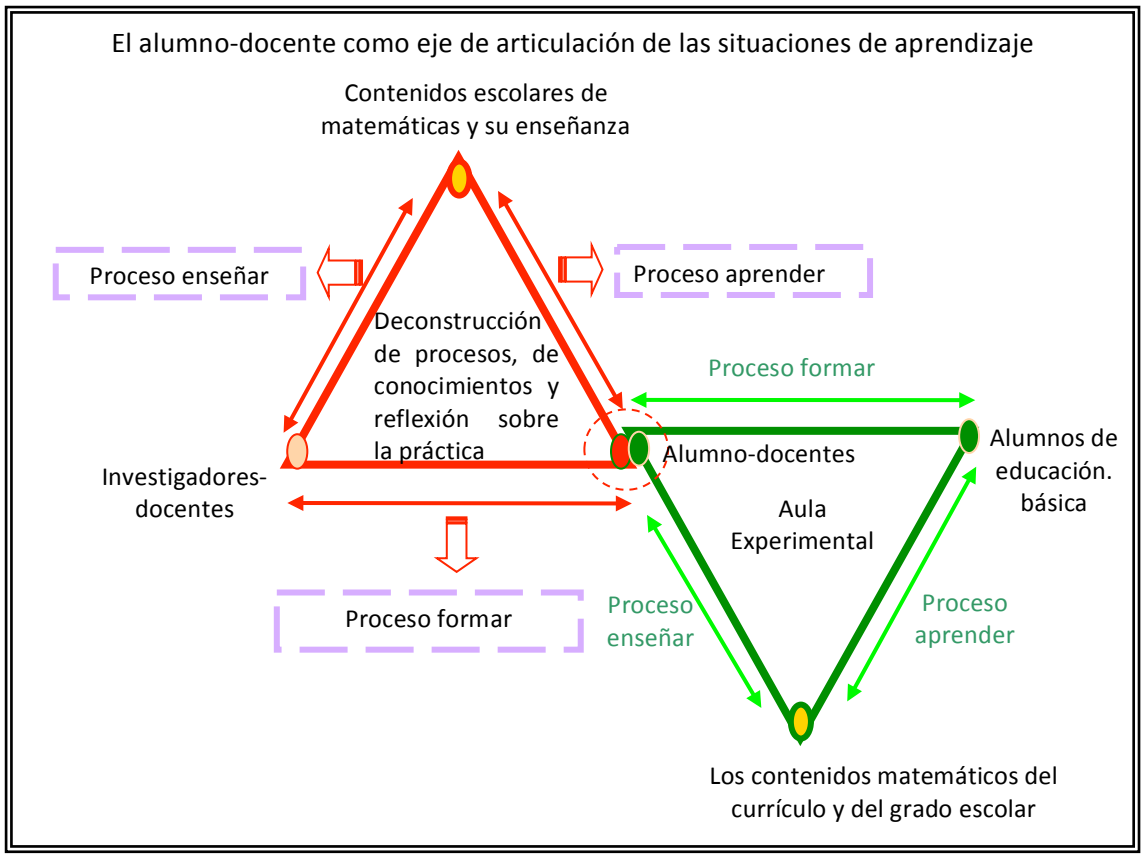


Figura 1. Los alumno-docentes enlace de dos triángulos didácticos

En el primer triángulo los investigadores-docentes y los alumno-docentes se sitúan respectivamente en los vértices inferiores y en el vértice superior se encuentran los contenidos escolares de matemáticas de educación básica como conocimiento a dominar y como tema de enseñanza. En el segundo triángulo se sitúan respectivamente en los vértices superiores los alumno-docentes y los alumnos de educación básica y en el vértice inferior se encuentran los contenidos escolares de matemáticas del grado escolar en el que dan clase. Cabe destacar que el eje de articulación de ambas situaciones educativas son los alumno-docentes.

El equilibrio entre las relaciones mencionadas es difícil observar ya que generalmente se pondera alguna de ellas sobre las demás, quedando el tercer componente excluido. Sin embargo este desequilibrio posibilita comprender la dinámica de la clase y representó para los autores de este artículo, un punto de reflexión para enfocar elementos que clarificaran aún más la complejidad de la clase de matemáticas.

De esta manera se llevaron a cabo observaciones de las clases de los alumno-docentes, primero desde un punto de vista pedagógico que resultó insuficiente y entonces se puso en la mira la actividad matemática que se promovía en clase considerando las fortalezas y debilidades de la misma. Posteriormente se construyó un marco teórico de referencia que considerara de manera comprensiva los elementos que estructuran las clases de matemáticas, y se identificaron cuatro componentes: Gestión, Comunicación, Mediación y Actividad Matemática. Este marco teórico de referencia devino en una herramienta de análisis de las clases. En este artículo se presenta un ejemplo del análisis de la clase utilizándolo.

Marco teórico de referencia

La clase de matemáticas es una construcción permanente de significados. El triángulo didáctico muestra una interdependencia dinámica entre la triada docente-alumnos-contenidos de matemáticas, misma que está circunscrita a formas de gestión, mediación y comunicación que particularizan la actividad matemática de la clase.

Gestión

La gestión, de acuerdo con Perrenoud (2004), se refiere a la estructuración de la clase, la forma en que se organiza y se lleva a cabo. Por lo que se consideran expresiones de gestión: la selección de los contenidos escolares a estudiar, los recursos y materiales a utilizar, la disposición del tiempo, el lugar y la manera de participar. De acuerdo con la gestión de la clase los alumnos pueden ser más autónomos o más dependientes ya que estas significaciones están regidas por normas que, muchas veces, se tornan incuestionables.

Muchos de los saberes pedagógicos de los docentes están ligados con el deber ser de la profesión y se traducen en la gestión de la clase. La disciplina, el control de los posibles incidentes, el trabajo con material concreto, la evidencia física del trabajo en clase son algunos ejemplos que se pueden citar.

Actividad matemática

Las autoridades educativas en México afirman que: “La orientación adoptada para la enseñanza de las matemáticas pone el mayor énfasis en la formación de habilidades para la resolución de problemas y el desarrollo del razonamiento matemático a partir de situaciones prácticas” (Secretaría de Educación Pública, 1993, p. 15-16).

Hacer matemáticas en la escuela entraña que los profesores observen los procesos de aprendizaje de los alumnos y reflexionen acerca de las tareas que disponen para promover la actividad matemática. A decir de Freudenthal (1981) de nada sirve una repetición de patrones sin sentido, por lo que concebir las matemáticas como una actividad educativa, requiere que los alumnos realicen tareas que enriquezcan su conocimiento de las herramientas para organizar la información y solucionar problemas (matematización horizontal), y que con ello apliquen con sentido los símbolos y el lenguaje matemático en nuevas y diferentes situaciones (matematización vertical Treffers 1987).

Comunicación

Algunos investigadores como Brendefur y Frykholm (2000) argumentan que la comunicación en clase tiene una relación directa con el desarrollo de la comprensión de los contenidos matemáticos. Ya Habermas (1987) explicaba que en la comunicación los argumentos sobre una situación son los que dan lugar a diálogos y la gestación de conflictos cognitivos.

En las clases de matemáticas los mensajes educativos tienen que ser experiencias que se traduzcan en instrumentos intelectuales para que los estudiantes produzcan soluciones a algunas situaciones.

La función de la comunicación es útil para que el maestro facilite a los alumnos el acceso a la cultura matemática y es el medio por el que se da cuenta del pensamiento matemático de sus alumnos al promover que confronten sus soluciones y las argumenten.

Los mensajes educativos no siempre coinciden con lo que se pretende comunicar y además no sólo se transmiten mensajes respecto a los contenidos matemáticos sino respecto a lo que son las matemáticas y las maneras de actuar frente a los retos que se presentan.

Mediación

En la mediación el profesor se sitúa entre los estudiantes y los contenidos matemáticos. Por un lado, él promueve el acceso de los estudiantes a contenidos y métodos matemáticos y por otro lado, percibe cómo los estudiantes los usan.

Dewey (1910/2002) planteó la importancia de que el maestro promueva la conexión consciente entre el método empleado y la respuesta. Por su parte, Freudenthal (1981) propuso la reinvención guiada de las matemáticas, para que los alumnos no las conciban como ideas preconcebidas y sin sentido. Vigotsky (1926/2005) manifiestó que el mediador (el docente) ha de favorecer que el alumno aprenda junto con otros y también sugiere la toma de conciencia de lo que se aprende. Wood, Bruner, y Ross (1976) refieren a la mediación en la clase desde planteamientos generales con su categoría de andamiaje; Anghileri (2006) lo hace específicamente en el contexto de la clase de matemáticas enfatizando el clima de trabajo, las explicaciones y el desarrollo del pensamiento matemático.

Para los autores de este estudio en la mediación el papel del maestro es fundamental, pues es el encargado de que el aula se convierta en un lugar donde todos los estudiantes realicen actividad matemática, entre las acciones de mediación dirigidas a enriquecer y favorecer la re-estructuración de los esquemas de conocimiento de los alumnos se pueden mencionar:

Implicar a los estudiantes en la tarea a realizar y provocar que organicen los conocimientos previos útiles para significar la nueva experiencia.

Escuchar a los alumnos, identificar las ideas de los estudiantes y estructurar su participación. orientar a los estudiantes para pensar en propuestas de solución, promover que los estudiantes tomen conciencia de su aproximación a la tarea de manera que autorregulen sus

productos, proporcionar ejercicios y tareas en las que sea necesario que los alumnos usen diferentes representaciones y o significados del tema estudiado, preguntar y promover que ellos pregunten o enuncien problemas.

En la Figura 2 se muestran cómo los elementos que estructuran la clase pueden estar relacionados con la construcción del conocimiento matemático como experiencia enriquecida y enriquecedora del desarrollo cognitivo de los alumnos.

El profesor interpreta los contenidos escolares y las intenciones educativas que implican su estudio, utiliza sus saberes pedagógicos para disponer la gestión de la clase y utiliza sus saberes didácticos y de la matemática escolar para realizar una traducción de los mensajes educativos que ha de comunicar.

La toma de conciencia de los docentes sobre la importancia de la mediación hace que ésta sirva de engrane para que la gestión y los procesos de comunicación se adecuen a la actividad matemática que se pretende que los alumnos lleven a cabo.

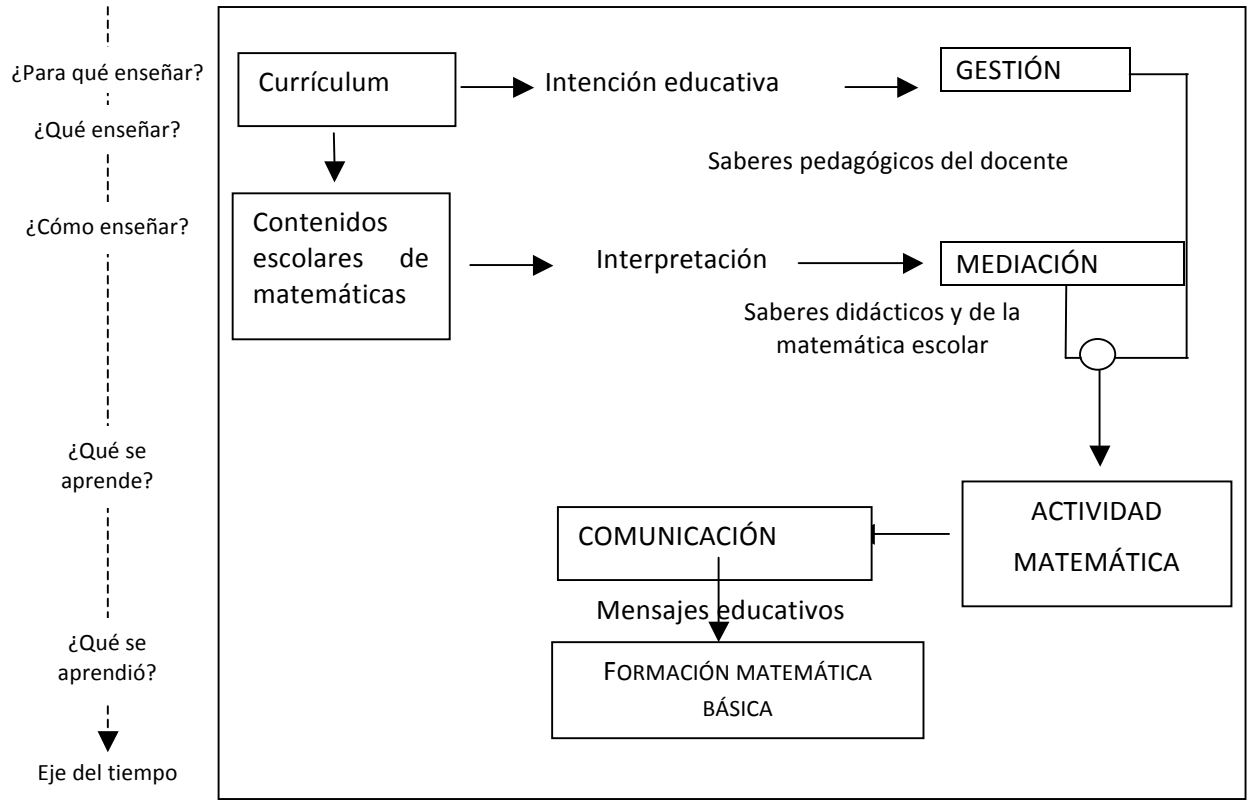


Figura 2. Esquema del desarrollo de la clase de matemáticas

Como puede apreciarse en la clase están presentes el qué, el para qué, el cómo del proceso enseñar y el qué del proceso aprender relacionados con la estructura general de la clase e íntimamente implicados con los mensajes educativos y el proceso de formación matemática básica de los alumnos.

Metodología

Para alcanzar el objetivo se hizo un estudio longitudinal de 4 años y medio con 3 profesores inscritos en el programa de desarrollo profesional mencionado en la sección 1. Esta investigación consta de dos etapas.

Primera etapa. Tuvo una duración de 3 años, su desarrollo coincidió con el período en que los profesores cursaron el programa de desarrollo profesional, situación educativa representada en la Figura 1.

Durante esta etapa se hicieron tres tipos de observación en el aula:

a) Observación de dos clases de matemáticas consecutivas de cada uno de los profesores -el tema de la clase fue elegido libremente por ellos-, al término de la observación se entrevistó a los profesores con relación a la planeación y ejecución de las clases. Las clases se grabaron en video, se realizó el análisis de las clases y se llevó a cabo una reunión de reflexión con los docentes centrando su atención sobre la actividad matemática que se concretó en las clases,

b) planeación colectiva. Se propuso a los docentes planear una clase colectivamente, para que uno de ellos la llevara a cabo con sus alumnos, la clase se grabó en video y se organizó una sesión de reflexión en la que se entrevistó al docente que concretó la clase y al resto de sus compañeros después de observar el video de la clase. La planeación se realizó con base en un tema propuesto por ellos,

c) experimentación. Se pidió a los docentes que planearan una clase sobre un tema asignado, con el fin de observar qué ponían en juego para estructurar la experiencia de aprendizaje y romper con la puesta en práctica de clases ya estructuradas.

d) Resolución de un problema didáctico. Se planteó a los profesores que por equipo propusieran una secuencia didáctica para la solución de un problema de aprendizaje ya

documentado teóricamente y esta vez los docentes planearon, llevaron a cabo una clase, escribieron un informe sobre su experiencia y expusieron a todo el colectivo sus trabajos.

Segunda etapa. Al egreso del programa de desarrollo profesional se realizaron 10 observaciones de las clases de matemáticas de los tres profesores implicados en el estudio longitudinal, se entrevistó a los docentes al final de cada clase.

Para el análisis de las clases primero se refieren los antecedentes del contenido matemático a estudiar y el aprendizaje esperado, de acuerdo con el currículum oficial, enseguida se seleccionan los episodios de la clase y se presenta el análisis de éstos. Los episodios son situaciones cuya estructura argumentativa da cuenta de una situación didáctica global, caracterizada por significados y sentidos completos.

Emilio y la ubicación espacial

Se presenta un ejemplo de la primera parte de la etapa 1. Emilio, tenía a su cargo un grupo de segundo grado y seleccionó una lección del libro de texto con un contenido que sus alumnos ya habían estudiado en primer grado: la reproducción de una figura sobre una retícula punteada. Con una secuencia didáctica de este tipo se persigue el desarrollo de la percepción geométrica centrada en las relaciones entre objetos que aparecen en el plano. En los libros para el maestro de primer y segundo grados (SEP, 1994b) se advierte que estas tareas no resultan fáciles para los niños y se sugieren diferentes tipos de ayuda. Para primer grado se recomienda a los docentes que apoyen a los alumnos trazando una de las líneas del dibujo para que ellos continúen hasta terminarlo y para segundo se sugiere que el docente pregunte a los niños dónde podrían comenzar el trazo de la figura, tomando como referencia una de las esquinas de la retícula.

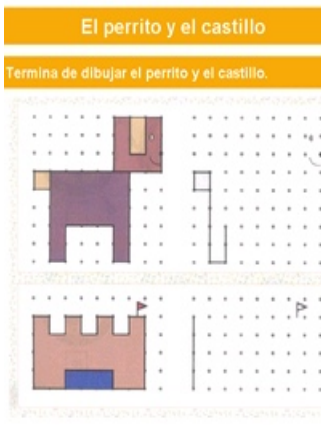
Lección 94. 1er grado Bloque 4, pág. 119	Lección 127. 1er grado Bloque 5, pág. 156.	Lección 56. 2do. grado Bloque 3, pág. 87.
		

Figura 3. Secuencia de actividades usando retículas punteadas en primero y segundo grados (SEP, 1994 a)

Estas tareas tienen una secuencia que varía en su nivel de dificultad (ver Figura 3, columnas 1, 2 y 3). Emilio seleccionó la lección 'El perrito' (Figura 3, columna 3). La actividad tiene dos secciones; la primera consiste en copiar el perro en la retícula de la derecha y la segunda consiste en trazar cuadrados dentro del perro y contarlos. Al iniciar la clase algunos niños ya tenían el perro trazado, por esa razón en el episodio que se incluye, hay dos actividades que se

realizan de manera simultánea; la participación del docente se da entre un ir y venir de una sección a otra de la lección.

Transcripción del episodio 1 (fragmentos).

Se indica el tiempo de participación, la participación del profesor Emilio con E, la de un niño con N. Las participaciones que se identifican como mediación están subrayadas.

8:34 E. En la parte de abajo hay una figurita de un perrito, también tenemos que hacerlo en los puntitos que están del lado derecho.

8:48 ¿Ya Lulú? [La niña ya tiene copiado el perro]. Ándele pues ¿eh? Ahora qué dice, traza cuadraditos dentro del perrito, ¿cuántos cuadraditos podemos trazar? Cuadrados [El profesor traza un cuadrado con los dedos en el aire].

11:39 E. ¡Fíjense bien! El cuerpo del perrito, ¿cuántos puntitos abarca? Vayan viendo bien. [E. regresa con Lulú quien no ha realizado nada de lo que le indicó anteriormente]. ¡Ah! Con Usted estábamos, vamos a trazar cuadraditos, préstame tu lápiz, vamos a trazar dentro del perrito cuadraditos como éstos, utilizando los puntitos, vea, un cuadradito así, así, así y así pero dentro del perrito [E. traza un cuadrado en el libro de la niña utilizando cuatro puntos de la retícula, fuera de la superficie del perro]. ¿Cuántos de éstos [señala el cuadrado que acaba de hacer] habrá aquí?, [señala el perro] completitos.

11:53 E. [Revisa lo que hacen los niños y se detiene para guiarlos porque algunos niños trazan el perro sin respetar la distancia entre los puntos en el modelo]. ¿Cuántos puntitos hay de este lado de la orejita?

12:27 E. [Confirma la respuesta de los niños] cuatro, trázalo aquí.

16:01 [E. se dirige a todo el grupo]. Ahora vamos a hacer cuadritos utilizando los puntitos, ¿cuántos cuadritos pueden caber en el perrito de la mano izquierda?

17:27 N. ¡Maestro!, ¡Maestro! Aquí no le entiendo.

17:29 E. [Acude al llamado del niño] ¿En la parte del perrito? Es que la cabecita se la hiciste más abajo entonces ya no te cabe, lo que podemos hacer, ve, mira, así como lo habías hecho, hasta acá hasta acá y hasta acá, así como está aquí. Cuatro puntitos hacia arriba, hacia arriba, luego uno hacia acá, hacia la derecha y luego hacia abajo con un piquito, hazle un piquito, [el niño va trazando con su lápiz la figura del perro], aquí, aquí, aquí, [le señala en el libro] sí, así, luego abajo.

18:30 [E. lo deja solo y se dirige con otra niña] Esto hay que rellenarlo de cuadritos.

18:35 [Revisa lo que hace otra niña] ¿Dónde más puede haber cuadritos? Aquí hay uno, acá otro y aquí otro. Todo tiene que quedar dentro del perrito.

[Revisa el trazo de un niño que tiene su libro al revés, E. se lo voltea] Fíjate dónde llegó la colita del perrito, y hasta dónde la tienes, la colita del perrito.

19:31 [E. Ayuda a un niño a comenzar el trazo del perrito] A ver vamos a empezar por la parte más fácil, por la parte más fácil, vamos a empezar por la oreja, en qué puntito empezó la oreja, esta oreja, tres puntitos hacia arriba, uno, dos tres. Luego se va, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, puntitos hacia

abajo: uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, ahora se va para acá. Hasta ahí tiene que quedar la oreja, no hasta acá. Haz una línea por los puntitos, [borra el trazo del niño], pero vete por los puntitos Mario, vete por los puntitos. Mario, de este puntito a este puntito. [El maestro traza la línea tomando la mano del niño].

22:.35 ¿Ya? Ahora de este puntito a este puntito, esa es la primera orejita, esta es la orejita de este lado, ahora de aquí hasta acá, tres puntitos, y luego uno, dos, tres, cuatro puntitos hacia abajo, te tienes que ir sobre los puntos.

22:43 N. Maestro, ¿así? [Un niño le muestra su trabajo].

E. De preferencia que les quede igualito, igualito, todo relleno de cuadritos.

23:44 E. Toda la figurita con cuadritos, muchos, muchos cuadritos. A ver, ¿quién ya terminó? Levanten la manita, ¿Cuántos cuadritos le caben al perrito?

N. 22 maestro.

24:48 E. ¿22? A ver, ¿quieren checarlo? a ver si caben más.

N. ¿Así? [Un niño le muestra su trabajo].

E. Fíjate cómo le está haciendo Pamela (…)

26:00 N. Maestro, ¡no puedo!

26.13 E. No puedo, A ver, ¿quién terminó?, levanten la manita. ¿Ya? ¿Cuántos cuadritos fueron?, ¿cuántos cuadritos fueron? Adentro del perrito.

N. 22.

27:36 E. Tu compañero dice que son 47, ¿dónde puede haber más cuadritos?, ¿ya no caben?

[Revisa el cuaderno de un niño]. A él le cupieron 47 [cuadrados]. (…) A él le cupieron 47 (…) ¿43?, ¿33? [Menciona respuestas escritas de algunos niños] Hay que rellenar al perrito con cuadritos. ¿Quién piensa que no puede solito?, si hay alguna personita que ya terminó…

N. Yo ya terminé

29:50 E. Bueno le puedes ayudar al que tú quieras, ayudar mas no hacerlo ¿eh?

Enseguida se exponen los resultados del análisis con base en las categorías utilizadas.

Gestión. En este episodio se destacan tres maneras de gestionar la clase:

1. El maestro da instrucciones generales a todo el grupo para que inicien individualmente la actividad de la lección.
2. La interacción durante la realización de la tarea es maestro un alumno.
3. El docente evalúa y da indicaciones para corregir la tarea.

Comentario: La organización individual para hacer la tarea le posibilita a Emilio identificar quién tiene dificultades; sin embargo, más de la mitad de los alumnos tienen dificultades y le lleva mucho tiempo atender la demanda de cada niño; debido a esto se acentúan las diferencias en el ritmo de avance de los miembros del grupo. La atención individual comienza a

rebasar a Emilio, algunos alumnos comienzan a abandonar la tarea hasta que Emilio puede ir con ellos.

Mediación. El episodio de la clase se caracterizó por dos momentos de mediación:

1. El profesor se da cuenta de las dificultades de los alumnos en la reproducción de la figura en la retícula, contar los puntos o seleccionar dónde iniciar el trazo. Ver participaciones min. 11:53 y min. 19:31. De esta forma el profesor ayuda a los niños a trazar, borrar, y a indicar por dónde comenzar la reproducción del modelo.

2. En la actividad de trazar cuadrados dentro de la figura, Emilio también alienta a los niños para que respondan cuántos han encontrado.

El profesor retoma las diferentes respuestas de los niños sin validarlas y pregunta sobre la respuesta de un niño, que es la más cercana a lo que él considera la respuesta correcta, para que la verifiquen.

En la entrevista Emilio expresa lo siguiente:

> Entrevistador: ¿Tienes actividades específicas para los niños que tienen dificultades?
>
> Emilio: (…) me acerco más a ellos, los niños que siempre dicen: ¡maestro!, ¡maestro!, son los que les cuesta trabajo, (…) me acerco y les digo: A ver fíjate bien, les doy la misma actividad con más ayuda, con ellos más que a los que lo pueden hacer solos.
>
> Entrevistador: ¿Qué dificultades esperabas en el grupo?
>
> Emilio: Yo no esperaba la dificultad del perrito, pensé que les iba a ser más fácil y copiar los puntitos y después dibujar cuadritos. Esa actividad dibujar cuadritos ya lo habíamos hecho con unas figuras para ver lo del área pero yo no pensé que les iba a costar tanto trabajo dibujarlos.

Comentario: Al parecer Emilio dio por hecho que los niños trazarían el perro sin dificultad y que al ser fácil él se enfocaría en promover que trazaran los cuadrados dentro de la figura. Sin embargo, el hecho de que algunos niños ya hubieran copiado el perro y que otros tuvieran dificultades con la reproducción lo rebasaron. El profesor para facilitar a los alumnos el trazado de la figura, atiende a la sugerencia del libro para el maestro de primer grado: ayudarlos con los primeros trazos, a otros además, les explica que se fijen por dónde pueden comenzar a trazar (ver en la transcripción minutos 11:53 y 18:35). Con la mediación que el docente promueve varios niños logran superar las dificultades pero no es evidente que se dé cuenta que baja la complejidad de la actividad. La mediación de Emilio promueve que los alumnos se centren en terminar la tarea, pero no se observa la reflexión de los estudiantes sobre sus acciones.

Actividad matemática. La actividad matemática está dividida en dos partes.

1. Los alumnos tratan de reproducir una figura en una retícula punteada.
2. Después de la reproducción de una figura, trazan y cuentan cuadrados completos dentro del contorno de la figura.

Comentario: Las dificultades que tienen los niños con la actividad se convierten en un problema con el tiempo asignado a la clase, aunado a esto el hecho que algunos niños ya tuvieran realizada la primera parte de la lección, hace que el profesor vaya de una actividad a

otra, sin aparente orden. Con respecto al cuadriculado de la figura, Emilio promueve que trabajen con la figura del lado izquierdo, para evitar equivocaciones, sin embargo en el video no se aprecia qué hacen los niños y los que ya avanzaron en esa dirección tienen respuestas muy variadas. La actividad matemática que realizaron los niños que presentaron dificultades fue de nivel más bajo que el esperado, como ya se mencionó aparentemente sin que el docente fuera consciente de esto.

Comunicación. Los mensajes educativos que se presentaron en esta clase son los siguientes:

1. Cuando se reproduzcan figuras en retículas punteadas es necesario identificar un punto de referencia.
2. Terminar una tarea es importante.

Comentario: El docente está al pendiente de cómo los alumnos entendieron las actividades propuestas; en esta clase parecería ser que los niños más demandantes son los que se exigen a sí mismos terminar con las actividades. También hay niños que no pueden, como Mario, que no dicen nada, y que logran hacer la tarea por la iniciativa del maestro (ver 19:31). En la participación 27:36 propone una comparación de respuestas, pero no establece el diálogo entre los alumnos, su intervención parece más enfocada en advertir a modo de pista una respuesta cercana a lo que él espera que contesten.

Consideraciones sobre la experiencia de Emilio

En este primer acercamiento a las clases de Emilio se pone de manifiesto su preocupación por cumplir con saberes pedagógicos que considera importantes como: el control de la clase, terminar las actividades propuestas y dejar un registro de la experiencia en los cuadernos de los alumnos. A estos saberes Carrizales (1991) les llama obsesiones pedagógicas que a manera de estereotipos cobran fuerza de tradición y muchas veces constituyen un obstáculo para lograr los objetivos propuestos.

A continuación se expresan las relaciones percibidas entre las categorías de análisis, tomando como punto central los efectos de la mediación, gestión y comunicación sobre la actividad matemática pretendida.

La gestión en la clase de Emilio

1) Emilio organiza el trabajo individual por lo que promueve una actividad matemática como proceso aislado; 2) el docente, durante la entrevista, mostró un amplio conocimiento sobre el currículum en general y de la secuencia de actividades sobre el tema, propuestas en los libros de texto, y establece una relación fuerte niño-libro, contenido matemático que depende de la habilidad de cada uno para resolver tareas; 3) el profesor cuenta con el trabajo de los niños que tienen éxito para distribuir su tiempo de atención a los demás, por lo que fomenta una actividad matemática circunscrita en los libros de texto; 4) Emilio estructura una intervención individual en la que da indicaciones puntuales sucesivas para resolver la tarea y su verificación; 5) Emilio recurre a un apoyo entre pares, aunque declara la ayuda, promueve una actividad

matemática como un procedimiento de imitación al que 'sabe' o al que 'puede'; 6) el profesor fomenta una demanda de atención individual; alumno-maestro y apoya una actividad matemática carente de reflexión sobre lo que 'sale' como se espera.

La mediación en la clase

1) El docente sigue la secuencia didáctica sugerida en la propuesta curricular, en consecuencia aparentemente los niños no tendrían que haber presentado dificultades (zona de seguridad pedagógica) con la tarea, 2) Emilio intenta de forma primordial apoyar a los niños que tienen dificultades, en consecuencia promueve una actitud pasiva ante la actividad matemática y una disposición para seguir 'pasos' indicados por el maestro. 3) El docente establece secuencias de preguntas y respuestas para comprender lo que se debe hacer en el libro, o bien para introducir la actividad a realizar, en consecuencia los alumnos se limitan a responder sin considerar las respuestas de otros compañeros. 4) Para el docente las dificultades de los niños son una sorpresa y con base en su conocimiento de la secuencia didáctica recurre a bajar de nivel de complejidad de la actividad propuesta para que algunos niños terminen la tarea, por lo que fomenta una actividad matemática limitada a conocimientos previos.

La comunicación en la clase

1) Emilio a lo largo de la clase transmite varios mensajes educativos, la mayoría de sus preguntas están estructuradas en términos de respuestas cortas, en consecuencia, los niños no se comprometen con la actividad matemática a realizar. 2) El docente comunica formas de hacer en aras de que los alumnos relacionen sus acciones con la tarea, en consecuencia, hay indicios de promover la reflexión sobre la tarea antes de actuar, 3) El profesor recurre sólo a lo que los niños son capaces de hacer por lo que parece que no se implica en la reestructuración de la red de significados escolares matemáticos de la lección. 4) Con sus acciones el docente se muestra como un aliado de los alumnos, comunica un mensaje de seguridad en las posibilidades de los niños con respecto a las tareas matemáticas, 'todos pueden' con las tareas propuestas.

Reflexiones sobre la MEM y el desarrollo profesional de los docentes

El acercamiento a la práctica docente abrió una serie de interrogantes y retos sobre los procesos formativos de los maestros en la enseñanza de las matemáticas. En este episodio, se aprecia que el docente toma decisiones importantes para la conducción de la clase, pero al parecer no es conciente de las mismas, respecto a la actividad matemática de los alumnos. Para los alumnos que no pueden con la tarea baja el nivel de dificultad de la actividad matemática de la lección y deja avanzar solos a los que pueden hacerlo.

La enseñanza se caracteriza por dar instrucciones y no por la mediación para que los alumnos trasciendan sus posibilidades. Que el maestro no esté conciente de esto hizo que gestionara la clase como una rutina en la que la comunicación es trivial (juicios de tipo correcto-falso). Tal parece que para el docente lo importante es terminar la lección en el tiempo asignado y que pierde de vista lo que las actividades implican para el aprendizaje de los niños. Se observa que el docente tiene algunas ideas que lo anclan a obsesiones pedagógicas del ser maestro, que se ponderan sobre la finalidad educativa en matemáticas.

Como investigadores y formadores de docentes nos compete reflexionar sobre cómo implicar a los docentes en un proceso de deconstrucción sobre su papel como mediadores de la actividad matemática de los alumnos.

Referências

Anghileri, J. (2006). Scaffolding practices that enhance mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9,* 33-52.

Ball, D. (1988). Unlearning to teach mathematics. *For learning of mathematics, 8,* 40-48.

Brendefur, J., & Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: two preservice teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*, 125-153.

Carrizales, C. (1991). Las obsesiones pedagógicas de la modernidad. *Foro de educación continua, 12*, 20-33.

Dewey, J. (2002). *Cómo pensamos.* Buenos Aires, Argentina: Paidós. (Primera publicación en 1910).

Elbaz, F. (1983). *Teacher Thinking: A Study of Practical Knowledge*. London: Croom Helm.

Figueras, O., & Rigo, M. (2005). *Maestría en Educación, Especialidad en Matemáticas*. [en línea]. D.F, México. Recuperado el 19 de abril de 2012, de http://www.matedu.cinvestav.mx/~maestriaedu/

Freudenthal, H. (1981). Major problems of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics, 12,* 133-150.

Grossman, P. (1990). *The making of a teacher. Teacher knowledge and teacher education*. New York: Teachers College Press.

Habermas, J. (1987). *Teoría de la acción comunicativa I y II*. Madrid, España: Taurus.

Houssaye, J. (1993). Le triangle pédagogique ou comment comprendre la situation pédagogique. In J. Houssaye (Dir), *La pédagogie: une encyclopédie pour aujourd'hui*, Paris: ESF Éditeur.

Perrenoud, P. (2004). *Diez nuevas competencias para enseñar.* Madrid, España: Graó.

Saraiva, M. & Ponte, J. P. (2003). O trabalho colaborativo e o desenvolvimento profissional do professor de Matemática. *Quadrante, 12*(2), 25-52.

Rowland, T. (2008). The purpose, design and use of examples in the teaching of elementary mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 69*, 149-163.

Secretaría de Educación Pública (1993). *Plan y programas de estudio. Educación Básica Primaria*. Dirección General de Materiales y Métodos Educativos. Subsecretaría de Educación Básica y Normal. México.

Secretaría de Educación Pública (1994 a). *Libro para el alumno. Matemáticas primer grado* y *Matemáticas segundo grado*. Dirección General de Materiales y Métodos Educativos. Subsecretaría de Educación Básica y Normal. México.

Secretaría de Educación Pública (1994 b). *Libro para el maestro. Matemáticas primer grado* y *Matemáticas segundo grado*. Dirección General de Materiales y Métodos Educativos. Subsecretaría de Educación Básica y Normal. México.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22.

Treffers, A. (1987). *Three Dimensions. A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction – the Wiskobas Project.* Dordrecht: Reidel Publishing Company.

Vigotsky, L.S. (2005). *Psicología pedagógica. Un curso breve*. Argentina: Aique. (Primera publicación en 1926).

Wood, D., Bruner, J. & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, 17, 89-100.

O *LESSON STUDY* COMO ESTRATÉGIA DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES A PARTIR DA PRÁTICA PROFISSIONAL

Mónica Baptista
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
mbaptista@ie.ul.pt

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

Isabel Velez
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
velez@campus.ul.pt

Margarida Belchior[1]
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
belchior.margarida@gmail.com

Estela Costa
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
ecosta@ie.ul.pt

Resumo: O *lesson study* é um processo de formação que leva os professores a refletirem sobre a aprendizagem dos alunos e também sobre as suas práticas contemplando três fases principais: preparação da aula, observação da aula e reflexão pós-aula. O seu objetivo é criar condições para uma maior compreensão dos processos de aprendizagem dos alunos por parte dos professores e, em termos gerais, para o seu desenvolvimento profissional. Neste texto, apresentamos uma experiência realizada no 7.º ano que incidiu no conceito de proporcionalidade direta. Pretendemos contribuir para o conhecimento das possibilidades do *lesson study* no nosso país e dar a conhecer as aprendizagens profissionais realizadas pelos professores envolvidos. A metodologia de investigação é qualitativa e interpretativa, sendo a recolha de dados feita por registo de observação em notas de campo, gravação vídeo e reflexões escritas dos professores participantes. Assistiu-se a um intenso trabalho de preparação por parte dos professores, acompanhado de perto pela equipa do Instituto de Educação, de reflexão sobre a aula observada e de posterior aplicação nas aulas dos outros professores. O balanço global é francamente positivo, pelas aprendizagens profissionais realizadas relativamente ao tópico lecionado, às tarefas a selecionar e à condução da aula, bem como pelo estímulo dado a uma atitude reflexiva na prática docente.

Palavras-chave: Lesson Study, Prática profissional, Ensino da Matemática, Tarefas, Comunicação.

[1] Bolseira do Ministério da Educação e da FCT (SFRH/BD/41023/2007).

Introdução

No âmbito do Projeto Mais Sucesso Escolar – Escolas de Tipologia Híbrida (MSE-H), o Instituto de Educação procura promover o desenvolvimento dos processos de ensino-aprendizagem, na sala de aula, nas disciplinas de Matemática, Língua Portuguesa e Inglês. No início do ano letivo de 2011-12, estas escolas foram desafiadas a realizar um *lesson study*, uma modalidade de formação de professores que vem conhecendo um interesse crescente em numerosos países (Fernandez & Yoshida, 2004; Murata, 2011). O *lesson study* enquadra-se numa perspetiva de desenvolvimento profissional, encarado como um processo centrado no próprio professor, que ocorre de modo continuado ao longo da sua carreira (Ponte, 1994). Este processo potencia um ambiente reflexivo, permitindo que "os professores aprendam uns com os outros, partilhando e desenvolvendo em conjunto as suas competências" (Hargreaves, 1998, p. 209).

Com este texto pretendemos contribuir para o conhecimento das possibilidades do *lesson study* no nosso país. Na sua base está uma experiência efetuada no presente ano letivo por professores que lecionam o 7.º ano, e que incidiu no conceito de proporcionalidade direta. O nosso objetivo é analisar as aprendizagens profissionais dos professores envolvidos neste processo, dando especial atenção à atividade realizada nas sessões de preparação e reflexão.

O lesson study como processo formativo

Um *lesson study* começa com a definição de uma questão de interesse comum por um grupo de professores, estreitamente relacionada com as aprendizagens dos alunos. Depois, a partir dessa questão, os professores planificam uma aula tendo em atenção as orientações curriculares da disciplina. Preveem dificuldades dos alunos, antecipam questões passíveis de surgir na turma, formulam estratégias de resposta e elaboram guiões de observação da aula. Nesta sequência, a aula é lecionada por um dos professores, ficando os restantes no papel de observadores, tirando notas de campo, com especial atenção ao modo como os alunos resolvem as tarefas. Terminada a aula, esta é objeto de análise, promovendo-se a discussão entre os professores, num processo de aprendizagem profissional. Esta discussão pode originar a reformulação do plano da aula, alterando os materiais a usar, as tarefas a propor, as questões a colocar, etc.. Mais tarde a aula pode voltar a ser lecionada por outro professor a outros alunos (Lewis, Perry & Hurd, 2009; Murata, 2011).

A preparação da aula por um grupo de professores leva-os a analisar em detalhe de que modo os seus objetivos se inserem no currículo e de que modo se pode avaliar o pensamento dos alunos. Além disso, é uma prática valiosa do ponto de vista da mobilização de conhecimento didático e do desenvolvimento desse conhecimento (Meyer & Wilkerson, 2011) e pode promover novas dinâmicas de trabalho (Murata & Takahashi, 2002; Perry & Lewis, 2009). O exercício reflexivo e crítico que decorre das observações da "lição" (que tem como foco a aprendizagem do aluno e não o trabalho do professor) dá-se numa ação conjunta, dialogada, que favorece a compreensão das necessidades dos alunos, das suas potencialidades e dos seus mecanismos de aprendizagem. Este exercício induz o questionamento das práticas, pressupondo o seu enriquecimento e o aumento do conhecimento dos professores (Murata, 2011), permitindo-lhes estarem mais atentos às dificuldades e raciocínios dos seus alunos (Alston, Pedrick, Morris, & Basu, 2011).

São vários os estudos que nos indicam que o *lesson study* constitui um processo de desenvolvimento profissional dos professores, levando-os a envolver-se em processos de reflexão e trabalho colaborativo (e.g., Fernandez, Connon, & Chosky, 2009; Fernandez & Yoshida, 2004; Murata & Takahashi, 2002; Perry & Lewis, 2009; Puchner & Taylor, 2006). Para

os professores que participaram no estudo de Murata e Takahashi (2002), "o *lesson study* é a forma mais efetiva de desenvolvimento profissional", tendo-os ajudado a melhorar a sua prática e permitido o seu crescimento profissional (p. 1883). Além disso, para esses professores, o *lesson study* facilita a ligação da teoria com a sua prática, possibilitando colocar em ação as orientações para o ensino da Matemática e refletir sobre o seu uso com os colegas.

Num outro estudo, levado a efeito por Perry e Lewis (2009), os professores participantes destacam várias mudanças que ocorreram nas suas práticas após sua participação no *lesson study*, nomeadamente (i) o uso de tarefas que promovem o pensamento dos alunos; (ii) a resolução de tarefas antes de serem realizadas na sala de aula, antecipando possíveis dificuldades e raciocínios dos alunos; (iii) a discussão e comparação de respostas dadas pelos alunos às tarefas, incluindo análise de respostas incorretas; (iv) o uso de recolha de dados dos alunos para tomar decisões; e (v) a oportunidade, durante a realização das tarefas, de os alunos chegarem às respostas. Os professores mencionam também que o *lesson study* permitiu aumentar a formulação de questões aos colegas, utilizar recursos para fundamentar as discussões, aumentar o número de discussões sobre os raciocínios dos alunos e o interesse em observar as aulas de outros professores e discutir essas observações. De acordo com Hurd e Licciardo-Mucco (2005), o *lesson study* valoriza os professores como profissionais, permitindo-lhes "usar o talento coletivo e experiências" para melhorar as aprendizagens dos alunos, não sendo um novo programa de formação, "mas um processo que ajuda os professores a serem aprendizes" (p. 395).

Metodologia de investigação

A metodologia de investigação seguida neste trabalho é qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994), tendo por base a observação participante, uma das principais estratégias de investigação das ciências sociais (Jorgensen, 1989). Tratando-se de uma experiência inovadora a realizar numa escola, onde a participação dos investigadores não só é possível como desejável, entendemos ser esta a abordagem de investigação mais indicada. A experiência decorreu numa escola secundária dos arredores de Lisboa. Estiveram envolvidos cinco professores de Matemática da escola, sendo quatro deles titulares das turmas deste ano de escolaridade e um professor assessor de todas as turmas. A equipa do Instituto de Educação que conduziu a experiência é composta pelos cinco autores deste texto.

Na nossa perspetiva, o *lesson study* pertence sobretudo aos professores participantes. Assim, fizemos o desafio inicial para a sua realização e acompanhámos de perto as várias etapas do processo, não como responsáveis mas como interlocutores. O nosso papel foi, sobretudo, o de proporcionar oportunidades de reflexão aos professores envolvidos, sobre as aprendizagens dos alunos e sobre as suas práticas. Antes de iniciarmos a experiência reunimo-nos três vezes com a coordenadora do projeto MSE-H da escola (que também é professora de Matemática e esteve envolvida em todo o processo, com a qual mantivemos contato regular através de e-mail) e participámos em várias reuniões realizadas na escola, bem como na observação da aula, e na reflexão final. Em termos globais, a experiência decorreu de 31 de outubro de 2011 a 25 de janeiro de 2012.

A recolha de dados foi feita por três processos: (i) notas de campo, com registos da observação participante realizada nas reuniões na escola e na aula observada; (ii) gravação vídeo das reuniões realizadas na escola e na aula observada; e (iii) reflexões escritas realizadas pelos professores participantes. A análise de dados procura identificar elementos particularmente significativos do ponto de vista da aprendizagem profissional dos professores, bem como outros possíveis indicadores de desenvolvimento profissional, tanto nos momentos coletivos de trabalho como nas suas reflexões.

A experiência

Planeamento

O primeiro passo deste *lesson study* foi uma reunião realizada em 31 de outubro de 2011 entre a equipa do Instituto de Educação e a coordenadora do projeto MSE-H da escola, em que lhe propusemos a realização de uma atividade deste tipo em Matemática. A coordenadora do projeto aceitou o desafio e colocou a proposta aos professores de Matemática, do 7.º ano, que a aceitaram prontamente. Após a constituição do grupo de professores que iria participar no *lesson study,* a equipa do Instituto de Educação formulou uma proposta de calendário, que foi discutido e aperfeiçoado numa reunião em 17 de novembro com a coordenadora do projeto, e que contemplava três fases principais: preparação da aula, observação da aula e reflexão pós-aula.

A fase de preparação envolveu cinco sessões, realizadas entre novembro e janeiro de 2012. Cada sessão teve uma duração de cerca de uma hora a trinta minutos. Estas sessões decorreram às quartas-feiras, no dia da semana e hora em que todos os professores participantes tinham disponibilidade para se encontrarem. Nas duas primeiras sessões, por sugestão dos professores da escola, a equipa do Instituto de Educação não esteve presente. Deste modo, os professores participantes assumiram desde o início um forte protagonismo neste processo.

Na primeira sessão, que teve lugar em 23 de novembro, os professores decidiram que a questão de interesse comum a abordar seria a compreensão que os alunos têm do conceito de proporcionalidade direta e definiram a turma e o professor que lecionaria a aula observada. Decidiram, então, que o *lesson study* seria realizado numa turma do 7.º ano, constituída por 29 alunos. A professora da turma é uma jovem professora contratada, simpática e alegre que aparenta ter cerca de 30 anos de idade e que, ao longo das sessões de preparação, mostrou disponibilidade para experimentar novas situações na sua aula e interesse em que a aula observada fosse a sua.

A segunda sessão decorreu em 30 de novembro. Os professores começaram por fazer o reconhecimento geral do tópico no programa e nos manuais escolares e, em seguida, procederam à seleção de tarefas em materiais de apoio ao professor. Debruçaram-se também na identificação de possíveis dificuldades dos alunos, a partir da resolução de uma tarefa.

Na terceira sessão, que teve lugar em 7 de dezembro, a equipa do Instituto de Educação esteve presente pela primeira vez. Os professores definiram os objetivos da aula, estreitamente relacionados com as aprendizagens dos alunos sobre a proporcionalidade direta. Em seguida, discutiram um excerto de um artigo sobre tarefas de exploração e investigação em Matemática (Ponte, Quaresma & Branco, 2011). A discussão do artigo foi orientada pela equipa do Instituto, que colocou algumas questões e destacou os momentos de aula referidos no artigo. Durante a discussão, os professores identificaram-se com o tipo de aula descrita. O aspeto que teve maior destaque nesta sessão foi a preparação de uma tarefa de diagnóstico sobre os conhecimentos dos alunos relativos ao conceito de proporcionalidade direta. Esta tarefa viria a ser realizada nas aulas das diversas turmas no final do 1.º período. Os professores, em conjunto com a equipa do Instituto, decidiram as questões a incluir, tendo por base a tarefa que haviam resolvido na sessão anterior e os conceitos matemáticos já estudados pelos alunos no 6.º ano. A tarefa envolveu os significados de "grandezas diretamente proporcionais" e "constante de proporcionalidade" (Figura 1).

A quarta sessão decorreu em 4 de janeiro de 2012, novamente com a participação da equipa do Instituto de Educação. A sessão iniciou-se com uma reflexão sobre os dados da aplicação da tarefa de diagnóstico, tendo os professores constatado que a maioria dos alunos não

respondeu a duas questões, porque desconhecia o significado de "diretamente proporcional" e "constante de proporcionalidade". A equipa do Instituto colocou algumas questões relacionadas com as respostas dos alunos na tarefa, procurando que os professores refletissem sobre as dificuldades que estes poderiam sentir na aula observada. Tratou-se de um momento especialmente relevante, pois permitiu aos professores planearem a aula que antecede o *lesson study* e a tarefa a propor aos alunos na aula a observar.

Lê, com atenção, as seguintes perguntas. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

Considera a relação existente entre o comprimento do lado de um quadrado e o respetivo perímetro.

A) Determina o perímetro de um quadrado cujo lado mede 3 cm.

B) Determina quanto mede o lado de um quadrado cujo perímetro é 18 cm.

C) Completa a tabela:

Comprimento do lado do quadrado (cm)	1	2	3			
Perímetro do quadrado (cm)		8		18	26	

D) Justifica a seguinte afirmação: "O perímetro de um quadrado é diretamente proporcional ao

Figura 1 – Tarefa para diagnóstico (7.º ano)

A tarefa realizada na aula do *lesson study* encontra-se dividida em duas partes (Figura 2). Com a primeira, os professores pretendiam que os alunos resolvessem duas questões que pressupõem uma relação de proporcionalidade direta, envolvendo os ingredientes necessários para fazer um bolo. Partindo desta condição, os professores solicitaram aos alunos que completassem uma tarefa, averiguassem se existia proporcionalidade direta, indicassem a constante de proporcionalidade, interpretando o seu significado e selecionassem e representassem expressões algébricas relacionadas com as situações de proporcionalidade direta. Com a segunda parte, os professores pretenderam que os alunos relacionassem gráficos cartesianos e expressões algébricas. Deste modo, a aula observada teria como principais objetivos: (1) Reconhecer a constante de proporcionalidade; (2) Exprimir relações dadas em tabelas em linguagem algébrica; e (3) Relacionar gráficos cartesianos e expressões algébricas.

Parte I

BOLO DE LIMÃO

Para 6 pessoas

6 ovos

240 g de açúcar

1 colher de chá de fermento

A Fernanda pretende fazer um bolo de limão para a sobremesa do jantar.

1. Que quantidade de açúcar é necessária para fazer um bolo para 3 pessoas?
   Explica como chegaste à tua resposta.
2. A Fernanda gastou 12 dl de leite. Fez um bolo para quantas pessoas?
3.

N.º Pessoas			6	
Ovos	1			
Açúcar				360
Leite		1,5	3	

4.
   A. Existe uma relação de proporcionalidade direta entre a quantidade de açúcar e o número de pessoas? Em caso afirmativo, indica a constante de proporcionalidade e o respetivo significado.
   B. Das expressões seguintes, indica as que podem traduzir uma relação entre a quantidade de açúcar e o número de pessoas.

[A] $n = a$ [B] $x = 40y$ [C] $y = \frac{x}{40}$
[D] $x \times y = 40$ [E] $n = 40a$ [F] $y = 40 + x$

5. Escreve uma expressão algébrica que traduza a relação entre:
   A. O número de ovos e o número de pessoas.
   B. A quantidade de leite e o número de pessoas.

Parte II

Associa cada uma das expressões algébricas a respetiva representação gráfica.

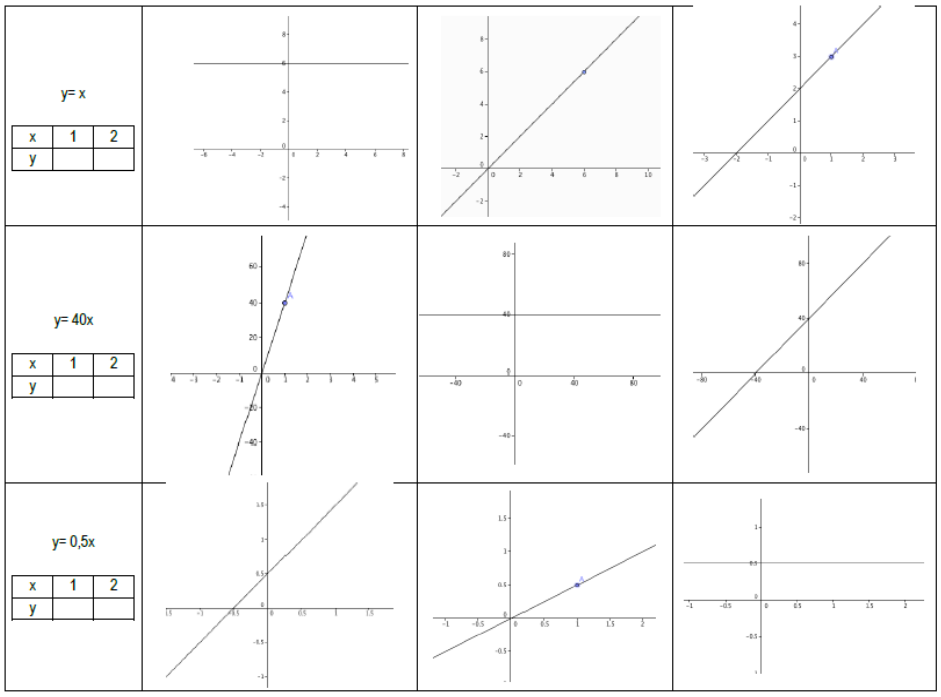


Figura 2 – Tarefa para a aula do lesson study (7.º ano)

Ficou decidido que o trabalho em sala de aula seria realizado em pares e previu-se que a aula fosse constituída por cinco segmentos: dez minutos para a introdução da tarefa, trinta minutos para os alunos, em pares, realizarem a parte I da tarefa, vinte minutos para a discussão coletiva e síntese, quinze minutos para os alunos, em pares, realizarem a parte II da tarefa e quinze minutos para fazer uma nova discussão coletiva e uma síntese do trabalho realizado. Durante o delineamento da tarefa, a discussão sobre os segmentos previstos para a aula e o modo de trabalho dos alunos, a equipa do Instituto de Educação procurou colocar algumas questões, que orientassem a sessão e promovessem o debate entre os intervenientes.

Na quinta sessão, que decorreu em 18 de janeiro, a discussão da tarefa foi o ponto que ocupou mais tempo. A equipa do Instituto de Educação levantou diversas objeções a aspetos da tarefa inicial que foram amplamente discutidas. A partir desta discussão, os professores decidiram alterar uma questão e reformular outras duas questões. Posteriormente, com a nossa participação, sempre mais no papel de colocar questões do que de fazer propostas, os professores discutiram o modo de apresentação da tarefa, as dificuldades dos alunos, as ideias a sublinhar na síntese final e os processos de observação a usar. Em relação a este último aspeto, os professores decidiram que os sete observadores, durante a introdução da tarefa, discussão e síntese final, manter-se-iam no fundo da sala de aula, seguindo o discurso geral (com atenção especial às intervenções dos alunos) e que, durante o trabalho de pares, cada um seria responsável pela observação de dois pares de alunos. Foi mais uma vez salientado pela equipa do Instituto de Educação que o foco da observação seriam os alunos e não o professor.

Aula observada

A aula observada decorreu em 24 de janeiro. Os alunos entraram na sala de aula e sentaram-se em pares. Em seguida, a professora da turma, Mariana, deu início à introdução da tarefa, referindo o modo como iriam trabalhar e o tempo para a realização da parte I. Antes de os alunos iniciarem o trabalho em pares, Mariana leu em voz alta o enunciado. Os alunos mostraram-se interessados e começaram a trabalhar na resolução das questões. Durante a sua realização, Mariana foi circulando pelas mesas e os observadores, que até então se tinham mantido no fundo da sala, deslocaram-se para junto dos dois pares a observar. Passados 30 minutos, Mariana deu início à discussão coletiva, que demorou o restante tempo da aula. A discussão foi feita, questão a questão, tendo sido dada oportunidade a vários alunos, de explicarem o modo como chegaram às respostas. Por exemplo, este facto é visível na discussão, transcrita das gravações vídeo da aula observada, da segunda questão:

> Mariana – A Fernanda gastou 12 dl de leite. Fez um bolo para quantas pessoas? Explica como chegaste à tua resposta. Então, Marco explica lá como é que o teu grupo pensou.
>
> Marco – Nós fizemos uma sequência, professora.
>
> Mariana – Uma sequência? Então, explica lá o teu raciocínio.
>
> Marco – A nossa sequência foi uma sequência de pessoas e dos decilitros. Fizemos que 6 pessoas equivaliam a 3 dl, 12 pessoas equivaliam a 6 dl, 18 a 9 e 24 a 12. Chegámos à resposta: a Fernanda com 12 dl de leite fez um bolo para 24 pessoas.
>
> Mariana – Exato, essa sequência… Na verdade, foste achar as proporções, não é? A resposta do Marco é única? Só assim é que conseguiam descobrir? (…) O Marco explicou uma maneira. Foi o raciocínio como ele e o André chegaram aos 24. Ora, outro raciocínio diferente, outra maneira… Luís!

João – Eu fiz professora… Corresponde a 24 pessoas porque 3 dl está para 6 pessoas, separando dá 3+3+3+3 igual a 12 dl e depois fiz 6+6+6+6 que dá 24.

Mariana – Também é uma maneira, exatamente.

Note-se que a seguir às perguntas da professora, "A resposta do Marco é única? Só assim é que conseguiam descobrir?", a maioria dos alunos colocou o dedo no ar para apresentarem as suas explicações. A discussão das questões decorreu com bastante ritmo e participação dos alunos, não havendo perdas de tempo.

Após este momento, Mariana escreveu no quadro as três expressões algébricas a que os alunos chegaram no decorrer da tarefa, $y=40x$, $y=0,5x$ e $y=x$, pedindo-lhes que pensassem numa função que pudesse representar o modelo de situações de proporcionalidade direta, tal como é evidenciado no seguinte excerto retirado da gravação vídeo:

Mariana – Se eu quiser generalizar… *x* e *y* são duas variáveis diretamente proporcionais, então a expressão algébrica que as relaciona vai ser do tipo *y* igual a quê? Então, afinal, o que é este 40; 0,5?

Miguel – A constante de proporcionalidade, o *k*.

Mariana – Exato a constante de proporcionalidade. Que muda, não muda? Muda consoante o problema que nós temos.

Miguel – Será $y=kx$.

Após a resposta de Marco, e para terminar a aula, Mariana escreveu no quadro a expressão $y=kx$, tendo em seguida procedido à recolha das respostas dos alunos.

Reflexão e seguimento

A reflexão sobre a aula observada teve lugar em 25 de janeiro. A equipa do Instituto de Educação propôs que a discussão decorresse de acordo com a sequência de questões que compunham a tarefa, dando sobretudo atenção ao trabalho dos alunos a pares, uma vez que os observadores tinham registos bastante completos sobre as ocorrências desta fase. Em termos globais, os professores consideraram que os alunos não tiveram dificuldades muito significativas, tendo a tarefa cumprido bem o seu papel. No entanto, notou-se que apenas alguns grupos resolveram a questão 5, relacionada com a escrita da expressão algébrica. A este respeito, por exemplo, a professora Marlene na sua reflexão escrita mencionou que "apenas alguns alunos foram também capazes de escrever as expressões algébricas pedidas".

Os professores ficaram surpreendidos com o tempo necessário para a discussão da parte I da tarefa, mostrando relutância em admitir que o tempo previsto não fora suficiente. Este facto é visível no excerto que se segue retirado do registo vídeo:

Equipa do IE – Eu acho que nós previmos um tempo reduzido para a discussão, acho que subvalorizamos, subdimensionamos a discussão.

Marlene – Esta turma é boa, dá luta.

Equipa do IE – Acho que houve um erro da nossa parte ao planificarmos a aula, de se achar que esta discussão se fazia adequadamente em 20 minutos. Esta discussão precisou de 45 minutos e a sensação que me dá é que não houve perdas de tempo (…) acho que esta discussão não poderia ter sido mais curta.

(…)

> Luís – Achei que a partir de certa altura só uma faixa de alunos é que conseguia acompanhar (…) A discussão abrangeria mais alunos (…) se fossemos um bocadinho mais dóceis [cuidadosos].

A esta primeira aplicação da tarefa, seguiu-se a sua realização, na sala de aula, por outros professores envolvidos. Quando lhes colocámos a questão sobre o que mudariam na tarefa, antes da aplicação nas suas turmas, os professores começaram por dizer que não fariam alterações. Porém, após alguma reflexão sobre o assunto, concluíram que aplicariam a parte II da tarefa (respeitante a gráficos de funções) noutra aula. Equacionaram, igualmente, alterar o enunciado da questão 5, solicitando aos alunos a escrita (em vez da escolha) de equações, como se pode verificar na seguinte transcrição do registo vídeo:

> Inês – Para alunos que não perceberam bem a expressão algébrica não sei se tornou mais simples [pedir-lhes que selecionassem a expressão, em vez de a escreverem]
>
> Isabel – Não. Eles chegam aqui e dizem para 6 pessoas dá 240… Ovos com pessoas?
>
> (…)
>
> Equipa do IE 1 – Podemos questionar-nos se ela [questão 4 A] cumpriu bem o seu papel ou se haveria outra maneira (…) Poderia ter sido mais vantajoso a gente mudar essa questão?
>
> Luís – Na minha opinião poderia ter sido mais vantajoso. Nesta altura do campeonato é a primeira vez que eles veem as expressões, [deveríamos] tentar não mostrar logo tantas expressões… A gente quis mostrar que $x=40y$ servia, por cima disso, que já é difícil eles perceberem que o $x=40y$ serve, por cima disso o $n=40a$ também serve, portanto, mas por que é que este serve e este também serve? (…) Mais uma confusão! (…) Acho que deveríamos ter as expressões todas com as mesmas incógnitas.

Aprendizagens dos professores

Podemos agrupar as aprendizagens profissionais dos professores, no decurso desta experiência, em quatro domínios: processos de raciocínio e dificuldades dos alunos, seleção das tarefas, gestão da comunicação na sala de aula e colaboração profissional.

1. Processos de raciocínio e dificuldades dos alunos

A participação no *lesson study* levou os professores a estarem mais atentos aos processos de raciocínio dos alunos. Isso pode ser observado ao longo de todo o processo e também nas suas reflexões escritas. É o caso de Marlene, que salienta que "os raciocínios apresentados pelos grupos de alunos foram distintos de grupo para grupo, o que foi bastante positivo pois permitiu mais discussão e contribuiu para que os alunos conhecessem várias formas de resolver um mesmo problema". Inês e Luís, na sua reflexão, explicitam o modo como os alunos chegaram às respostas:

> Na questão 3, os alunos apresentaram processos de raciocínio diversos para o preenchimento da tabela. Ao contrário das expectativas, a maioria dos alunos não iniciou pela coluna correspondente às 6 pessoas. Apenas um reduzido número de alunos utilizou a receita como ponto de partida para o preenchimento da tabela, para de seguida procurar estabelecer relações entre os respetivos valores (…) Alguns dos alunos, embora tendo preenchido toda a tabela, recorreram a raciocínios aditivos.

Os professores também referem as dificuldades que os alunos sentiram na realização da tarefa. Por exemplo, Marlene começa por salientar que inicialmente julgou "que os alunos

teriam grandes dificuldades no preenchimento da tabela, mas a maioria conseguiu fazê-lo com alguma facilidade e os processos utilizados foram bastante variados". No entanto, "a diversidade de respostas dificultou a obtenção da forma geral da expressão algébrica de uma função de proporcionalidade direta por parte dos alunos". Ao aperceber-se desse facto, a professora refere ter procurado "orientar os alunos no sentido de obter o pretendido". Inês e Luís fazem uma avaliação um pouco diferente de Marlene do trabalho com a tabela, indicando que os alunos "sentiram dificuldades na transposição da informação contextual (receita do bolo) para a representação tabelar". Na sua perspetiva:

> O número de alunos que não conseguiu preencher a tabela ou que sentiu muitas dificuldades foi superior ao esperado, sendo que o número de linhas da tabela constituiu um obstáculo. A maioria dos alunos não conseguiu resolver a questão 5 durante o momento de trabalho autónomo em pares.

2. Seleção de tarefas

Um outro aspeto mencionado pelos professores na sua reflexão prende-se com a contribuição do *lesson study* para o tipo de tarefas a propor na sala de aula. Por exemplo, Marlene salienta que a participação neste processo proporcionou "uma reflexão mais aprofundada sobre a importância da realização de tarefas de exploração e investigação em sala de aula" e sobre as suas "práticas de ensino". Isabel refere que o *lesson study* lhe permitiu "conhecer melhor [as] potencialidades e dificuldades das tarefas" a realizar com os seus alunos. A importância da fase de preparação da aula, centrada na elaboração de tarefas em consonância com as orientações curriculares, é mencionada por Inês e Luís:

> O trabalho coletivo desenvolvido em torno de um conjunto de tarefas e materiais enquadrados nas orientações curriculares e que constituíram objeto de análise e de discussão permitiram uma efetiva interpretação e análise das orientações curriculares, conduzindo à respetiva concretização.

3. Gestão da comunicação na sala de aula

No momento da reflexão, após a aula, era bem visível a surpresa dos professores com o tempo que tinha tomado a discussão coletiva. Nas reflexões escritas, após a aplicação da tarefa, todos os professores admitiram que a discussão da parte I da tarefa demorou mais tempo que o previsto, como indica Inês e Luís:

> O tempo previsto para a discussão coletiva foi insuficiente, em virtude das dificuldades manifestadas na identificação da expressão algébrica, pelo que a mesma se estendeu durante cerca de mais 15/20 minutos que o previsto, não sendo possível realizar a toda a tarefa na mesma aula.

A importância destes momentos de discussão, o seu papel, e o modo como têm que ser preparados e conduzidos pareceu ser uma questão nova para estes professores, que provavelmente terão de continuar a debruçar-se sobre o assunto.

4. Colaboração profissional

Para os professores envolvidos, o *lesson study* constituiu um processo de formação que promoveu o seu desenvolvimento profissional, relevando em especial o contributo do trabalho colaborativo entre professores, durante as sessões de planeamento. Do ponto de vista de Marlene, o "*lesson study* proporcionou, ainda, mais uma oportunidade de colaborar" com os seus colegas, "partilhando e discutindo experiências de ensino e eventuais dificuldades sentidas". O "trabalho conjunto" permitiu-lhe "desenvolver novas e melhores estratégias de atuação dirigidas à superação das dificuldades detetadas, enriquecendo" a sua "formação e atividade profissional". A este propósito Inês e Luís salientam que "o *lesson study* promove a articulação entre professores e valoriza a colaboração e a troca de experiências profissionais,

sendo um estímulo para a compreensão de diferentes práticas letivas". Isabel refere que "a confrontação de experiências, de expectativas e de diversas perspetivas sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática no seio de um grupo de professores, torna-se muito rica e contribui para a contínua procura do melhoramento das práticas".

As reflexões dos professores sugerem que esta experiência teve potencialidades reflexivas. É o exemplo de Isabel que escreve:

> Penso que é importante refletir sobre as minhas práticas, apoiando-me na experiência, na investigação e em outros recursos importantes para a avaliação do meu desenvolvimento profissional. A confrontação de experiências, de expectativas e de diversas perspetivas sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática no seio de um grupo de professores, torna-se muito rica e contribui para a contínua procura do melhoramento das práticas e do conhecimento matemático dos alunos.

Ainda em relação a este aspeto, Inês e Luís mencionam que o *lesson study* é um "processo de formação" que tem "uma forte ligação com a prática letiva dos professores" que permite a "reflexão sobre essa mesma prática", constituindo "um elemento motivador para a respetiva implementação". Isabel refere "em termos globais avalio o contributo do *lesson study* para o meu desenvolvimento como professora, bastante positivo, uma vez que houve uma partilha de experiências, saberes e ideias".

Em resumo, todos os professores consideraram que esta experiência facilitou o seu desenvolvimento profissional, sendo a colaboração entre eles, em especial na fase de preparação, um importante contributo.

Conclusão

Esta experiência reforça a ideia de que o *lesson study,* envolvendo a preparação aprofundada de uma aula, a sua observação e a reflexão posterior, constitui um processo promissor de desenvolvimento profissional dos professores participantes. Procurando tornar os professores mais atentos às aprendizagens dos seus alunos, este processo de formação potencia o aperfeiçoamento das suas práticas de ensino e da sua capacidade reflexiva. Uma outra experiência realizada em paralelo com professores portugueses do 1.º ciclo do ensino básico (Baptista, Costa, Velez, Belchior & Ponte, 2012) conduziu a resultados muito semelhantes. Ambos os casos evidenciam as potencialidades de uma prática que envolve os professores em processos de reflexão e em trabalho colaborativo e corrobora as conclusões de outros estudos que valorizam a observação de aulas de outros professores como um ponto de partida para a reflexão sobre a prática profissional (Saraiva & Ponte, 2003). Muito especialmente, o *lesson study* estimula os professores a um olhar atento sobre os processos de raciocínio e as dificuldades dos alunos, levando-os a questionar-se sobre as tarefas a propor e o modo de gerir a comunicação na sala de aula, bem como a assumir uma atitude mais aberta à colaboração profissional valorizando a reflexão. Trata-se, contudo, de um processo de formação que requer um investimento considerável, tanto por parte dos professores participantes como por parte da equipa que os apoia. Deste modo, estudar as condições de realização deste tipo de atividade que maximizem os benefícios, em contextos ecologicamente viáveis, constitui um importante desafio para a investigação educacional.

Referências

Alston, A., Pedrick, L., Morris, K., & Basu, R. (2011). Lesson study as a tool for developing teachers' close attention to students' mathematical thinking. In L. Hart, A. Alston, & A.

Murata (Eds.), *Lesson study research and practice in mathematics education* (pp. 135-151). New York, NY: Springer.

Baptista, M., Costa, E., Velez, I., Belchior, M., & Ponte, J. P. (2012). Lesson study: Um contributo para a formação de professores e promoção do sucesso escolar. *In Atas AFIRSE 2012*. Lisboa: IE-UL.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Fernandez, C., & Yoshida, M. (2004). *Lesson study: A case of a Japanese approach to improving instruction through school-based teacher development*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Fernandez, C., Connon, J., & Chosky, S. (2009). A US -Japan lesson study collaboration reveals critical lenses for examining practice. *Teaching and Teacher Education, 19*, 171-185.

Hargreaves, A. (1998). *Os professores em tempos de mudança*. *O trabalho e a cultura dos professores na idade Pós-Moderna*. Lisboa: Mc Graw-Hill.

Hurd, J., & Licciardo-Mucco, L. (2005). Lesson study: Teacher-led professional development in literacy instruction. *Language Arts, 82*(5), 388-395.

Jorgensen, D. L. (1989). *Participant observation: A methodology for human studies*. Newbury Park, CA: Sage.

Lewis, C., Perry, R., & Hurd, J. (2009). Improving mathematics instruction through lesson study: A theoretical model and North American case. *Journal of Mathematics Teacher Education, 12,* 285-304.

Meyer, R., & Wilkerson, T. (2011). Lesson study: The impact no teachers' knowledge for teaching mathematics. In L. Hart *et al*. (Eds.), *Lesson study research and practice in mathematics education* (pp. 15-26). New York, NY: Springer.

Murata, A. (2011). Introduction: Conceptual overview of lesson study. In L. Hart *et al*. (Eds.), *Lesson study research and practice in mathematics education* (pp. 1-12). New York, NY: Springer.

Murata, A., & Takahashi, A. (2002). Vehicle to connect theory, research, and practice: How teacher thinking changes in district-level lesson study in Japan. In *Proceedings of the PME-NA*. Athens, USA.

Perry, R., & Lewis, C. (2009). What is successful adaptation of lesson study in the US? *Journal Educational Change, 10*, 365-391.

Ponte, J. (1994). O desenvolvimento profissional do professor de matemática. *Educação Matemática, 31*, 9-12 e 20.

Puchner, L., & Taylor, A. (2006). Lesson study, collaboration and teacher efficacy: Stories from two school-based math lesson groups. *Teacher and Teaching Education, 22*, 922-934.

Saraiva, M., & Ponte, J. P. (2003). O trabalho colaborativo e o desenvolvimento profissional do professor de Matemática. *Quadrante, 12*(2), 25-52.

EXPLORAR TAREFAS PARA PROMOVER O RACIOCÍNIO ESTATÍSTICO NO ENSINO SECUNDÁRIO: POSSIBILIDADE OU MIRAGEM?[1]

Sandra Quintas
Unidade de Investigação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
sandramquintas@gmail.com

Hélia Oliveira
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ul.pt

Rosa Antónia Tomás Ferreira
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto e CMUP
rferreir@fc.up.pt

Resumo: O presente estudo foca-se no conhecimento didático do professor de Matemática em Estatística, insere-se numa investigação qualitativa mais ampla e baseia-se num dos três estudos de caso qualitativos dessa investigação: a professora Estela. Este texto tem como objetivo caracterizar a prática profissional da professora no ensino do tema Estatística, especificamente no que respeita ao tipo de tarefas propostas e à sua exploração com os alunos de uma turma de Matemática A de 10.º ano e que podem promover o desenvolvimento do raciocínio estatístico dos alunos. A análise da prática de Estela evidencia o caráter interrelacionado dos vários domínios do conhecimento didático do professor. Os resultados sugerem que uma ação de formação sobre o ensino da Estatística frequentada pela professora terá propiciado algum desenvolvimento do seu conhecimento didático em Estatística.

Palavras-chave: conhecimento didático do professor, práticas, tarefas, raciocínio estatístico.

Introdução

A crescente importância da Estatística no mundo atual veio chamar a atenção para a relevância deste tema no ensino, contribuindo para lhe dar uma maior ênfase nos currículos escolares, nacional e internacionalmente. Tem sido reconhecido que cabe à escola formar cidadãos que saibam interpretar inteligentemente a informação quantitativa que circula, de modo abrangente, na nossa sociedade globalizada. Todavia, vários estudos apresentam evidência de que, em geral, os adultos não pensam estatisticamente para analisar e tomar decisões sobre questões pessoais importantes (Ben-Zvi & Garfield, 2004).

O facto de muitos professores de Matemática terem tido uma formação limitada em Estatística, e não terem experienciado a análise de dados, dificulta o desenvolvimento do seu pensamento estatístico, o que tem repercussões nas suas práticas (Ben-Zvi & Garfield, 2004). Nesse sentido, vários autores referem a necessidade de um maior investimento na formação inicial e contínua dos professores em Estatística (Burrill & Biehler, 2011; Gattuso & Ottaviani,

[1] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito dos projetos *Desenvolver a literacia estatística: Aprendizagem do aluno e formação do professor* (contrato PTDC/CPE CED/117933/2010) e PEst-C/MAT/UI0144/2011, e por fundos FEDER através do Programa Operacional Fatores de Competitividade – COMPETE.

2011) tendo em conta, por exemplo, aspetos chave do pensamento estatístico, como a variabilidade e o processo de investigação estatística. O conhecimento didático do professor deve também englobar o saber como desenvolver nos alunos uma boa compreensão concetual da Estatística e o conhecer os desafios que estes enfrentam nas suas aprendizagens.

O presente estudo tem como objetivo contribuir para a compreensão do conhecimento didático do professor que ensina Estatística, no ensino secundário. Mais especificamente pretende-se compreender a prática profissional de uma professora de Matemática, que frequentou uma ação de formação sobre Estatística focada no raciocínio estatístico, no que diz respeito à criação/seleção de tarefas e sua exploração em sala de aula, à luz do seu conhecimento didático em Estatística.

Perspetivas sobre a Educação Estatística

Vários autores afirmam que há necessidade de que os professores tenham cada vez mais consciência da especificidade da Estatística e a tomem em consideração nas suas práticas, muitas vezes mais centradas em cálculos e procedimentos do que na análise de dados e interpretação de resultados (Shaughnessy, 2006; Rossman, Chance & Medina, 2006). De facto, a Estatística possui ferramentas e modos de pensamento próprios. Para Shaughnessy (2006), o pensamento matemático pode ser caracterizado por aspetos como: "procurar padrões, abstrair, generalizar, especializar, gerar e aplicar algoritmos" (p. 78), entre outros. Contudo, já como características de referência do pensamento estatístico, este autor indica os cinco aspetos enumerados por Wild e Pfannkuch (1999): (1) necessidade de dados; (2) conhecimento contextual sobre os dados; (3) atenção à variação; (4) ferramentas de modelação; e (5) *transnumeração* (termo usado por Wild e Pfannkuch (1999) que diz respeito à capacidade de se mudar de representação para se chegar a uma melhor compreensão dos dados).

Os alunos podem experienciar a especificidade do pensamento estatístico trabalhando com dados reais, através da resolução de problemas da vida real (Snee, 1993), o que contribui também para darem mais sentido às ferramentas e conceitos estatísticos. Burgess (2006, 2011) sugere que o ensino da Estatística seja feito através de investigações estatísticas. Numa abordagem inicial, esse processo deve focar-se na análise de dados e nas conclusões; à medida que os alunos ganham experiência, o ensino da Estatística deve passar a ter em conta as quatro fases do processo investigativo: (1) formulação da questão; (2) planificação e recolha de dados; (3) análise de dados; e (4) interpretação e comunicação de resultados.

No ensino da Estatística, pretende-se que os alunos alcancem o raciocínio e o pensamento estatístico, indo-se além da literacia estatística básica (Burgess, 2011; Cobb & Moore, 1997). Ben-Zvi e Garfield (2004) distinguem as noções de literacia, raciocínio e pensamento estatísticos. A literacia estatística "inclui capacidades básicas e importantes que podem ser usadas na compreensão da informação estatística ou resultados de investigações" (Ben-Zvi & Garfield, 2004, p. 7). O raciocínio estatístico relaciona-se com a capacidade de "interpretar completamente resultados estatísticos" (p. 7). Este engloba, por exemplo, ser capaz de compreender e interpretar estatísticas sumárias de dados, estabelecer ligações entre conceitos estatísticos (por exemplo, entre medidas de localização e medidas de dispersão) e entre diferentes representações estatísticas ou até relacionar ideias estatísticas com o acaso. O pensamento estatístico "envolve uma compreensão do porque e como é que as investigações são conduzidas e as grandes ideias subjacentes nas investigações estatísticas" (p. 7). Num grau mais elevado, "os pensadores estatísticos são capazes de criticar e avaliar resultados de um problema resolvido ou de um estudo estatístico" (p. 7).

Na perspetiva de Garfield e Ben-Zvi (2007), há aspetos comuns entre literacia, raciocínio e pensamento estatístico mas, ainda assim, pode considerar-se que existe uma hierarquia entre estas três capacidades. A literacia estatística fornece as bases para o raciocínio e o pensamento estatísticos. Num nível intermédio está o raciocínio estatístico e, por fim, no patamar mais elevado desta hierarquia, encontra-se o pensamento estatístico que inclui pensamento de ordem superior ao do raciocínio estatístico e consequentemente ao da literacia estatística. Gattuso e Ottaviani (2011) consideram que essas três capacidades podem ser distinguidas através do nível de compreensão que as pessoas revelam relativamente a conceitos e ferramentas estatísticas e da aptidão de estabelecer conexões entre eles. A educação estatística escolar deve viabilizar o desenvolvimento de um bom raciocínio estatístico nos alunos ao longo dos diferentes níveis de ensino (Shaughnessy, Chance & Kranendonk, 2009).

O conhecimento didático do professor em Estatística

Na perspetiva de Ponte (1999), o conhecimento didático do professor inclui quatro domínios que orientam diretamente a prática letiva. Cada domínio é aqui descrito no âmbito da Estatística, procurando enfatizar a sua especificidade.

O primeiro domínio diz respeito ao *conhecimento dos conteúdos de ensino*. Este inclui a compreensão dos conceitos e procedimentos, as formas de raciocínio, argumentação e validação próprias da Estatística. Este conhecimento também inclui a capacidade de reflexão epistemológica sobre o significado dos conceitos e procedimentos e sobre a natureza do conhecimento estatístico (Batanero & Godino, 2005). Para ensinar Estatística, o professor deve ter experienciado e estar familiarizado com elementos específicos desta disciplina, nomeadamente, com os aspetos do pensamento estatístico e com as diferentes fases do processo de investigação estatística (Wild & Pfannkuck, 1999; Burgess, 2006).

Um segundo domínio do conhecimento didático do professor diz respeito ao *conhecimento dos alunos e dos seus processos de aprendizagem*, o que inclui o conhecimento das suas dificuldades, erros e obstáculos e das estratégias usadas na resolução de problemas (Ponte, 1999; Batanero & Godino, 2005). Neste domínio é também relevante que o professor tenha perceção do nível de compreensão que os alunos possuem ou alcançam relativamente aos diferentes conceitos (Batanero & Godino, 2005).

O *conhecimento do currículo* é o terceiro domínio do conhecimento didático do professor na aceção de Ponte (1999), incluindo o conhecimento das grandes finalidades e objetivos do currículo escolar e sua articulação vertical e horizontal. A literatura revista para este texto apela a que o foco no ensino da Estatística esteja na atividade estatística. Assim, é importante que os alunos tenham um papel ativo no trabalho com dados reais e com investigações estatísticas, de modo a desenvolverem o raciocínio estatístico e estarem cada vez mais próximos do pensamento estatístico. Na mesma linha, o atual enquadramento curricular nacional para o ensino secundário reserva aos alunos um papel importante na construção dos seus conhecimentos matemáticos e estatísticos (DES, 2001).

Por fim, o quarto domínio do conhecimento didático do professor corresponde ao *conhecimento do processo instrucional*, que compreende a planificação, a condução e avaliação do processo de ensino-aprendizagem (Ponte, 1999). É através deste conhecimento que o professor organiza a sua prática letiva e dá resposta às diversas situações de interação com os alunos. Este domínio envolve também a capacidade de adaptação dos conteúdos nos diferentes níveis de ensino, de análise de diversos recursos metodológicos e de uma boa comunicação em sala de aula – sendo capital avaliar as respostas dos alunos aos trabalhos

propostos e responder às suas questões. A escolha das tarefas para a sala de aula deve ter em conta o conhecimento e os objetivos que se pretende desenvolver nos alunos. Aqui também se inclui a capacidade do professor adequar o processo instrucional aos interesses, atitudes e crenças dos alunos e à comunidade em que se inserem (Ponte, 1999; Godino, Batanero, Roa & Wilhelmi, 2008).

Metodologia

O presente texto insere-se numa investigação mais ampla, qualitativa e de índole interpretativa, que incide sobre o conhecimento didático do professor de Matemática no âmbito do ensino da Estatística. Este texto refere-se a uma das professoras participantes, Estela, que é um dos três estudos de caso dessa investigação. Estela é licenciada em Matemática – Ramo Educacional e mestre em Ensino da Matemática. Leciona há cerca de 23 anos e tem experiência com o ensino secundário.

Para a recolha dos dados que informam este texto, foram usados diversos instrumentos, nomeadamente: (1) observação participante, com registo áudio e vídeo de duas aulas lecionadas no 3.º período sobre Estatística na disciplina de Matemática A de uma turma de 10.º ano da professora Estela; (2) realização de duas entrevistas semi-estruturadas à professora com registo áudio; e (3) recolha documental dos materiais produzidos ou utilizados pela professora nas aulas observadas, designadamente, fichas de trabalho e produções escritas dos alunos na resolução de algumas tarefas. A análise de dados foi efetuada de forma descritiva e interpretativa, ponderando e articulando os diversos elementos recolhidos. Esta análise foi guiada por quatro categorias predefinidas, correspondentes aos quatro domínios do conhecimento didático de Ponte (1999).

A professora Estela tinha participado, no 2.º período do mesmo ano letivo, numa ação de formação sobre o ensino da Estatística, na modalidade de oficina, que teve como formadora a primeira autora deste texto. Esta ação de formação tinha como objetivo desenvolver a capacidade de elaboração de tarefas para a sala de aula que visassem o desenvolvimento do raciocínio estatístico dos alunos, enfatizando as quatro fases do processo de investigação estatística referidas anteriormente. Para tal, os formandos tiveram a oportunidade de experienciar este processo investigativo e de o compreender, trabalhando em diversas tarefas investigativas nas várias sessões presenciais da ação, explorando os dados com a folha de cálculo ou a calculadora gráfica, podendo recorrer a todas as ferramentas que considerassem pertinentes. Tais tarefas visam desenvolver um conjunto de capacidades que vão além do cálculo de medidas estatísticas e da construção de representações gráficas. Simultaneamente, foram fornecidas e discutidas, com os professores, algumas orientações didáticas para a exploração destas tarefas na sala de aula (Shaughnessy *et al*., 2009), tendo sido realçados vários aspetos como: (1) formulação de uma ou mais questões que possam ser respondidas com os dados reais fornecidos; (2) análise dos dados dum problema descrevendo padrões gerais e particulares; (3) escolha de representações e modelos estatísticos a serem utilizados na análise de dados; e (4) interpretação, explicação e comparação de diferentes representações, analisando a sua consistência.

O presente estudo decorreu de forma independente da formação realizada. No entanto, a análise de dados teve em conta aquilo que se pode interpretar como possíveis contributos da formação na prática da professora, nomeadamente, ao nível das tarefas que propõe e como as explora na sala de aula.

Perspetiva da professora sobre a Estatística e o seu ensino

Apesar de o programa de Matemática A do ensino secundário sugerir cinco semanas de aulas para a lecionação do tema da Estatística, a professora Estela refere que habitualmente não precisa de lhe dedicar tanto tempo por vários motivos. Por um lado, o tema da Estatística não é extenso; por outro, os alunos não são avaliados em exames nacionais nesta temática (ao contrário dos outros temas lecionados no 10.º ano aos quais dá mais atenção); finalmente, este tema não tem continuidade nos anos seguintes, tornando-se, na sua opinião, o menos importante do programa.

Segundo Estela, os conteúdos programáticos de Estatística servem fundamentalmente para fazer um estudo descritivo, "Não está aqui Estatística indutiva quase nenhuma!" (E1), verificando que o programa apela muito pouco à realização de inferências e que pouco enfatiza a generalização sobre uma população com base numa amostra. A professora considera, deste modo, que o atual programa deveria ser mais desenvolvido sobretudo na parte da Estatística indutiva.

Estela refere que os exercícios propostos habitualmente aos alunos no 10.º ano envolvem pouca interpretação e discussão, e além disso, são resolvidos "sempre da mesma maneira, com receitas…" (E1). Considera que as capacidades que os alunos desenvolvem na resolução das tarefas que propõe são baseadas no cálculo e procedimentos, reconhecendo que são tarefas bastante orientadas. Comparando o atual programa de Matemática A com o trabalho realizado na ação de formação, a professora refere:

> Na ação de formação, por exemplo, nós vimos que por exemplo, desenhamos a reta de regressão, a nuvem de pontos, ajustava-se, e uma variável não tinha a ver uma com a outra. Onde é que isso entra em discussão aqui [atual programa de matemática A do secundário]?! Nunca! Elas [variáveis] estão sempre relacionadas, calha sempre tudo muito direitinho. O r [coeficiente de correlação] calha entre isso e isso, a equação é aquela [equação da reta de regressão linear]. Não há problema (E1).

Neste excerto de entrevista, Estela faz alusão a uma discussão sobre a possibilidade de duas variáveis estatísticas estarem ou não relacionadas através de um modelo linear que ocorreu na ação de formação; contudo, para ela, na Estatística escolar, este tipo de discussão não faria sentido por não estar explícita no programa. Estela evidencia, pois, um *conhecimento do currículo* de Estatística centrado na sua componente descritiva e nas capacidades de cálculo, não privilegiando a interpretação e discussão de resultados.

Na opinião de Estela, o tema da Estatística "deve ser o tema que os alunos mais gostam" no 10.º ano, salientando que isso se deve ao facto de os alunos o acharem fácil, essencialmente porque "os exercícios que fazem dá-lhes sempre certo. Ganham confiança. E aquilo é aquilo e mais nada!" (E1). Contudo, também considera que, em geral, no fim do estudo da Estatística, os alunos ficam com a ideia de que o tema é acessível, mas "não é para aplicar no dia-a-dia" (E1). Na sua perspetiva, os alunos não vão utilizar no seu quotidiano, por exemplo, os conhecimentos aprendidos sobre dados bivariados.

A prática da professora no ensino da Estatística

De uma maneira geral, as aulas de Estela organizam-se em torno da realização e correção de tarefas selecionadas do manual adotado ou de fichas de trabalho elaboradas por si. Algumas tarefas propostas nas aulas são usadas para introdução de conteúdos sendo sempre resolvidas pela professora no quadro, em interação com os alunos. Apesar de as aulas serem bastante

orientadas pela professora, os alunos são, na sua maioria, bastante participativos e ativos. Destaca-se, também, em todas as aulas observadas, um uso constante da calculadora gráfica pela professora e pelos alunos.

Uma tarefa "aberta"

A professora Estela propôs aos alunos na segunda aula observada uma ficha de trabalho que incluía uma tarefa que considerou ter uma natureza aberta, ao contrário das restantes tarefas incorporadas na ficha. Na sua opinião, esta tarefa aberta "obriga a usarem o que quiserem. Isso é a matéria de 10.º ano" (E2). De acordo com a professora, com esta tarefa os alunos teriam a opção de utilizar qualquer um dos tópicos do tema da Estatística que aprenderam até ao momento. A tarefa tinha o seguinte enunciado:

Considera a distribuição das classificações obtidas no Teste Intermédio de uma turma de 10.º ano da Escola X. Recorrendo aos teus conhecimentos de estatística elabora um pequeno relatório acompanhado de gráficos e valores estatísticos que consideres relevantes para o estudo.

Classificação	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
N.º de Alunos	0	0	0	0	0	2	4	0	1	4	2	2	5	2	2	0	0	0	1
%	0	0	0	0	0	8	16	0	4	16	8	8	20	8	8	0	0	0	4

Figura 1: Excerto do enunciado da tarefa

Na apresentação da tarefa à turma a professora disse o seguinte:

> É um trabalho para ser resolvido em casa…. é um pequeno estudo sobre as vossas notas [no teste intermédio]. Podem organizá-las em tabelas, podem fazer um diagrama de extremos e quartis, podem calcular a média, a mediana, o desvio-padrão e dizer o que acham dos resultados… se omitissem algum valor ou valores, o que é que acontecia à média? Subia ou não? (Obs1)

Estas indicações da professora sugerem que, para além de pretender que os alunos elaborassem algumas representações dos dados (tabular, gráfica, numérica), queria que fizessem interpretações, observassem os dados e, eventualmente, analisassem a influência da omissão de um ou mais dados na análise, por exemplo, no que respeita à média. Contudo, quando questionada numa entrevista posterior à aula sobre o que esperava do trabalho dos alunos, ainda sem ter visto as suas respostas, Estela afirmou que esta tarefa não iria originar "grande inferência" ou "grande interpretação", acrescentando:

> Teriam de ver, por exemplo… nesse caso, a nota mais baixa, a mais alta, quantos por centos estão entre o primeiro e terceiro quartis. São interpretações que para os professores são óbvias e, se calhar, para os alunos a uma determinada altura também são, depende muito do nível deles, da maturidade, da participação (E2).

Ao analisar os relatórios de alguns alunos, a professora ficou um pouco dececionada por não haver respostas que considerasse completas: "Daqui vejo que oralmente é uma coisa, mas por escrito era preciso trabalhar mais um bocado" (E2).

Estela verificou, por exemplo, que o aluno A apresentou várias representações (Figura 2), todas corretas (diagrama de caule e folhas, tabela de frequências absolutas e relativas, gráfico de barras e circular, média, moda, desvio-padrão, mediana e diagrama de extremos e quartis),

mas, por este não ter feito nenhum comentário aos resultados obtidos, a professora considerou que "o aluno fez só a estatística descritiva" (E2).

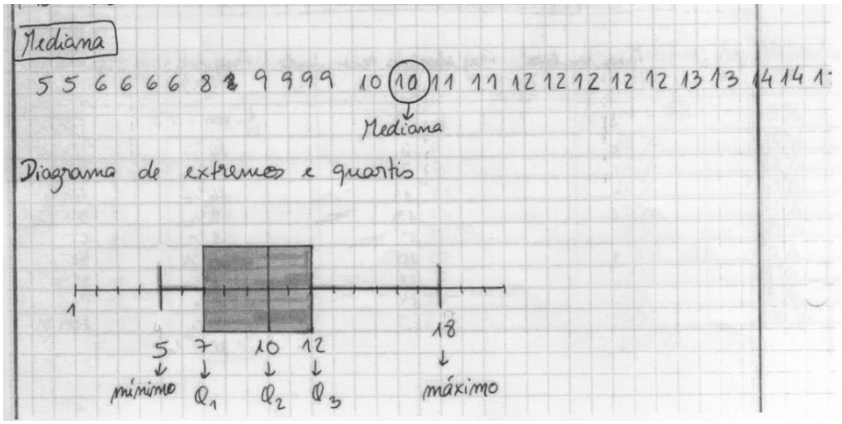


Figura 2: Excerto da resposta do aluno A

O relatório da aluna B continha vários elementos: a expressão analítica da função cumulativa com o desenho à mão do respetivo gráfico, uma tabela de frequências absolutas e relativas, o diagrama de caule e folhas (Figura 3), o diagrama de extremos e quartis (Figura 4), os valores da média, da moda, da mediana e do desvio-padrão com a indicação de que estes valores tinham sido obtidos através da calculadora gráfica.

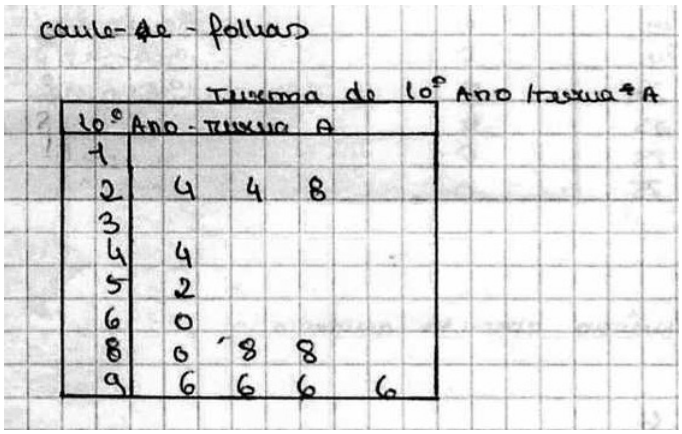


Figura 3: Excerto 1 da resposta da aluna B

A professora notou que a aluna fez o diagrama de caule e folhas de modo incorreto e que apresentou as estatísticas sumárias com valores errados, referindo que esta pode ter interpretado erradamente a tabela com as classificações no enunciado da tarefa.

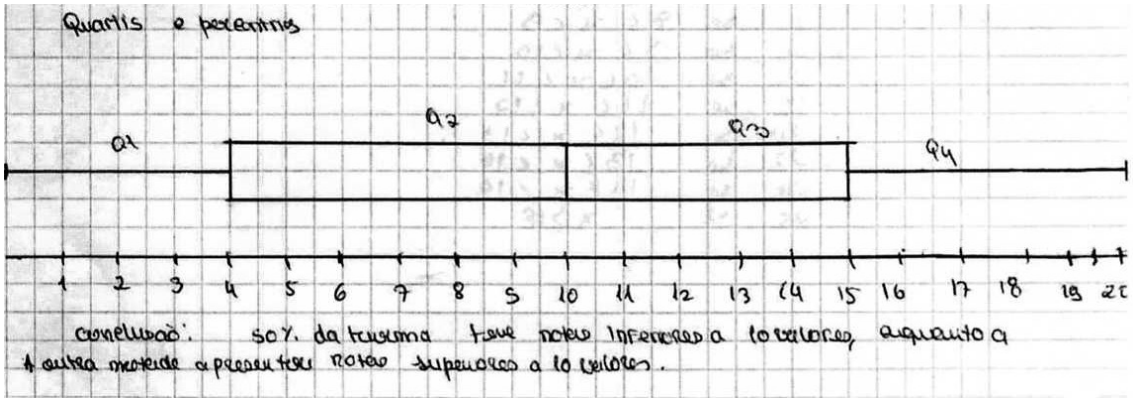


Figura 4: Excerto 2 da resposta da aluna B

A professora também verificou que o diagrama de extremos e quartis elaborado pela aluna B não era o esperado por incluir valores do mínimo, máximo e quartis errados. Considerou mais uma vez que esta situação poderia ser também resultado da leitura incorreta da tabela do enunciado, por parte da aluna.

Esta tarefa, como já referido, foi proposta para trabalho de casa. No entanto, depois de recolhidas as resoluções dos alunos, a professora não deu lugar à partilha ou discussão das mesmas em sala de aula.

Parece-nos que a perspetiva da professora Estela sobre tarefas abertas está associada com a capacidade de o aluno, perante uma tarefa cujo enunciado não diz especificamente o que é para fazer, decidir quais os recursos estatísticos a usar na análise de dados. No momento em que apresenta a tarefa, Estela dá indicações aos alunos que lhes sugerem que devem ir além de cálculos e representações gráficas. Esta perspetiva parece estar em sintonia com o modo como as tarefas foram trabalhadas pelos formandos na ação de formação. No entanto, na entrevista realizada depois desta aula, Estela não parece ter a mesma expetativa relativamente ao potencial desta tarefa aberta que ela própria criou, o que é confirmado pelas resoluções dos alunos. Da análise das respostas a esta tarefa, verifica-se que os alunos acabam por apresentar várias representações e conclusões pouco desenvolvidas, talvez por não estarem habituados a trabalhar regularmente neste tipo de tarefas e a professora revela-se surpreendida com alguns dos erros e dificuldades que estes manifestam. O desempenho observado nos alunos, nesta situação, parece entrar em conflito com o *conhecimento dos alunos* que foi desenvolvendo no decurso da sua prática letiva no ensino secundário.

Uma tarefa para relacionar representações

Na lecionação do tema da Estatística, neste ano, a professora Estela teve uma maior preocupação em relacionar diferentes representações para a mesma distribuição de dados do que fazia anteriormente. De facto, assume ter ficado bastante "sensibilizada" para o assunto com uma tarefa que explorou na ação de formação que envolvia vários histogramas e em que se pretendia estimar os valores da mediana e da média de distribuições de dados representados em histogramas:

> É novo [na sala de aula], explorar mais as representações gráficas, aliás que é aquilo que se vê mais no dia-a-dia. (…) Os alunos não devem fazer ideia do desafio disso. Parecendo que não, já tenho 23 anos de serviço, e não tive nada disso [na formação inicial] … (E2)

Estela encarou a opção por trabalhar com os alunos a análise de representações gráficas como um esforço adicional, na medida em que teve de se preparar para trabalhar esta temática com os alunos. No entanto, salienta ter tido um *feedback* bastante positivo da parte dos alunos na realização de tarefas que envolviam a comparação de diferentes representações de um conjunto de dados.

Uma das tarefas que Estela trabalhou com a turma, com o objetivo de relacionarem diferentes representações, foi selecionada de um manual escolar, envolveu quatro histogramas e quatro diagramas de extremos e quartis (alguns incluídos na Figura 5). Pretendia que os alunos analisassem estas representações e identificassem as que correspondiam à mesma distribuição. Depois de dar aos alunos algum tempo para que pensassem na tarefa, a professora pediu a alguns deles que partilhassem as suas respostas.

> Aluno A: Acho que o histograma 1 é o Diagrama 4.
>
> Professora: Porquê? Explica.

Aluno A: O histograma 1 é o único simétrico e o diagrama 4 também.

Professora: Não é parvo o que estás a dizer! [acerca do histograma 1] Achas que a mediana está onde?

Aluno A: No…na barra do centro.

Professora: Exatamente. Mas eu também podia pensar que era o diagrama 1, não?

Aluno A: Não.

Professora: Explica, então.

Aluno A: Então se fosse o de cima [diagrama 1], para já não é simétrico, é mais virado para a esquerda, e as barras nos extremos teriam de ser maiores para o intervalo dos 25%.

Professora: Tem de se ver simetria nos dois gráficos, certo? Quem fala de outros?

Aluno B: Acho que o último histograma [histograma 4] corresponde ao primeiro [diagrama 1].

Professora: Porquê? (Obs2)

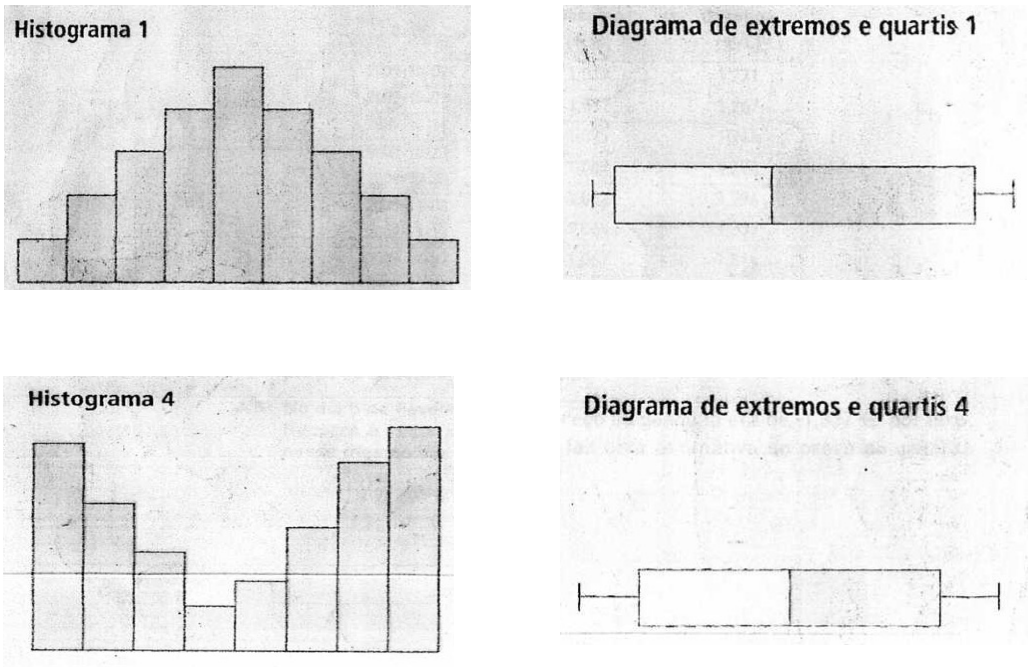


Figura 5: Excerto de algumas representações gráficas usadas na tarefa

Nesta interação, Estela foi pedindo aos alunos que justificassem as suas opções, levando-os a fazerem uma análise das representações que não tivesse apenas em conta a questão da simetria, questionando-os sobre a localização da mediana nas duas representações gráficas e a sua consistência. O aluno A indicou a localização da mediana no histograma 1 acertadamente e verificou que esta não correspondia à mediana assinalada no diagrama 1. Além disso, no seu raciocínio, teve também em consideração a *variação dos dados* em estudo, especificamente nos seus primeiros e últimos 25%, eliminando, assim, a hipótese do histograma 1 corresponder ao diagrama 1.

A professora parece ter sido alertada, pela ação de formação que frequentou, para a importância de incluir no *processo instrucional* tarefas que englobassem a análise e comparação de diferentes representações, levando-a a explorar na sala de aula esse tipo de situação. Essas tarefas, em particular, podem contribuir para o desenvolvimento do raciocínio estatístico dos alunos.

Conclusão

As duas tarefas que foram propostas pela professora Estela à turma do 10.º ano e que são apresentadas e discutidas neste texto tinham potencial para desenvolver nos alunos o seu raciocínio estatístico, dado que este engloba a capacidade de compreender e interpretar estatísticas sumárias de dados, estabelecer relações entre diferentes representações e conceitos, explicar como foram produzidos determinados resultados estatísticos e explicar processos estatísticos, entre outras (Ben-Zvi & Garfield, 2004). No entanto, tal potencial é ou não concretizado pela exploração que é feita das mesmas na sala de aula. A análise da prática da professora no que diz respeito à exploração destas tarefas leva em conta que esta se ancora, entre outros aspetos, no seu conhecimento didático, nos vários domínios referidos (Ponte, 1999; Batanero & Godino, 2005).

Um primeiro domínio considerado é o *conhecimento do currículo*. Para a professora Estela, o programa de Matemática A de 10.º ano foca-se sobretudo na Estatística descritiva, dando pouca importância à inferência estatística e à interpretação de dados. Estela considera que o facto de o tema Estatística não ser objeto de avaliação nos exames nacionais e de não ter continuidade ao longo do ensino secundário contribui para que não lhe seja atribuída a mesma importância que aos restantes temas. Estas perspetivas curriculares da professora influenciam a sua prática de ensino deste tema e, consequentemente, as possibilidades de aprendizagem dos seus alunos. A professora Estela evidenciava, pois, possuir um conhecimento do currículo que se restringia a certos aspetos específicos, tendo como grande objetivo que a aprendizagem da Estatística descritiva. A ação de formação frequentada parece ter contribuído para ampliar o seu conhecimento curricular visto ter-se disposto a levar à sala de aula algumas tarefas que não tinha experimentado anteriormente na sua prática letiva. A primeira tarefa apresentada na secção anterior permitiria que os alunos trabalhassem em duas das fases do processo de investigação estatística: análise de dados (reais) e interpretação e comunicação dos resultados. Já a segunda tarefa possibilitava que os alunos trabalhassem na comparação de representações, atividade esta ligada com a análise de dados do processo investigativo. De acordo com Burgess (2011), esta é uma boa forma de os alunos iniciarem a sua experiência na atividade estatística.

Uma certa falta de intencionalidade da professora no que se refere à primeira tarefa, que considerou "aberta", tê-la-á levado a não discutir com os alunos as suas resoluções, não havendo assim possibilidade de reforçar a dimensão de interpretação de resultados. Esta situação, embora salientando a importância de o professor possuir um bom domínio do *conhecimento do processo instrucional,* é também reflexo da visão da professora sobre o que considera serem os objetivos do programa relativamente ao tema da Estatística no ensino secundário e o que é valorizado pelas avaliações externas, como referimos.

A proposta desta situação mais aberta (tarefa 1), em que os próprios alunos têm a oportunidade de definir as questões a responder, terá possibilitado que a professora se apercebesse de algumas das suas dificuldades e erros, e que a surpreenderam. De facto, o *conhecimento dos alunos e dos seus processos de aprendizagem*, que foi adquirindo pela sua experiência no ensino secundário, dava-lhe a convicção de que estes teriam um bom desempenho neste tema. Os alunos, por sua vez, parecem fazer vários cálculos e

representações mas, aparentemente, de forma mecanizada e não com o intuito de chegar a uma melhor compreensão dos dados em análise.

No entanto, perante uma tarefa com potencial para desenvolver o raciocínio estatístico dos alunos (tarefa 2), o *conhecimento do processo instrucional* da professora evidencia-se, na medida em que não só propõe a situação como a discute com os alunos, pedindo explicações e justificações sobre as várias hipóteses de resposta. A exploração desta situação com os alunos implica também a capacidade da professora para analisar e relacionar diferentes representações (gráficas, numéricas) tendo em conta conceitos e ideias importantes em Estatística (em particular, variação e *transnumeração*), aspetos do *conhecimento dos conteúdos de ensino* no âmbito da Estatística.

Os resultados deste estudo parecem evidenciar que a participação da professora Estela na ação de formação poderá ter contribuído para ampliar o leque de tarefas que propõe aos seus alunos e o modo como as explora, passando também a considerar novos objetivos de aprendizagem, visando o desenvolvimento do raciocínio estatístico dos alunos. Como tal, a formação terá criado oportunidades de algum desenvolvimento do seu conhecimento didático no âmbito da Estatística. No entanto, as oportunidades de mudança de práticas estão muito ligadas ao que a professora considera serem os objetivos de aprendizagem prescritos pelo programa oficial, o que vem ao encontro do que Eichler (2011) identificou relativamente aos professores que ensinam Estatística: as suas intenções curriculares são relevantes para a prática de sala de aula.

Por último, pretendemos destacar que os vários domínios do conhecimento do professor se interrelacionam, o que tem de ser tido em conta na análise da sua prática e também na própria formação de professores. Com frequência a formação inicial é deficiente no que diz respeito ao conhecimento didático do professor que ensina Estatística, o que tem naturalmente implicações na sua prática (Ben-Zvi & Garfield, 2004). A formação contínua precisa, pois, de dar atenção às várias vertentes deste conhecimento tendo em conta os contextos curriculares em que se movimentam os professores.

Referências

Batanero, C., & Godino, J. (2005). Perspectivas de la educatión estadística como área de investigación. In R. Luengo (Ed.), *Líneas de investigácion en Didáctica de las Matemáticas* (pp. 203-226). Badajoz. Universidad de Extremadura.

Ben-Zvi, D., & Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning, and thinking: goals, definitions and challenges. In D. Ben-Zvi, & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 3-15). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Burgess, T. (2006). A framework for examining teacher knowledge as used in action while teaching Statisticcs. In A. Rossman, & B. Chance (Eds.), *Work cooperatively in Statistics Education: Proceedings of the seventh international conference on teaching Statistics.* Salvador, Brazil.

Burgess, T. (2011). Teacher knowledge of and for statistical investigations. In C. Batanero, G. Burril, & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in school-challenges for teaching and teacher education: A joint ICMI/IASE study* (pp. 259-270). New York: Springer.

Burrill, G., & Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. In C. Batanero, G. Burril, & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in school-challenges for teaching and teacher education: A joint ICMI/IASE study* (pp. 57-70). New York: Springer.

Cobb, G., & Moore (1997). Mathematics, Statistics, and teaching. *The American Mathematical Monthly*, *104* (9), 801-823.

DES (2001). *Programa de Matemática A*, 10º ano. Lisboa: ME, Departamento do Ensino Secundário. Disponível em http://www.dgidc.min-edu.pt/mat-no-sec/

Eichler, A. (2011). Statistics teachers and classroom practices. In C. Batanero, G. Burril, & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in school-challenges for teaching and teacher education: A joint ICMI/IASE study* (pp. 175-186). New York: Springer.

Garfield, J., & Ben-Zvi; D. (2007). How students learn Statistics revisited: A current review of research on teaching and learning statistics. *International Statistical Review*, *75*(3), 372-396.

Gattuso, L., & Ottaviani, M. (2011). Complementing mathematical thinking and statistical thinking in school mathematics. In C. Batanero, G. Burril, & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in school-challenges for teaching and teacher education: A joint ICMI/IASE study* (pp. 121-132). New York: Springer.

Godino, J., Batanero, C., Roa, R., & Wilhelmi, M. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work. In C. Batanero, G. Burrill, & A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the IMCI study 18 and 2008 IASE Round table conference*. Monterrey, Mexico.

Ponte, J. (1999). Didácticas específicas e construção do conhecimento profissional. In J. Tavares, A. Pereira, A. Pedro, & H. Sá (Eds.), *Investigar e formar em educação: Actas do congresso da SPCE* (pp. 59-72). Porto: SPCE.

Rossman, A., Chance, B., & Medina, E. (2006). Some important comparisons between Statistics and Mathematics, and why teachers should care. In G. Burrill (Ed.), *Thinking and reasoning with data and chance* (pp. 323-334). Reston, VA: NCTM.

Shaughnessy, J. (2006). Research on students' understanding of some big concepts. In G. Burrill (Ed.), *Thinking and reasoning with data and chance* (pp. 77-98). Reston, VA: NCTM.

Shaughnessy, J., Chance, B., & Kranendonk, H. (2009). *Focus in high school Mathematics. Reasoning and sense making in Statistics and Probability* (pp. 1-81). Reston, VA: NCTM

Snee, R. (1993). What's missing in Statistical Education? *The American Statistician*, *47* (2), 149-154.

Wild, C., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, *67*(3), 223-265.

O CONHECIMENTO PROFISSIONAL DE UMA PROFESSORA QUANDO ABORDA O HISTOGRAMA NUMA AULA DE 7º ANO

Ana Cristina da Costa Leiria
Escola Secundária Campos Melo
acleiria@hotmail.com

María Teresa González Astudillo
Universidade de Salamanca
maite@usal.es

Resumo: O presente estudo faz parte de uma investigação em curso que tem como objetivo catalogar o conhecimento profissional mobilizado por duas professoras quando ensinam o tema *Organização e Tratamento de Dados* no ano da implementação, a nível nacional, do novo Programa de Matemática do Ensino Básico. O programa aposta na valorização da literacia estatística e no processo de investigação estatística. Pretende-se estudar o que as professoras conhecem, o que fazem e as razões pelas quais o fazem enquanto ensinam um tópico muito específico do tema: as representações gráficas estatísticas.

A metodologia adotada foi de carater qualitativo e descritivo. Nesta comunicação serão apenas apresentados resultados obtidos de uma primeira análise do conhecimento profissional demonstrado por uma das professoras participantes numa das aulas observadas, sendo já possível concluir que a professora aproxima, em alguns aspetos, as intenções do novo currículo escrito e o currículo realmente adotado na sala de aula.

Palavras-chave: educação estatística, conhecimento profissional, histograma.

Introdução

No ano letivo 2010/2011 foi implementado, a nível nacional, o novo Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007). Este novo programa destaca o tema *Organização e Tratamento de Dados* agora incluído nos três ciclos e aposta na valorização da literacia estatística e do processo de investigação estatística. O programa constitui um documento de trabalho elaborado para ser efetivamente usado pelos professores na sua prática profissional (Ponte e Sousa, 2010). Nele se definem as finalidades e objetivos gerais, temas matemáticos e capacidades transversais e orientações metodológicas.

Na brochura *Organização e Tratamento de Dados* de Martins e Ponte (2010) pode ler-se:

> O objetivo do ensino da Estatística, a nível elementar, é, antes de mais, promover a literacia estatística, ensinando os alunos a ler e interpretar dados. […] O progressivo desenvolvimento da Estatística e a crescente necessidade de conhecimentos estatísticos para enfrentar situações do quotidiano conduziram a uma preocupação crescente com a literacia estatística, à semelhança do que aconteceu, inicialmente, com a literacia matemática, exigida por uma quantificação cada vez mais acentuada de muitos aspetos da sociedade. (p.7)

Gal (2003) considera que para se ser estatisticamente alfabetizado, deve-se ter " … a capacidade para interpretar, avaliar criticamente e expressar opinião própria sobre mensagens com base em dados e informações estatísticas." (p.16)

Segundo Batanero (2009), os professores ainda não se libertaram da ideia da estatística como um conjunto de técnicas e o treino de cálculos e de procedimentos continua a assumir um lugar demasiado destacado na aula. Refere ainda que os professores reconhecem a importância prática da estatística, estão dispostos a aprender mais e dedicar mais tempo ao seu ensino mas sentem-se pouco preparados para ajudar os alunos nas suas dificuldades no tema.

Ponte e Nunes (2010) consideram que o atual contexto educativo e as orientações curriculares para o ensino da Matemática apontam para mudanças importantes na atuação por parte do professor. Também em Fernandes (2009), a introdução de novas temáticas e o aprofundamento de outras e as orientações curriculares para o ensino da Matemática apontam para mudanças importantes na atuação por parte do professor e justificam a necessidade da realização de estudos que contribuam para um melhor conhecimento acerca da aprendizagem e do ensino dessas temáticas, salientando, por exemplo, o tema da variação, incluído pela primeira vez no programa escolar.

Neste estudo pretende-se analisar como duas professoras implementaram na sua prática letiva o novo Programa de Matemática do Ensino Básico e as orientações curriculares sobre o tema *organização e tratamento de dados*, mais especificamente, a representação gráfica em Estatística, em turmas de 7º ano de escolaridade no ano letivo de 2010/2011.

Pretende-se estudar e conhecer o que as professoras conhecem, o que fazem e as razões pelas quais o fazem enquanto ensinam um tópico muito específico do programa: as representações gráficas estatísticas.

Esta comunicação foca a atividade docente de uma das professoras participantes quando aborda o histograma na sua turma de 7º ano de escolaridade. Procura-se compreender o conhecimento profissional da professora, concebido de forma integral e complexa, onde atuam e se relacionam uma variedade de fatores, experiências, pensamentos, conhecimentos, conceções e crenças. Segundo Ponte e Oliveira (2002), o conhecimento profissional do professor de Matemática que intervém diretamente na prática letiva inclui quatro vertentes: o conhecimento da Matemática, que engloba o conhecimento e a visão que o professor tem dos tópicos a ensinar; o conhecimento do currículo; o conhecimento do aluno e dos seus processos de aprendizagem e o conhecimento do processo instrucional, que inclui o que diz respeito à preparação da aula, à sua condução efetiva e à reflexão feita depois.

Pretende-se então estudar o conhecimento estatístico mobilizado pela professora, o seu conhecimento dos alunos e dos seus processos de aprendizagens e compreender como interpreta o novo Programa de Matemática do Ensino Básico no que respeita ao tópico das representações gráficas estatísticas, mais especificamente ao histograma, e como articula a sua prática letiva com essa interpretação.

Enquadramento teórico sobre o conhecimento profissional

Um dos tópicos da revisão de literatura visou o modelo teórico com que se pretende enquadrar o trabalho de investigação, o modelo de Shulman. Este modelo tem sido bastante aplicado na investigação em educação matemática mas pouco explorado na educação estatística (Pinto, 2010) e serviu de base a Rowland, Huckstep e Thwaites (2011) na descrição do *Quarteto de Conhecimento* (*Knowledge Quartet*) que se traduz num quadro teórico para observação, análise e desenvolvimento do ensino da Matemática.

Shulman (1986) propõe que o foco da investigação sobre o ensino seja o estudo do pensamento do professor sobre o ensino do conteúdo do tópico. Para isso, deve atender-se a

que toda a atividade educativa tem como suporte uma série de crenças e de teorias implícitas que fazem parte do pensamento do professor e que orientam as suas ideias sobre o conhecimento, a construção do seu ensino e aprendizagem. Shulman (1986) divide o conhecimento profissional em três categorias: o Conhecimento do Conteúdo a lecionar (que designa por *subject matter content knowledge*), o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (que designa por *pedagogical content knowledge*) e o Conhecimento do Currículo (que designa por *curriculum knowledge*).

Shulman (1986) define o Conhecimento do Conteúdo a lecionar como "o conteúdo e organização do conhecimento per se na mente do professor" (p.9); o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo consiste no "modo de representar e formular o tema de modo a torná-lo compreensível para os outros" e na categoria Conhecimento do Currículo engloba a compreensão das orientações curriculares (neste caso, com especial relevo para as orientações relativas ao ensino da Matemática).

O *Quarteto de Conhecimento* é um quadro teórico para observação de aulas com foco na contribuição do conhecimento do conteúdo matemático do professor. Neste modelo, categorizam-se situações nas aulas de matemática com particular atenção ao tópico matemático a ser ensinado e o conhecimento matemático relacionado que o professor traz para a aula em vez das características mais gerais da aula (Rowland, 2005). O objetivo é o que o professor sabe e em que acredita e como identificar oportunidades para melhorar o ensino.

Os investigadores Rowland, Huckstep e Thwaites (2011) identificaram aspetos da ação do professor significativos no sentido de informar sobre o seu conhecimento do conteúdo ou conhecimento pedagógico do conteúdo e gerar um conjunto de 20 categorias que foram agrupadas, por serem da mesma natureza ou de natureza similar, em 4 dimensões: *fundamentação, transformação, conexão* e *contingência*.

Na *fundamentação* incluem-se os conhecimentos e a compreensão da matemática per se e o saber necessário para ensinar a matemática, bem como crenças sobre a natureza da matemática, as finalidades da educação matemática e as condições sob as quais os alunos irão aprender melhor a matemática. A aplicação do conhecimento de um tópico na sala de aula recai *sempre* sobre o conhecimento da *fundamentação*, que vai influenciar de forma determinante as escolhas pedagógicas e estratégias.

As outras três dimensões referem-se aos modos e contextos nos quais o conhecimento é exercido na preparação e condução do ensino. Nestas dimensões, categorizam-se as situações em que se evidencia o conhecimento em ação demonstrado na planificação e no próprio ato de ensino.

A *transformação* evidencia que a base do conhecimento para ensinar se distingue pela habilidade do professor em transformar o conhecimento do conteúdo que possui em formas que são pedagogicamente fortes. Inclui a apresentação de ideias aos alunos na forma de analogias, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações.

A *conexão* inclui a coerência na planificação e no ensino evidenciada ao longo do episódio, da aula ou de uma série de aulas. Inclui também a sequência do material para o ensino, dos tópicos de ensino dentro da aula e entre as aulas, incluindo a ordem das tarefas e exercícios e uma consciencialização das exigências cognitivas de diferentes temas e tarefas.

A *contingência* inclui a capacidade de resposta do professor em situações na sala de aula que não foram previstas nem antecipadas. É a habilidade de "think on one´s foot", ou seja, a capacidade de convencer, de fundamentar e de dar respostas esclarecedoras em situações não previstas e não planeadas.

No *Quarteto de Conhecimento* muitos episódios ou momentos podem ser entendidos em termos de duas ou mais das quatro dimensões. Por exemplo, uma resposta a uma sugestão de

um aluno (*contingência*) pode relacionar ideias anteriores (*conexão*). Além disso, pode-se argumentar que a aplicação do tema na sala de aula baseia-se sempre "no que o professor sabe" (*fundamentação*).

A tabela a seguir (Rowland, Huckstep e Thwaites, 2011) mostra a distribuição das categorias por cada uma das quatro dimensões.

Dimensão	Categorias
Fundamentação	Consciência dos objetivos, recorre ao manual, concentração nos procedimentos, identificação de erros, exibição explícita do assunto, bases teóricas da pedagogia, uso de terminologia matemática
Transformação	Escolha de exemplos, escolha de representação, uso de material de ensino, demonstração do professor (para ensinar um procedimento)
Conexão	Antecipação da complexidade, decisões sobre a sequencialidade, conexões sobre procedimentos, conexões sobre conceitos, reconhecimento de adequação conceptual
Contingência	Desvio do plano de trabalho, responder a ideias do aluno, uso de oportunidades, perceção do professor durante a aula

Tabela 1. Categorias do *Quarteto do Conhecimen*to de Rowland, Huckstep e Thwaites, 2011

Metodologia

Dada a natureza do problema de investigação, foi adotada uma aproximação metodológica de tipo qualitativo, através de um estudo de caso. Segundo Fernandes (1991), o foco da investigação qualitativa é a compreensão mais profunda dos problemas, é investigar o que está "por trás" de certos comportamentos, atitudes ou convicções. Neste paradigma, o investigador é o "instrumento" de recolha de dados por excelência e, por isso, a qualidade (validade e fiabilidade) dos dados depende muito da sua sensibilidade, da sua integridade e do seu conhecimento.

Ponte (1994) carateriza o estudo de caso do seguinte modo:

> Um estudo de caso pode ser caracterizado como um estudo de uma entidade bem definida como um programa, uma instituição, um sistema educativo, uma pessoa, ou uma unidade social e visa conhecer em profundidade o seu "como" e os seus "porquês", evidenciando a sua unidade e identidade próprias. É uma investigação que se assume como particularista, isto é, debruça-se deliberadamente sobre uma situação específica que se supõe ser única em muitos aspetos, procurando descobrir a que há nela de mais essencial e característico. (p. 3)

Seleção da professora para o estudo de caso

A Maria é uma professora que pertence ao quadro da escola onde leciona e conta com vinte anos de experiência. É licenciada em Ensino de Matemática e recorda que teve Estatística como disciplina anual do curso. Desde que terminou o curso, já frequentou ações de formação sobre tópicos de Estatística. Já lecionou o tema quer a turmas do ensino básico quer a turmas do ensino secundário. No ano letivo 2010/2011, lecionou uma turma de 7º ano de escolaridade constituída por vinte alunos com idades entre os 12 e os 13 anos, bastante heterogénea no seu desempenho na Matemática.

A professora foi informada dos objetivos e esclarecida sobre as caraterísticas do estudo, tendo havido o cuidado de realçar que não é objetivo do estudo avaliar o seu ensino mas estudar como ensina a representação gráfica estatística atendendo ao novo Programa de Matemática do Ensino Básico. Foi solicitado a autorização da professora para filmar e gravar em áudio as aulas em que o tema *organização e tratamento de dados* fosse trabalhado, para gravar em áudio as entrevistas realizadas e para a publicação dos dados recolhidos no estudo ainda que de forma a que a professora participante não seja identificada de nenhum modo. Nesta comunicação far-se-á referência apenas à aula do dia 27 de maio em que a professora aborda, pela primeira vez naquela turma, o histograma.

Técnicas de recolha de dados

Os dados usados no estudo resultaram:

- de uma entrevista prévia às observações de aulas à professora, que se centrou na interpretação feita pela professora do novo *Programa de Matemática do Ensino Básico* no tópico *organização e tratamento de dados*, mais especificamente, na representação de dados, e em como pensou preparar e implementar o tema nas aulas. Foi também abordada a reflexão feita sobre a sua prática letiva, a planificação do tema incluindo estratégias e material didático, as suas crenças e conceções sobre a Estatística, o seu ensino e aprendizagem, o conhecimento do tema e a sua identidade profissional;
- da proposta de planificação a médio prazo das aulas, disponibilizada pela professora antes de começar a lecionar o tema;
- do trabalho de campo com a observação e gravação, em áudio e vídeo, das aulas dedicadas ao tema *organização e tratamento de dados* e registo de notas consideradas pertinentes, neste caso, da aula do dia 27 de maio;
- da entrevista posterior à aula realizada à professora sobre o desenvolvimento do tópico;
- dos materiais usados nas aulas.

Sempre que possível, depois das aulas gravadas, a investigadora discutiu com a professora participante, episódios e assuntos tendo por referência as dimensões e categorias definidas no quadro *Quarteto de Conhecimento*. Nestas entrevistas foi feita uma reflexão conjunta entre a investigadora e a professora sobre os conhecimentos matemáticos envolvidos e a prática desenvolvida na gestão de aula e foram clarificadas interpretações da investigadora relativamente a intenções da professora na aula. A entrevista posterior à aula do dia 27 de maio só pôde ser feita já no início do ano letivo 2011-2012. Devido ao distanciamento no tempo, houve necessidade de visualizar no filme os momentos da aula em questão na entrevista.

Análise de dados

A análise centra-se na prática letiva da professora e apenas faz referência aos alunos quando em interação com as professoras e não aborda a compreensão dos alunos sobre os tópicos lecionados.

O procedimento de análise dos dados passou pela transcrição integral de todas as aulas gravadas e de todas as entrevistas realizadas e pela operação de categorização cujo objetivo foi a criação de um quadro de Categorias e Evidências e a consequente aplicação às transcrições. O sistema de categorização foi desenvolvido com base no modelo do *Quarteto de*

Conhecimento, ajustado ao problema em estudo e aplicado às unidades de análise constituídas pela transcrição de cada aula e de cada entrevista.

A análise de conteúdo assenta na convicção de que a categorização, enquanto passagem de dados brutos a dados organizados, não provoca desvios no material mas antes evidencia aspetos invisíveis.

Análise e discussão de resultados: a aula da professora Maria

Na aula de 27 de maio, a professora Maria pretendia que os alunos aprendessem a identificar e a construir um histograma. A tarefa selecionada para a aula constava no manual adotado (Conceição & Almeida, 2010, p. 136):

Tarefa 2

Na turma do Telmo, a professora de *Estudo Acompanhado* perguntou aos alunos quantos minutos, aproximadamente, tinham estudado no dia anterior e obteve as seguintes respostas:

20	12	15	25	50
33	53	34	55	65
30	58	40	30	35
60	40	60	38	35
60	45	10	50	55
60	18	15	24	15

1. Quantos alunos tem a turma?

2. Constrói uma tabela de frequências, agrupando os dados em classes com a mesma amplitude, sendo a primeira constituída pelos valores observados que são iguais ou maiores que 10 e menores que 20.

3. Quantos alunos estudaram, pelo menos, uma hora?

4. Que percentagem de alunos estudaram menos de 30 minutos?

5. Constrói um gráfico de barras adjacentes cuja base é o intervalo da classe e a altura é o respetivo valor da frequência absoluta.

6. Escreve um *pequeno texto* sobre os hábitos de trabalho demonstrados pelos alunos desta turma."

Com esta tarefa a professora visava distinguir dados de natureza quantitativa, discreta ou contínua; organizar em classes dados de natureza quantitativa contínua; construir, analisar e interpretar tabelas de frequências; construir, analisar e interpretar histogramas e desenvolver a capacidade de comunicação matemática. A questão 1 tinha sido resolvida na aula anterior e a professora propôs que os alunos tentassem trabalhar a questão 2 em casa. Foi construindo a tabela de frequências absolutas e relativas no quadro com indicações dadas pelos alunos. Os alunos resolveram as questões 3 e 4, num trabalho a pares e as respostas de cada grupo foram discutidas na turma. Depois de apagar o que tinha escrito no quadro, incluindo a tabela, leu o enunciado da questão 5. A professora foi estimulando os alunos a darem respostas às questões que ia colocando à medida que ia construindo o histograma no quadro.

A questão 6 da tarefa não resulta de uma simples leitura do gráfico uma vez que implica que os alunos interpretem o gráfico e discutam relações a partir dos dados.

Curcio (1989) estabeleceu três níveis na compreensão de gráficos estatísticos: *ler os dados*, *ler entre os dados*, que implica comparar e relacionar e *ler para lá dos dados*, realizar previsões e inferências. Uma compreensão gráfica básica tal como a simples *leitura dos dados*, a *leitura entre os dados* e a *leitura para lá dos dados* é fundamental para o desenvolvimento da literacia estatística (Shaugnessy, 2007).

Esta aula serviu para testar o *Quarteto de Conhecimento* como uma ferramenta útil e eficaz para identificar, para discussão, questões que surgem a partir da observação de aula. Apresenta-se agora uma primeira interpretação de alguns momentos observados nesta aula em termos das dimensões *fundamentação*, *transformação*, *conexão* e *contingência*.

Transformação

A *escolha de exemplos* é uma das categorias incluídas nesta dimensão. É a partir da escolha de um exemplo, neste caso, de um exemplo planeado e indutivo que a professora pensou ensinar os seus alunos a identificarem e a construírem o histograma. Um exemplo planeado pode ser considerado como um produto final do pensamento e de uma reflexão do professor e, num exemplo indutivo, é através de uma execução (particular) de um procedimento que ensina um procedimento (em geral) (Figueiredo, 2010).

Maria – A seguir pede um gráfico, até diz um gráfico de barras adjacentes. O que é esta história dos adjacentes? Já apareceram ângulos adjacentes, lados adjacentes… Juntas.

Aluno 1– Sem espaço entre si.

Maria – O que é que nós temos? Tempo de estudo. [Desenha no quadro um referencial ortogonal e escreve o título do gráfico] O nome do nosso gráfico é tempo de estudo. Agora vou colocar o quê, no eixo horizontal?

Aluna 2 – As classes.

Maria – Então vou colocar aqui tempo (em minutos) [escreve tempo (min) no eixo horizontal]. É indiferente trabalhar com a frequência absoluta ou relativa. Depois mostro-vos uns gráficos onde se vê que é indiferente. Agora, neste caso, trabalhamos com a frequência absoluta ou relativa?

Alunos – Absoluta.

Maria – A frequência absoluta traduz o número de alunos. Então número de alunos [escreve, no eixo vertical, número de alunos]. Número de alunos é a nossa frequência absoluta. O máximo dos valores era…

Aluno 3 – 65.

Maria – Não, já apaguei a tabela mas não era 7? Então já respondemos. No quadriculado podem fazer uma quadrícula, uma unidade. Eu aqui não tenho quadrícula mas faço mais ou menos 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.

Aluno 4 – Até ao 7?

Maria – Não é o máximo dos valores das frequências absolutas? A nossa primeira classe era dos 10 aos 20, então ponho aqui 10, 20, 30, …[refere a escala no eixo horizontal]. Se neste espaço deixam duas quadrículas aqui deixam duas quadrículas.

Na construção do histograma, a professora chama a atenção a elementos que fazem parte do gráfico, como o título do gráfico e a legenda dos eixos. Fernandes (2009) apresenta uma lista de dificuldades e erros dos alunos construída a partir das investigações sobre educação estatística e aí inclui, relativamente à construção de gráficos de barras por alunos do 7º ano de escolaridade, a dificuldade em decidir em qual dos eixos colocar a variável, a construção da escala e legendar o gráfico.

As intervenções dos alunos denotam alguma confusão nos valores a adotar na construção do gráfico, neste caso, para o eixo vertical. Apesar da professora ter legendado cada um dos eixos, os alunos parecem manifestar dificuldades na passagem da informação da tabela para a representação gráfica solicitada (*fundamentação*).

Contingência

A análise desta dimensão do *Quarteto de Conhecimento* entrelaça também com as categorias da *fundamentação* uma vez que se relacionam com as crenças do professor sobre a estatística, o ensino da estatística e do que pensa ser seu papel como professor.

Neste episódio, uma aluna colocou uma situação ainda não apresentada que a professora incorporou na aula através de um exemplo modificado. A questão da aluna surgiu a partir de um exemplo proposto pela professora que o modificou de forma espontânea e imediata para, depois de modificado, responder adequadamente e esclarecer a aluna.

> Aluna1 – Imaginemos que não havia nenhum resultado entre 30 e 40, colocamos o 30 e 40 na mesma?
>
> Maria – A pergunta da Maria faz sentido. Vamos imaginar que neste conjunto de 30 meninos ninguém tinha respondido entre 30 e 40 minutos. [Apaga a barra] A coluna está cá e tem frequência igual a zero. Quando olhas para aqui o que interpretas? De 30 a 40 minutos ninguém respondeu.

Espinel, González, Bruno e Pinto (2009) referem que os erros no procedimento de construção de histogramas se podem classificar em três tipos: construir o histograma com barras separadas, legendar de forma incorreta e omitir os intervalos de frequência nula. Depois de reconhecer a pertinência estatística da questão colocada pela aluna, a professora incorporou a questão na aula, desviando-se assim da planificação feita para a aula (Desvio do plano de trabalho).

Na proposta de planificação do tema disponibilizada pela professora à investigadora antes de começar a lecionar *organização e tratamento de dados,* não consta nenhum exemplo com a situação exposta pela aluna.

A espontaneidade e segurança com que a professora esclarece a aluna e modifica o exemplo apresentado para se ajustar à situação colocada e responder adequadamente, revela um evidente conhecimento tanto do conhecimento da representação gráfica como do conhecimento pedagógico desse tópico.

Conexão

Também esta dimensão se baseia no que "a professora sabe", que a leva a escolher uma determinada forma de apresentar o tópico de modo a ser mais facilmente compreendido pelos alunos. A professora considerou a sequência de ensino, apresentada na tarefa selecionada, adequada ao desenvolvimento das competências necessárias para construir e interpretar corretamente o histograma e para saber quando o deve eleger como representação gráfica adequada (decisões sobre a sequencialidade). O aluno vai construindo um gráfico que, depois

de evidenciadas as suas diferenças com o gráfico de barras e de realçada a sua utilidade, vem a saber chamar-se histograma.

> Maria – Tudo o que for a mais já não é necessário. Então, a classe correspondente dos 10 aos 20 tinha 6 meninos. Uma barra. O que estou a interpretar aqui? Seis meninos estudaram que tempo? Não sei exatamente o tempo mas sei que estudaram entre 10 e 20 minutos. Bernardo, não se diz 10 e 19, é 10 e 20. Não é 20, é quase 20 mas pode ser 19,5 minutos. O que vem a seguir? Na classe a seguir? 3 [na classe seguinte inclui 3 alunos]. As barras são juntinhas e neste caso têm a mesma largura porque estamos a usar as classes de 10 em 10 minutos. Já vamos ver que há uma situação ou outra que as barras não têm a mesma largura. A seguir, 7. As barras são todas iguais. [acaba de construir o histograma] No vosso papel quadriculado é muito fácil de fazer. A Carolina disse que gosta mais das barras separadas mas já percebeste qual é aqui a questão. Toda a gente tem 1 irmão, dois irmãos, …
>
> Aluna1 – …ou 0 irmãos.
>
> Maria – …ou 0 irmãos. O que fazes na tabela? Número de irmãos 0, 1 2 e 3 com frequências 5, 4, … no gráfico de barras o que colocas? Há uma coluna que diz respeito aos 0 irmãos, a seguir, igualmente espaçadas, 1 irmão e igualmente espaçadas 2 irmãos. O que vês aqui? Zero irmãos corresponde a tantas pessoas, 1 irmão corresponde a… Naquele caso, nós não sabemos se estudou 18 minutos, se estudou 19 minutos. Nós só sabemos que há 6 meninos que estudaram entre 10 e 20 e há outros 3 que estudaram entre 20 e 30. O 20 é aqui uma divisão mas há minutos imediatamente antes e imediatamente depois. Se fazes aqui uma quebra não faz sentido. Porque são intervalos contínuos, todos juntos dá um intervalo de 10 a 60.

Na entrevista posterior à aula, que decorreu apenas no início do ano letivo 2011- 2012, a investigadora esclareceu junto da professora porque é que não abordou algumas questões relativas ao histograma, como, por exemplo, a possibilidade do histograma ser construído com barras de larguras diferentes, como sugerido na brochura *Organização e Tratamento de Dados* de Martins e Ponte (2010).

> Maria – Eu falei nas classes diferentes, até porque houve uma aluna que perguntou, conforme o trabalho que estivéssemos a desenvolver. Mas nas amplitudes diferentes no mesmo histograma, não…
>
> Entrevistadora – E achas relevante para estes alunos?
>
> Maria – Acho que não. Eles já levaram uma boa dose de organização e tratamento de dados e acho, sinceramente, que não.
>
> Entrevistadora – E é o primeiro ano que estão a trabalhar este tipo de gráficos e irão trabalhar este ano.
>
> Maria – Sim e este ano pode-se aprofundar.

A professora revela que, na sua atividade docente, reflete sobre o que deve ser aprendido pelos seus alunos, identificando aspetos do tópico que influenciam a sua complexidade e que podem não ser evidenciados, pelo menos, naquele momento (Antecipação da complexidade).

Fundamentação

A construção de um gráfico mobiliza conceitos distintos como o da contagem, tabelas, escalas, origem, eixos, variáveis, coordenadas, discreto, contínuo, frequência, distribuição, áreas, razão, proporção e outros. Segundo Espinel, González, Bruno e Pinto (2009), o histograma é a principal ferramenta gráfica para mostrar a forma da distribuição de dados mas envolve

muitos conhecimentos prévios e apresenta dificuldades conceptuais. Na reflexão sobre as dificuldades encontradas pelos alunos quando confrontados com uma representação gráfica, realçam-se as relacionadas com a proporcionalidade e o raciocínio proporcional e questiona-se o peso dessas dificuldades não só na construção mas também na compreensão e interpretação dos gráficos.

> Maria – Então quantos alunos estudaram menos de 30 minutos? [os alunos respondem] 9. É esta a resposta que me pedem? [os alunos dizem que não] Ana Rita, o que é que me pedem?
>
> Ana Rita – A percentagem.
>
> Maria – E então, o que é que faço agora?
>
> [Ana Rita responde mas não se percebe]
>
> Maria – Não precisas de dizer a conta precisamente. Só o que fazias. Vem ao quadro fazer.
>
> [A Ana Rita escreveu $\frac{9}{30} = 0{,}3 \times 100 = 30\%$ no quadro e corrigiu com a ajuda dos colegas]
>
> Maria – Vê lá se a apresentação está correta. Fizeste esse erro no teste e continuas a fazê-lo. [a aluna corrige-o] Ok!

A professora evidencia estar alerta para determinados tópicos relacionados com o tema como por exemplo, as percentagens (Identificar os erros e dificuldades).

Algumas considerações finais

A planificação apresentada pela professora antes de começar a lecionar o tema mostra que conhece os conteúdos que integram o programa e as orientações curriculares e metodológicas relativas ao tópico representações gráficas estatísticas. Mostra também que a professora consultou os materiais de ensino disponibilizados pelo Ministério de Educação.

Um dos problemas realçados na investigação é a grande lacuna entre as ideias originais, as intenções do novo currículo e o currículo realmente adotado na sala de aula (Vershut & Bakker, 2011).

No entanto, os objetivos a atingir com a resolução da tarefa selecionada pela professora tornam claro que a professora procura corresponder às finalidades e aos objetivos gerais de aprendizagem da representação gráfica estatística, articulando com as capacidades transversais – resolução de problemas, raciocínio e comunicação.

No que respeita ao conhecimento do tópico, apesar do à-vontade da professora em orientar os alunos na construção e interpretação do histograma e em esclarecer os alunos nas questões colocadas, há aspetos importantes na Estatística que podiam ter sido já realçados na aula observada, nomeadamente que, ao contrário do gráfico de barras em que interessa a altura de cada barra, no histograma o importante é a área de cada retângulo ou barra. Também a questão da transnumeração (Wild & Pfannkuch, 1999) que é o processo de mudar de representação para gerar compreensão, mostrando aspetos ou relações que estavam oculto anteriormente, poderia ter sido evidenciado.

Nesta primeira aplicação do sistema de categorias definido, o modelo *Quarteto do Conhecimento* revelou-se útil e eficaz na análise da prática letiva de uma professora experiente

quando leciona o tema *organização e tratamento de dados* a alunos do Ensino Básico porque os momentos considerados relevantes quanto ao conhecimento profissional da professora a catalogar foram, nesta primeira tentativa, acomodados em pelo menos uma das categorias definidas.

Referências

Batanero, C. (2009). Retos para la formación Estadística de los Professores. In J.A. Fernandes, M. H. Marinho, F. Viseu & P. F. Correia (orgs.), *Actas do II Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 7 – 21). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Conceição, A., & Almeida, M. (2010) Matematicamente falando. *Matemática - 7º Ano*. (p. 136). Porto: Areal Editores.

Curcio, F. (1989). *Developing graph comprehension*. Reston, VA: NCTM.

Espinel, M., González, M., Bruno, A., & Pinto, J. (2009). Las gráficas estadísticas. In L. Serrano (Ed.), *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica* (pp. 57 –74). Málaga: Gráficas San Pancracio.

Fernandes, D. (1991). Notas sobre os paradigmas de investigação em educação. *Noesis*, 18, 64 – 66.

Fernandes, J. A. (2009). Ensino e Avaliação das aprendizagens em Estatística, In J. A. Fernandes, M. H. Marinho, F. Viseu & P. F. Correia (Orgs.), *Atas do XIX Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 52 – 71). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Figueiredo, C. (2010). *O Conhecimento do Professor entendido à luz da sua Exemplificação*. Tesis Doctoral, Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas. Universidad de Extremadura, Badajoz.

Gal, I. (2003). Teaching for statistical literacy and services of statistics agencies. *The American Statistician*, *57*(2), 80 – 84.

Martins, M., & Ponte, J. (2010). *Organização e Tratamento de Dados*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

(http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/matematicaOTD_Final.pdf)

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

(http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/home.htm)

Pinto, J. (2010) *Conocimiento didáctico del contenido sobre la representación de datos estadísticos: estudios de casos con profesores de estadística en carreras de Psicología y Educación*. Salamanca: Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales, Universidad de Salamanca.

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso em educação Matemática. *Quadrante, 3*(1), 3 –18.

Ponte, J. & Nunes, C. (2010). Conhecimento e práticas profissionais de professores de matemática. In H. Gomes, L. Menezes & I. Cabrita (Orgs.), *Atas do XXI Seminário de*

Investigação em Educação Matemática (pp. 27 – 33). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. & Sousa, H. (2010). Uma oportunidade de mudança na Matemática no Ensino Básico. In GTI (Ed.), *O Professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico* (pp. 11-41). Lisboa: APM

Ponte, J. & Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista da educação, 11*(2), pp. 145 – 163.

Rowland, T. (2005). The Knowledge Quartet: a tool for developing mathematics teaching. In *Proceedings of the Forth Mediterranean Conference on Mathematics Education* (pp. 69 – 81), Palermo, 28-30, January.

Rowland, T., Huckstep, P. e Thwaites, A. (2011) Secondary mathematics teachers' content knowledge: the case of Heidi. In *Proceedings of CERME7* (pp. 2817 –2837). Rzeszów, Poland.

Shaughnessy, J. M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. In F. Lester (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 957-1049). Greenwich: NCTM.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Research*, *15* (2), 4-14.

Verschut, A. & Bakker, A. (2011) Implementing a more coherent statistics curriculum. In Proceedings of *CERME7*, Rzeszów, Poland.

Wild, C. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, *67*(3), 223 – 265.

A INTEGRAÇÃO DO TANGRAM NA AULA DE GEOMETRIA – UMA PRIMEIRA ABORDAGEM AO CONCEITO DE ÁREA NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES DOS PRIMEIROS ANOS[1]

Nelson Mestrinho
Instituto Politécnico de Santarém – Escola Superior de Educação
nelson.mestrinho@ese.ipsantarem.pt

Hélia Oliveira
Instituto de Educação – Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ul.pt

Resumo: Neste estudo analisamos a forma como a utilização do *tangram* favorece o aprofundamento da compreensão do conceito de área em futuros professores dos primeiros anos de escolaridade. Num contexto de investigação sobre a prática, realizada no âmbito de uma experiência de formação, consideramos o trabalho desenvolvido por um grupo de quatro estudantes do 2.º ano de Licenciatura em Educação Básica no decurso de uma tarefa proposta a partir do tangram. Tendo por base dados recolhidos através de registos áudio e vídeo constatamos que o uso deste recurso promove tanto o desenvolvimento de ideias fundamentais à compreensão da medida da área, como permite explorar diferentes abordagens ao conceito de área.

Palavras-chave: medida; área; prática de ensino; tangram; formação inicial de professores

Introdução

O professor é o elemento-chave para a qualidade da educação matemática que é proporcionada às crianças sendo que lhe cabe a tarefa de organizar o ambiente de sala de modo a promover as aprendizagens matemáticas dos seus alunos (Serrazina, 2002). Vários estudos mostram que tais aprendizagens são influenciadas por aquilo que os professores fazem na sala de aula (Mewborn, 2003), podendo-se facilmente concluir que a formação matemática dos professores é crucial. Esta asserção é particularmente óbvia quando falamos de professores dos primeiros anos de escolaridade, seja pela importância destes primeiros anos na definição do percurso escolar dos alunos, seja pela fraca formação matemática que muitos dos futuros professores destes níveis de ensino trazem consigo ao ingressarem nos cursos de formação inicial. Muitos destes, marcados por um passado de insucesso em Matemática, carregam a sua própria experiência para as salas de aulas onde irão ensinar (Grevholm, 2007).

A formação de um professor deverá estar orientada com aquilo que dele se espera enquanto profissional. Formar professores para o ensino da Matemática é um processo complexo que envolve vários aspetos relacionados entre si. Ponte e Chapman (2008) destacam alguns destes como sejam os tipos e a natureza do conhecimento, as competências, atitudes e valores que o futuro professor deve desenvolver ou as opções curriculares dos programas de formação inicial, incluindo as abordagens pedagógicas aos temas. Ao nível do ensino da Matemática nos

[1] Trabalho realizado no âmbito do *Projeto P3M – Práticas Profissionais de Professores de Matemática*, apoiado pela FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia (contrato PTDC/CPE/098931/2008).

primeiros anos, vários estudos realizados em Portugal e noutros países dão conta da prevalência de práticas de ensino dominadas por uma visão «instrumental», baseada na mecanização de processos algorítmicos (Thompson, 1992; Palhares, Gomes & Mamede, 2002), tendência essa que, apesar de todos os esforços, continuamos a testemunhar. Entendendo-se atualmente que o ensino da Matemática deve centrar-se na criação de oportunidades de construção ativa do conhecimento, por parte dos alunos, e na criação de estruturas conceptuais que suportem uma compreensão para além da reprodução de procedimentos, é necessário que a educação matemática dos futuros professores lhes proporcione um tipo de conhecimento matemático alinhado com essa perspetiva. Para que se possa refletir de forma fundamentada acerca dos processos de formação matemática dos futuros professores e sobre as implicações dessa formação no desenvolvimento do conhecimento matemático que necessitam para ensinar, precisamos aprofundar a nossa compreensão acerca do que aprendem e como aprendem (Adler, Ball, Krainer, Lin & Novotna, 2005).

Contexto e objetivos

O estudo que apresentamos decorre num contexto de formação inicial de professores dos primeiros anos de escolaridade, numa turma composta por 23 estudantes do 2.º ano da Licenciatura em Educação Básica a frequentar a unidade curricular de *Geometria, Grandezas e Medida*. O modelo predominante de aula nesta unidade assenta na realização de tarefas de natureza exploratória/investigativa e na resolução de problemas geométricos, recorrendo muitas vezes a materiais manipuláveis ou recursos tecnológicos. No caso em análise o trabalho decorre em torno do conceito de polígono e pretende-se, por um lado, introduzir o *tangram* como recurso de sala de aula e, por outro, fazer uma primeira incursão no conceito de área. Este estudo centra-se na utilização do *tangram* pelos futuros professores e o seu papel no aprofundamento da compreensão deste conceito.

As questões que orientam o estudo são:

- De que forma é que o uso do *tangram* favorece o aprofundamento da compreensão do conceito de área nos futuros professores dos primeiros anos de escolaridade?
- Que ideias fundamentais a essa compreensão são articuladas a partir dessa manipulação?

Compreender o conceito de área

Para estabelecer a noção de grandeza num conjunto de objetos é necessário construir uma relação de equivalência, definir uma relação de ordem e criar uma operação de composição. Em qualquer um destes aspetos a grandeza área é muito mais complexa do que outras, nomeadamente o comprimento (Freudenthal, 1999). Medir a área de um domínio plano é um processo que se inicia com a compreensão da área enquanto propriedade que é passível de ser quantificada. Envolve a escolha de uma grandeza da mesma natureza, uma *unidade*, que possa servir como «termo de comparação» com a área a medir. A comparação entre unidade e a figura a medir permitirá associar um número à quantidade de grandeza. Este processo, geral para qualquer tipo de grandeza (comprimento, amplitude angular, volume, massa, etc.) soa a algo estranho para a maioria dos nossos estudantes para quem a determinação de uma área significa multiplicar dois comprimentos ou utilizar uma qualquer fórmula da qual não entendem o significado.

A construção da compreensão da medida da grandeza área envolve a coordenação de uma rede de conceitos e ideias relacionadas entre si. Vários investigadores identificaram um conjunto de conceitos fundamentais nos quais assenta essa compreensão (Lehrer, 2003; Sarama & Clements, 2009):

1. *A compreensão do atributo*: Passa por entender a área como atributo específico e intrínseco do objeto em causa e envolve dar um significado quantitativo a uma porção limitada de superfície.
2. *Conservação ou invariância:* A conservação significa compreender que determinada grandeza associada a um objeto não se altera se sobre ele se aplicarem determinadas ações. No caso da área o princípio da conservação implica que uma porção limitada de superfície pode ser decomposta e recomposta com uma forma diferente sem que a área se altere. Este conceito está muito relacionado com o de aditividade.
3. *Transitividade*: Tem a ver com a capacidade de obter, por dedução, uma relação de igualdade ou desigualdade a partir de outras duas (ou eventualmente mais). Por exemplo, compreender de que se a quantidade de área de uma figura A é igual (inferior/superior) à quantidade de área da figura B e, por sua vez, a quantidade de área da figura B é igual (inferior/superior) à quantidade de área da figura C então A tem uma quantidade de área igual (inferior/superior) à da figura C.
4. *Decomposição em partes iguais*: Trata-se da operação mental que consiste em subdividir ou decompor um objeto num número de partes de igual tamanho (normalmente congruentes). Esta atividade é mais complexa do que se pode imaginar à primeira vista, uma vez que obriga a que se encare a área como algo que pode ser «partido» em partes mais pequenas, mesmo antes de se proceder ao ato de medir. Este processo introduz o conceito de estruturação em filas organizadas.
5. *Unidades e iteração da unidade*: Requer conceber a unidade como parte da área a medir, pelo que a sua iteração envolve pavimentar a porção de superfície cuja área se pretende avaliar. No contexto destas noções, é fundamental entender e operacionalizar a necessidade de subdividir a unidade e o impacto desta ação na medida obtida, para além de que esse preenchimento do objeto se relaciona com a sua decomposição em partes iguais.
6. *Aditividade*: Estabelece que a área de um domínio plano é igual à soma das áreas dos elementos de uma sua partição arbitrária.
7. *Relação entre número e medida*: Medir está intimamente relacionado com a contagem tratando-se, porém, de algo conceptualmente mais sofisticado que requer que se articule a contagem (o discreto) com a natureza das unidades que estão a ser contadas/iteradas (o contínuo).
8. *Estruturação espacial*: Trata-se da operação mental que consiste em construir uma organização ou configuração para um objeto ou conjunto de objetos no espaço. Envolve a noção de que a região a medir precisa ser completamente preenchida sem lacunas ou sobreposições. Implica estruturar esse preenchimento em filas de modo a que iterar uma unidade possa ser visto como iteração de filas (linhas ou colunas) de unidades. É este processo que permite abstrair fórmulas para o cálculo de áreas, coordenando comprimentos e unidades de comprimento de modo a obter unidades de área e áreas.

Freudenthal (1999) aponta várias aproximações ao conceito de área, das quais se realçam as seguintes:

i. *Repartição equitativa*, que inclui situações em que é necessário «partir» uma figura em partes equivalentes;

ii. *Comparação e reprodução*, que inclui situações em que é necessário comparar (por inclusão, por operações de decomposição e recomposição de figuras, por medida) duas porções de superfície e também aquelas em que é necessário reproduzir uma mesma quantidade de área mas com uma forma diferente.

iii. *Medição*, que inclui situações que envolvam o preenchimento de uma porção de superfície recorrendo a figuras congruentes (interpretadas como unidades que são iteradas), operações de decomposição e recomposição (com o objetivo de quantificar uma área ou deduzir formulas para o seu cálculo) ou a utilização de relações geométricas gerais (utilizando comprimentos e fórmulas para calcular áreas ou ainda o uso de transformações geométricas como as de semelhança ou o princípio de *Cavalieri*, por exemplo).

A utilização das várias aproximações oferece uma perspetiva da complexidade do conceito de área, proporcionando condições para o desenvolvimento da compreensão dos conceitos envolvidos no processo de medição e da construção de ferramentas conceptuais daí decorrente – como é o caso das fórmulas (Lehrer, Jaslow & Curtis, 2003).

O conhecimento matemático do professor

Ninguém hoje questiona a noção de que os professores que ensinam Matemática necessitam de um profundo conhecimento matemático para poderem desempenhar a sua função. No entanto, foi-se tornando claro que o conhecimento matemático convencional, por muito avançado que seja, é insuficiente para proporcionar aos professores o suporte para um ensino orientado para a compreensão. Nas últimas décadas muitos investigadores têm procurado caracterizar aquele que deverá ser um conhecimento matemático multidimensional e específico do professor (Shulman, 1986; Ma, 1999; Ball & Bass, 2003; Ball, Thames & Phelps, 2008).

Apesar das várias conceptualizações, algumas características comuns desse conhecimento são identificadas. Uma é a de que um tal conhecimento deverá ir além das representações simbólicas e abstratas que sintetizam conceitos e procedimentos, que deve incluí representações alternativas (mais ou menos formais) dos conceitos matemáticos e uma diversidade de aproximações a essas noções, tendo em conta o desenvolvimento ou construção dos mesmos por parte dos alunos. Esta forma «descompactada» de saber Matemática é específica do trabalho de ensinar e não é, em geral, necessária fora deste contexto. Assim, aprender Matemática para ensinar deve incluir oportunidades para «descompactar» conceitos matemáticos e procedimentos que são familiares mas que são utilizados sem se pensar muito acerca do que encerram em si. Um tal conhecimento deverá dar ao professor a capacidade de antecipar – erros, más conceções, produções, interesses e dificuldades dos alunos. Um conhecimento matemático desta natureza deverá ser conexo, quer entre domínios da Matemática, quer ao longo do tempo, à medida que as ideias matemáticas se desenvolvem e se estendem, tendo em consideração a forma como serão abordadas ao longo dos vários níveis de escolaridade.

As tarefas e os recursos

Ensinar Matemática numa perspetiva exploratória (Ponte, 2005) implica dar aos estudantes a oportunidade de se envolverem ativamente num trabalho de descoberta e de construção do seu próprio conhecimento. Para que tal possa acontecer é necessário que lhes sejam propostas tarefas que permitam observar o surgimento de conceitos matemáticos em contextos propícios à compreensão e à (re)construção de significados. Por esse motivo, a preparação de tarefas matemáticas é um aspeto extremamente importante na formação inicial de professores. Peled (2007) propõe uma classificação das tarefas em função de objetivos formativos bem definidos e que podem ser psicológicos, curriculares, epistemológicos ou pedagógicos. A tarefa a partir da qual se baseia este estudo insere-se em objetivos psicológicos, na medida em que se espera que os futuros professores ultrapassem dificuldades análogas àquelas encontradas pelas crianças na abordagem ao conceito de área e sua medida. Por outro lado, o seu enquadramento num conjunto mais vasto de tarefas coloca-a no âmbito de objetivos epistemológicos, uma vez que se promove a construção de conexões entre tópicos através da identificação de estruturas semelhantes de modo a facilitar a síntese e a generalização (Peled, 2007).

Aprendizagens significativas pressupõem tarefas orientadas para a compreensão das ideias matemáticas. Neste contexto os recursos educativos jogam um papel muito importante uma vez que podem fornecer suporte para diferentes representações dessas noções ou inclusivamente para lhes dar significado. O conceito de «recurso» pode ser bastante amplo e incluir coisas tão óbvias como o professor, mesas e cadeiras ou ainda a linguagem, mas quando falamos de recursos tendemos a referir-nos a recursos materiais. Adler (2000) distingue várias categorias de recursos materiais: tecnológicos, escolares específicos, objetos matemáticos e objetos do dia-a-dia.

O que define a ligação entre o trabalho matemático na sala de aula e os recursos é a forma como estes últimos são utilizados, ou seja, a sua *transparência* (Gravemeijer, 2005). Este conceito foi desenvolvido por Lave e Wenger e associa a transparência de um artefacto à compreensão do modo de funcionamento do mesmo e às formas como o seu uso se torna parte do processo de aprendizagem. Para que um recurso seja transparente (permitindo assim o acesso a uma determinada prática) é necessário um equilíbrio entre as suas funções complementares de visibilidade e invisibilidade. A função de visibilidade é estabelecida no momento em que o recurso entra na sala de aula e se torna o centro das atenções. A partir do momento em que os estudantes se familiarizam com o recurso e o começam a encarar como um meio para aprender conceitos matemáticos (deixando de ser ele mesmo o centro da atenção) o recurso passa a assumir a sua função invisível. A transparência não é, portanto, uma característica inerente ao próprio recurso mas antes uma função do seu uso na prática, em contexto de sala de aula. Deste modo, a forma como os estudantes utilizam os recursos para aprender Matemática não depende dos conceitos que consideramos que o recurso encerra em si mesmo mas antes é função das interações com os significados que lhes atribuem, da tarefa proposta pelo professor, da regulação da atividade dos estudantes e da cultura de sala de aula (Adler, 2000).

Metodologia do estudo

O estudo apresentado insere-se num trabalho mais abrangente que visa compreender a forma como os futuros professores dos primeiros anos de escolaridade aprofundam a sua compreensão dos conceitos relacionados com a medida em Geometria, em resultado de uma

experiência de formação (Cobb, 2000; Simon 2000); que decorre no contexto descrito anteriormente. O estudo assume uma abordagem teórica interpretativa, no sentido em que é apresentada por Erickson (1986). Trata-se de uma investigação sobre a prática (Borko, Liston & Whitcomb, 2007), onde o investigador, que é simultaneamente o docente da unidade curricular referida, procura compreender aspetos da sua prática no seu contexto local.

Os participantes neste estudo são quatro estudantes da turma do 2.º ano do curso de Licenciatura em Educação Básica da Escola Superior de Educação de Santarém, escolhidas por apresentarem percursos escolares distintos, no que ao estudo da Matemática diz respeito, e por pretenderem no futuro ingressar numa carreira de professoras no 1.º ou 2.º ciclos do ensino básico. O facto de constituírem um grupo natural de trabalho também foi um fator de decisão importante. Os dados usados neste estudo foram recolhidos a partir da gravação áudio e vídeo de um momento de aula, em que os estudantes da turma se encontram a realizar a tarefa proposta. O trabalho desenvolvido pelo grupo foi visionado e parcialmente transcrito, procurando-se identificar na atividade das estudantes as ideias fundamentais e as aproximações ao conceito de área, enumerados em 1 a 8 e *i* a *iii* da secção «Compreender o conceito de área».

A integração do *tangram* como recurso de sala de aula

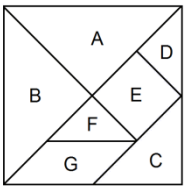
O tangram é um conhecido *puzzle* composto por sete peças com formas de polígonos que guardam entre si relações matemáticas importantes. A primeira tarefa proposta é a sua construção, pelos estudantes, a partir de um pedaço de cartolina com forma de quadrado. Os estudantes estão organizados em pequenos grupos de 3 ou 4 elementos, sendo distribuídos pelos indivíduos quadrados (congruentes mas diferentes na cor) em cartolina. Através de indicações verbais envolvendo noções geométricas elementares tais como *ponto médio* de um segmento, *diagonal* e *lados consecutivos* de um polígono, cada aluno traça no seu quadrado de cartolina as linhas por onde irá recortar de modo a obter as sete peças. O *tangram* foi posteriormente usado em atividades de desenvolvimento de capacidades de visualização espacial, no estudo das propriedades dos polígonos e dos conceitos de perímetro e área.

A tarefa que é proposta aos estudantes após a construção, e aquela em cuja realização deste estudo se baseia, é a identificação, entre as sete peças do *tangram*, dos polígonos que são congruentes, dos que são semelhantes e dos que são equivalentes. Não se antecipam dificuldades com a noção de congruência uma vez que foi já estudada em aulas precedentes na unidade curricular. Também o conceito de semelhança foi já abordado em situações anteriores e nesta fase, apesar de ainda não ter sido completamente sintetizado, é já conhecido dos estudantes. Um dos aspetos tidos em conta na discussão da tarefa é a importância de sublinhar a relação entre estes dois conceitos, na medida em que a congruência é um caso particular de semelhança. Já a noção de equivalência surge aqui pela primeira vez na unidade curricular. Pretende-se introduzir a noção de área enquanto grandeza, isto é, área enquanto propriedade intrínseca de uma figura bidimensional, correspondente à porção de superfície que se encontra delimitada pela sua fronteira. Não sendo dado aos estudantes uma explicitação do conceito nem do que se entende por figuras equivalentes, pretende-se que olhem para os vários polígonos e que vejam para além da sua forma e dos seus elementos (lados e ângulos), focando-se na porção de superfície que ocupam. Assim, discutindo em pequenos grupos, espera-se que vão chegando à conclusão da relação óbvia entre a congruência e equivalência (duas figuras congruentes são equivalentes) mas também, progressivamente, à possibilidade da existência de figuras que tendo formas diferentes ocupam a mesma quantidade de espaço bidimensional. Para tal, espera-se que os estudantes usem comparação direta (sobrepondo as várias peças duas a duas e concretizando a

comparação recorrendo a um processo mental de decomposição e recomposição das figuras) ou a comparação indireta (tomando alguma das peças como unidades de conveniência). Antecipa-se assim que a manipulação deste material seja importante na construção da partição do conjunto das sete peças em classes de equivalência – subconjuntos de figuras com área igual – passíveis de serem ordenadas segundo as diferentes quantidades da grandeza.

Análise e discussão da atividade desenvolvida

Após cada estudante construir o seu próprio *tangram* foi proposto que identificassem quais as figuras congruentes, quais as figuras semelhantes e quais as que eram equivalentes. Tal como se esperava, a questão da congruência foi resolvida de forma muito rápida e sem dificuldades. Apesar de terem à sua disposição uma figura com a representação do *tangram* (com as várias peças designadas por letras de A a G, conforme mostra a figura ao lado) as estudantes preferiram usar as peças que construíram, sobrepondo os dois pares de triângulos congruentes como meio de validação das suas respostas. A procura do estabelecimento de uma relação entre o quadrado e o paralelogramo leva a um diálogo no seio do grupo.



Amélia: Então o G e o E? Devem relacionar-se em alguma coisa.

A Carla sobrepõe as duas figuras e a Mariana afirma que "se inclinarmos os lados [do paralelogramo] fica igual ao quadrado, por isso eles são…" – e não soube como completar. Esta afirmação tem tanto de interessante, no que à equivalência entre figuras diz respeito, como de inesperada. De facto, aquilo que a Mariana parece identificar, apesar de não o verbalizar da melhor forma, é uma transformação que preserva a área e que é referida por Freudenthal (1999) como «*shearing*», termo que vem da mecânica e designa a deformação causada pela aplicação de forças paralelas em sentidos opostos. É evidente que a afirmação da Mariana não está correta, uma vez que alterar a orientação dos lados (tornando retos os ângulos internos) do paralelogramo não daria origem a um quadrado, antes a um retângulo com uma área maior. No entanto, é claro que a Mariana identifica, nas duas figuras, bases e alturas iguais, o que pelo princípio de *Cavalieri* resultaria em áreas iguais. Temos aqui uma aproximação ao conceito de área por via da medição com recurso a relações geométricas entre as figuras. A Mariana percebeu que existia uma relação forte entre estas figuras, não conseguindo naquele momento decidir a designação a dar a tal relação. No caso da Amélia, que é quem origina o diálogo que conduz à observação da Mariana, não é claro se pensou da mesma forma ou se apenas se limitou a considerar o quadrado e o paralelogramo por serem os únicos quadriláteros do *tangram*.

Em consequência das muitas dúvidas em torno dos significados das palavras «semelhantes» e «equivalentes», o professor leva a discussão em torno destes conceitos para toda a turma. Só quando o professor desloca o conceito para outro contexto de medida não geométrica (dinheiro) é que as estudantes estabelecem a noção de equivalência como tendo a ver com o «ocupar o mesmo espaço». Para a Celeste foi claro desde o primeiro minuto que duas figuras seriam equivalentes se tivessem a mesma área e é ela que a certa altura assume a condução da discussão do grupo:

Celeste: Se os juntares assim [sobrepondo quadrado e paralelogramo] tens metade de um e metade de outro [apontando para as partes das peças que não ficam sobrepostas].

Amélia: Pois é, o que sobra é metade de cada um.

Neste diálogo fica evidente a presença de alguns dos conceitos em que assenta a compreensão da grandeza – a conservação, a decomposição em partes iguais e a transitividade, com base nos quais se estabelece a equivalência entre o quadrado e o paralelogramo. Aqui a abordagem ao conceito de área é feito por comparação, usando transformações de decomposição e recomposição. A comparação partindo da sobreposição das duas figuras assume-se a partir deste momento como a forma privilegiada de argumentação e de justificação. Nesta altura está também já estabelecida a equivalência entre as peças congruentes (triângulos grandes e triângulos pequenos), só ainda não se estabeleceu a equivalência do triângulo médio com o paralelogramo e o quadrado. A este é até atribuída (pela Celeste) uma classe de equivalência da qual é o único elemento. No entanto, da manipulação dos dois triângulos pequenos surgem novas perspetivas. A Carla forma um quadrado a partir dos dois triângulos pequenos. Ao sobrepor o quadrado e o paralelogramo a Mariana observa:

> Mariana: Se dividirmos este [paralelogramo] em dois triângulos temos um quadrado, então estes são equivalentes.
>
> Amélia: Pois é, dois triângulos formam um quadrado [e sobrepõe os dois triângulos com o quadrado].

Este comentário revela o desenvolvimento de uma aproximação à noção não apenas por via da decomposição em partes iguais mas também emerge aqui a utilização da noção de unidade e da sua iteração.

Ao serem interpeladas pelo professor acerca do triângulo médio, afirmam que não é equivalente a nenhuma das outras. No entanto, há muito pouca certeza deste ponto de vista e tentam estabelecer a equivalência do triângulo médio com o quadrado e com o paralelogramo. A Carla e a Celeste sobrepõem o triângulo médio e o paralelogramo e raciocinam de forma semelhante àquela que fizeram anteriormente, comparando apenas as partes dos polígonos que não se sobrepõem. A Amélia e a Mariana procuram construir o triângulo médio utilizando os dois triângulos pequenos.

> Mariana: O G e o C são equivalentes… para C são precisos dois triângulos… para G é a mesma coisa, são precisos dois triângulos [pequenos] para fazer o paralelogramo.
>
> Carla: Também podíamos fazer assim [mostra as duas figuras sobrepostas], cortando esta parte [a parte não sobreposta do paralelogramo] e colocando-a aqui [a parte não sobreposta do triângulo médio].

Nesta fase, a Celeste já assumiu que o triângulo médio é equivalente ao paralelogramo e ao quadrado mesmo não o tendo comparado diretamente com este último (apenas o faz a pedido do docente). Apesar de não o explicitar, percebe-se que se apoia na transitividade, uma vez que apenas comparou o paralelogramo com o quadrado (numa primeira fase) e o paralelogramo com o triângulo médio, concluindo que as três figuras são equivalentes. A Carla chega à mesma conclusão mas demonstra uma maior necessidade de confirmar sobrepondo as peças duas a duas das três formas possíveis para definir a classe de equivalência. É na sua perceção que se apoia, não na transitividade da relação de equivalência, e por isso a manipulação para ela é muito importante. Para a Mariana e para a Amélia as coisas não estão assim tão claras. Uma vez que preenchem a superfície do quadrado com os dois triângulos pequenos, consideram (corretamente) que o quadrado é equivalente à composição dos dois triângulos pequenos concluindo (erradamente) que o quadrado e o triângulo pequeno são equivalentes.

> Mariana: O C e o E são equivalentes. O D e o E também.
>
> Amélia: Ou seja, são todos!

Mariana: Pois, são todos.

Gera-se uma discussão.

Carla: Como assim?

Celeste: Não!

Carla: O F só ocupa uma parte, tu não consegues preencher o quadrado com o F.

Mariana: Então espera aí! O F é igual ao D, não é? Mas os dois dá para preencher o quadrado.

Celeste: Mas tu tens de comparar só duas figuras, não podes comparar três.

Professor: Sim, mas vocês podem usar as outras figuras para vos ajudar a pensar. Não se esqueçam do que significa duas figuras serem equivalentes…

Mariana: É ocupar o mesmo espaço…

Agora a Mariana e a Amélia usam os triângulos pequenos como unidade para medir a área das três figuras equivalentes, preenchendo à vez o quadrado, o triângulo médio e o paralelogramo com os triângulos pequenos estabelecendo a partir daqui a equivalência das três figuras. Este diálogo ilustra a diferença conceptual entre uma abordagem ao conceito de área por comparação e reprodução e a abordagem por medição, onde intervém uma terceira figura, a unidade, que é iterada. Aqui, torna-se necessário que os estudantes compreendam que a unidade desempenha um papel específico no processo de medição e que é do número de unidades iteradas que surge a medida que permitirá, neste caso, estabelecer a equivalência entre as três figuras.

Neste episódio podemos testemunhar a utilização do recurso para explorar várias aproximações ao conceito de área. A sobreposição (comparação direta) de figuras equivalentes não congruentes conduziu à decomposição em partes iguais uma vez que as partes sobrepostas são congruentes às partes não sobrepostas das figuras. Por esse motivo, as estudantes referiram-se a estas partes como “metades”. A utilização dos triângulos pequenos permitiu reproduzir outras figuras, precisamente aquelas que se pretendiam comparar, ocorrendo transformações de decomposição e recomposição de figuras. A utilização dos triângulos pequenos no preenchimento das formas a comparar permitiu que a noção de área surgisse ligada a um processo de medida, assumindo estes triângulos o papel de unidade. A manipulação deste recurso possibilitou passar de uma abordagem para outra, estabelecendo relações entre perspetivas, contribuindo para que se desenvolva uma compreensão do conceito de área e introduzindo a noção de medida da área.

Conclusões

Da realização deste estudo conclui-se que o uso do *tangram* favoreceu a aproximação ao conceito de área, seja pela comparação e reprodução (recorrendo a operações de decomposição e recomposição de figuras), seja pela medição (pelo preenchimento da porção de superfície com unidades). Permitiu o estabelecimento da noção da grandeza área, através da decomposição do conjunto das várias peças em classes de equivalência, a definição de uma relação de ordem entre elas (por inclusão) e a materialização de uma operação de composição. A determinação da equivalência das três peças não semelhantes do *tangram* levou à definição de critérios e de operações mentais que fundamentassem argumentos e demonstrações intuitivas levando as estudantes à construção de um verdadeiro processo de

medição, envolvendo comparação, conservação, aditividade, a criação de uma unidade de medida conveniente para a situação e a sua iteração (Freudenthal, 1999; Lehrer, Jaslow & Curtis, 2003).

No decurso da tarefa, a manipulação deste recurso forneceu oportunidades para desenvolver e articular vários conceitos fundamentais para a compreensão da medida da área, em particular, a compreensão do atributo, a decomposição em partes iguais, o conceito de unidade e sua iteração. Outros conceitos, nomeadamente a conservação e a aditividade foram assumidos pelas estudantes de forma imediata e sem dificuldades, o que poderá levar a crer que essas noções encontram-se já, dado o nível de escolaridade, relativamente assimiladas. A relação entre o número e a medida não aparece nesta tarefa de forma muito elaborada (limitando-se à medida das três peças equivalentes igual a dois triângulos pequenos), nem tampouco a estruturação espacial (Sarama & Clements, 2009). No entanto, a tarefa apresentada neste trabalho é apenas a primeira de uma sequência de propostas com o objetivo de trabalhar o conceito de área e sua medida, utilizando este e outros recursos.

Outros aspetos dignos de referência têm a ver com, por um lado, a forma como o *tangram* foi integrado na própria tarefa e, por outro, as limitações encontradas no uso deste recurso. Sendo o *tangram* conhecido dos estudantes enquanto *puzzle*, consideramos que a sua construção pelos estudantes foi uma forma de ativar a função de invisibilidade do recurso. Em vez de partir para a atividade de exploração usando conjuntos já feitos e fornecidos aos estudantes, a construção pelos próprios do recurso permitiu uma focalização nas relações matemáticas presentes nas peças e, consequentemente, possibilitou redirecionar a atenção dos estudantes do jogo para os conceitos matemáticos que se pretendiam estudar (Adler, 2000). Relativamente ao uso deste recurso, a par dos benefícios identificados, detetámos também alguns condicionalismos. Em primeiro lugar, o *tangram* revelou-se insuficiente para abordar o conceito de área por via de algumas transformações que a conservam, como é o caso do «*shearing*» descrito atrás, identificado pela Mariana, e cuja exploração se mostrou menos natural (dadas as características do próprio material) do que a decomposição e recomposição de figuras (Freudenthal, 1999). Em segundo lugar, notou-se na atividade desenvolvida pela Celeste que a noção de transitividade e o seu uso para fazer deduções tendia a diminuir a necessidade de manuseamento deste recurso. Esta estudante foi a única que não necessitou de comparar diretamente as três figuras equivalentes entre si, duas a duas, de todas as formas possíveis, e a partir de certa altura apenas utilizou o *puzzle* com objetivo de validar perante o grupo as suas opiniões. Este facto leva-nos a questionar se o seu uso pelas restantes colegas não as possa ter, de algum modo, inibido de utilizar mais o raciocínio transitivo. No entanto, a utilização deste recurso revelou-se extremamente pertinente e apropriada, seja pela necessidade de as futuras professoras reconstruírem um conceito fundamental na Matemática que terão um dia de ensinar, seja pelo conhecimento do próprio recurso ou pelo modo de trabalhar na sala de aula.

Referências

Adler, J., Ball, D., Krainer, K. Lin, F. & Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: Researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, *60*, 359-381.

Adler, J. (2000). Conceptualizing resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *3*, 205-224.

Ball, D., Thames, M, & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching – What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.

Ball, D., & Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. In B. Davis & E. Simmt (Eds.), *Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14). Edmonton, AB: CMESG/GCEDM.

Borko, H., Liston, D. & Whitcomb, J. (2007). Genres of empirical research in teacher education. *Journal of Teacher Education*, *58*(1), 3-11.

Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. In R. Lesh & A. Kelly (Eds.) *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 307-333). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. Wittrock (Ed.) *Handbook of Research on Teaching*, 3rd Edition, (pp. 119-161). New York: Macmillan Publishing Co./American Educational Research Association

Freudenthal, H. (1999). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. New York: Kluwer Academic Publishers.

Gravemeijer, K. P. E. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L. Santos, A. P. Canavarro, & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83-101). Lisboa: APM.

Grevholm, B. (2007). Why is mathematics teacher education problematic? In A. Andzans, D. Bonka & G. Lace, (Eds.), *VII International conference teaching mathematics: Retrospective and perspectives* (pp. 79-88). Riga: Latvijas Universitate.

Lehrer, R. (2003). Developing understanding of measurement. In J. Kilpatrick, W. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 179-192). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Lehrer, R., Jaslow, L., & Curtis, C. (2003). Developing understanding of measurement in the elementary grades. In D. Clements & G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement.* (pp. 100-121). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Mewborne, D. (2003). Teaching, teachers' knowledge and their professional development. In J. Kilpatrick, W. Martin & D. Schifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 45-52). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Palhares, P., Gomes, A. & Mamede, E. (2002). A formação para o ensino da Matemática no pré-escolar e no 1.º ciclo – Análise teórica e estudo de caso. In M. L. Serrazina (org.), *A Formação Para o Ensino da Matemática na Educação Pré-Escolar e no 1.º Ciclo do Ensino Básico*. Porto: Porto Editora – ME-INAFOP

Peled (2007). The role of analogical thinking in designing tasks for mathematics teacher education: An example of a pedagogical ad hoc task. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*, 369-379.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 225-263). Mahwah; NJ: Lawrence Erlbaum.

Sarama, J. & Clements, D. (2009). *Early childhood mathematics education research, learning trajectories for young children*. New York: Routledge.

Serrazina, M. L. (2002). A formação para o ensino da Matemática – Perspectivas futuras. In M. L. Serrazina (org.), *A formação para o ensino da Matemática na Educação Pré-Escolar e no 1.º Ciclo do Ensino Básico*. Porto: Porto Editora – ME-INAFOP.

Simon, M. (2000). Research on the development of mathematics teachers: The teacher development experiment. In R. Lesh & A. Kelly (Eds.) *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 335-359). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning*. New York, NY: Macmillan.

EVOLUCIÓN DE TAREAS DE ENSEÑANZA DE ÁLGEBRA A PARTIR DE LA REFLEXIÓN SOBRE LA PRÁCTICA DE DOCENTES PARTICPANTES EN UN CURSO DE FORMACIÓN

Elisabeth Ramos
Universidad de Granada
elisabethramos@correo.ugr.es

Pablo Flores
Universidad de Granada
pflores@ugr.es

Resumen: La selección y diseño de tareas de enseñanza es una de las labores profesionales más cotidianas e importantes del profesor, ya que involucra decisiones sobre las oportunidades de aprendizaje para sus estudiantes. Es habitual promover el diseño e implementación de tareas de enseñanza como recurso para estimular el desarrollo profesional en la formación de profesores. En un curso de formación continua realizado en Chile en el año 2009, los docentes participantes diseñaron, discutieron y llevaron al aula tareas de enseñanza relacionadas con una problemática surgida desde su práctica. Realizamos un estudio en el que analizamos el proceso de reflexión llevado a cabo por dos profesoras de este curso, quienes se plantearon una problemática sobre la simplificación de expresiones algebraicas. Se muestran los resultados obtenidos en aquel trabajo, en relación a la evolución de las tareas de enseñanza como manifestación de la reflexión sobre la práctica de las profesoras analizadas. A raíz de las conclusiones obtenidas se proyecta este estudio hacia una nueva investigación que preste mayor atención a las tareas de enseñanza diseñadas por el docente de matemáticas en un curso de formación basado en la reflexión sobre la práctica.

Palabras-Claves: Reflexión, curso de formación, álgebra, tareas de enseñanza.

Introducción

En los documentos educativos actuales se reclama que los profesores sean profesionales reflexivos. Un factor primordial en el desarrollo profesional de los profesores es la medida en que reflexionan sobre el aprendizaje y la enseñanza, sea individualmente o con colegas, influyendo en la visión que tienen de las matemáticas escolares (NCTM, 2000). La reflexión ha pasado a ser parte de los objetivos claves de muchos cursos de formación (Korthagen, Kessels, Koster *et al*., 2001; Mewborn, 1999; Stein & Smith, 1998; Stein, Smith, Henningsen & Silver, 2000). En investigación, también hay interés por la temática a partir de la noción de práctico reflexivo presentada por Schön (1983), abordada por diversos autores dentro de la educación matemática (e.g., Jaworski, 1993; Clarke, 2008).

Una dimensión que promueve y manifiesta la reflexión del profesor de matemáticas sobre su práctica es la selección e implementación de *tareas de enseñanza*. Existen cursos de formación, como el descrito por Stein y colaboradores (Stein *et al*., 2000), que promueven la reflexión de profesores de matemáticas cuando seleccionan y llevan al aula tareas de enseñanza exigentes cognitivamente.

En Chile, en el año 2009, organizamos un curso de formación al que asistieron docentes de tres niveles educativos (primaria, secundaria y superior), dirigidos por una formadora-investigadora, para analizar, por los participantes, situaciones problema encontrados en la enseñanza de las matemáticas, diseñando e implementando clases para afrontarlas. Durante el curso focalizamos nuestra atención sobre diversos aspectos de la enseñanza de las matemáticas. En este articulo nos centramos en las tareas de enseñanza que proponen dos profesoras en su proceso de reflexión llevado a cabo durante el curso.

Objetivos y problema de investigación

Ubicándonos en la formación de profesores, nuestro interés es centrarnos en las tareas de enseñanza propuestas por el profesor de matemáticas para afrontar una problemática que surge desde su práctica. Para ello, abordando el desarrollo profesional de profesores participantes en un curso de formación, nos centramos en uno de sus aspectos con el fin de generar mayor profundidad respecto a diversos elementos que lo rodean, como la práctica del docente, su conocimiento matemático, etc. De aquí que queremos *caracterizar las tareas que proponen profesores para afrontar un problema de enseñanza y cómo evoluciona la formulación de estas tareas a lo largo de un curso de formación*.

De acuerdo a un curso de formación impartido en Chile, los objetivos planteados son:

1. Examinar las características de las tareas propuestas por profesores participantes del curso.
2. Analizar la evolución de las tareas propuestas por profesores del curso de formación.

Para definir lo anteriormente expuesto, fue necesario explicitar los fundamentos teóricos que sostiene la propuesta, aspectos que desarrollamos a continuación.

Fundamentación teórica y antecedentes

Una línea importante de investigación en formación de profesores de matemáticas estudia el desarrollo profesional, dentro de la que se encuentran los estudios sobre la reflexión del profesor sobre su práctica (Cooney, 2001; Flores, 2007; Korthagen *et al*., 2001). Para ello, se han elaborado modelos que organizan la reflexión de manera sistemática. En el terreno de la educación matemática, Korthagen (Korthagen & Verkuyl, 1987; Korthagen *et al*., 2001) propone el modelo ALACT[1] que es un proceso cíclico en el que se distinguen cinco etapas o fases. Comienza (fase de acción o experiencia) determinando una situación que da origen a la reflexión, en forma de problemática. La fase 2 (mirar hacia atrás), requiere distanciarse para esbozar una "imagen" de lo que ocurrió. Determinar puntos importantes corresponde a la tercera fase, en la que los participantes toman conciencia de aspectos que dieron lugar a las respuestas de la fase anterior, pudiendo contar con la participación de agentes externos (en forma de texto, pares o formadores expertos). En la fase 4, los participantes buscan estrategias o soluciones a la problemática, para aplicarlas en un nuevo evento escolar, aprovechando la experiencia de la etapa anterior. Ya, en la etapa final, se estudian situaciones nuevas partiendo de la reflexión y las apreciaciones obtenidas en el ciclo anterior. Korthagen representa este proceso cíclico como aparece en la figura 1.

[1] Korthagen utiliza la sigla ALACT, en inglés: *A*ction, *L*ooking back on the action, *A*wareness of essential aspects, *C*reating alternative methods of action y *T*rial.

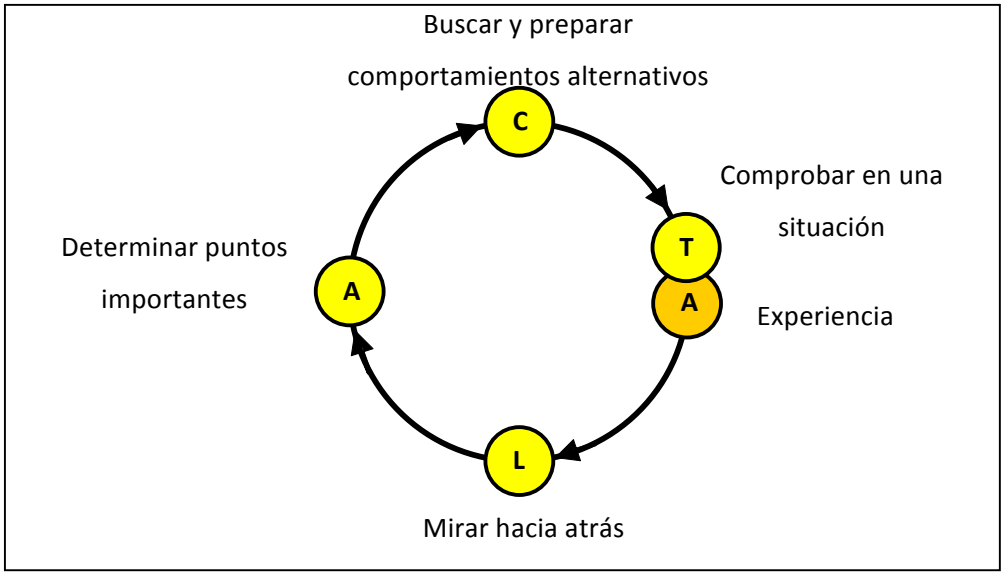


Figura 1. Modelo ALACT (Korthagen *et al*., 2001)

Las investigaciones que estudian la reflexión, utilizan elementos diversos para analizar su evolución durante el ciclo. Entre los elementos más habituales se han empleado las creencias de los profesores, el papel que conceden a la autoridad, etc. (Cooney, 2001). También se emplean las tareas de enseñanza que diseñan y experimentan, la forma en que definen las situaciones problema y los aportes externos que les son significativos a los participantes. En el trabajo que llevamos a cabo (Ramos, 2011), elegimos estos tres elementos como indicadores de reflexión, aunque en este artículo analizamos las tareas de enseñanza como indicadoras de reflexión, considerando que son frecuentes los cursos de formación que centran su atención en las tareas de enseñanza para ayudar a los profesores a mejorar su práctica (Arbaugh & Brown, 2005; Hughes, Smith, Boston & Hogel, 2008).

Respecto a tareas de enseñanza, Ponte (2005), enfatiza la importancia de distinguir entre tarea y actividad, examina la diversidad de tareas que el profesor de matemáticas puede ofrecer a sus estudiantes, prestando especial atención a problemas, ejercicios, investigaciones, actividades de exploración y proyectos. Esta diversidad está organizada en un esquema que atiende a dos variables, el grado de apertura de su solución y su complejidad.

Stein y sus colegas (Stein y Smith, 1998; Stein *et al*., 2000) sostienen que la reflexión sobre la enseñanza a través del lente del marco de las tareas matemáticas proporciona a los profesores la oportunidad de examinar críticamente la actividad del aula, en términos de la exigencias cognitivas a los estudiantes y para hacerse una idea de cómo pudo haber hecho las cosas de manera diferente.

Empleando estas apreciaciones, hemos seleccionado dos dimensiones para estudiar las tareas planteadas por los profesores durante sus procesos de reflexión: la forma de gestionar las tareas y el nivel de exigencia cognitiva que proponen.

La gestión de las tareas, tiene que ver con la forma en que se implementan las tareas en clase, lo que influye en las oportunidades de aprendizaje de los alumnos. Está influenciada por si el profesor atiende a las limitaciones de aprendizaje del tema, que suelen presentar los estudiantes. Para examinarla consideramos elementos del análisis didáctico, como lo concibe el grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico, PNA, de la Universidad de Granada (Gómez,

2007; Rico, 1997)[2], referidos al análisis cognitivo. Durante este análisis, el profesor hace hipótesis sobre cómo espera que sus estudiantes progresen en la construcción del conocimiento. Le lleva a detallar qué espera que aprendan los estudiantes, y qué errores y obstáculos le pueden surgir en su desarrollo. Atender a errores y dificultades nos da una idea de la reflexión de los profesores, por lo que estudiaremos si los asistentes al curso aluden a los errores de aprendizaje al abordar tareas de enseñanza, a las dificultades que subyacen a esos errores y a los obstáculos que necesitan superar para resolver esas dificultades.

La demanda cognitiva, se refiere a la profundidad con que se pretende tratar un tema. Para este análisis, se consideró la visión de Stein *et al*. (2000), quien sugiere utilizar cuatro categorías de demanda cognitiva (tabla 1), excluyentes entre sí: memorización, procedimientos sin conexiones, procedimientos con conexiones y "haciendo matemática".

Tabla 1: Categorías de demanda cognitiva (Stein *et al*., 2000).

Nivel de demanda cognitiva	**Tipo**	**Descripción**
Baja demanda cognitiva	Memorización	Tareas automáticas, sólo se evoca a la memoria, sin realizar procedimientos.
	Procedimientos sin conexiones	Algoritmos que requieren uso de un procedimiento, pero no demandan establecer conexiones entre conceptos matemáticos.
Alta demanda cognitiva	Procedimientos con conexiones	Involucran varios conceptos matemáticos subyacentes, con múltiples representaciones que ayudan a desarrollar el significado de la tarea. No pueden ser resueltos descuidadamente y su respuesta no se deduce explícitamente del planteamiento.
	Haciendo matemáticas	Demanda un pensamiento complejo y no algorítmico, en el que se debe explorar y entender la naturaleza de los conceptos matemáticos. Requiere un análisis continuo de la tarea, uso de aprendizajes previos y autorregulación de procesos cognoscitivos

Metodología

Comenzamos por detallar el contexto y los sujetos de nuestra investigación. Entre los años 2008 y 2010, en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile), dirigido por una profesora-investigadora de la institución, se realizó un curso de formación de profesores, con el fin de ayudarlos en su desarrollo profesional como docentes de matemáticas. Este curso de formación no tuvo un costo económico para los interesados y se impartía dos veces al mes con sesiones de 3 a 4 horas aproximadamente cada una. Desde el año 2009, la metodología de trabajo se basó en el *Estudio de Clases* japonés (*lesson study*: Isoda, Mena & Arcavi, 2007). Asistieron al curso 12 docentes de la quinta región y de la región metropolitana de Chile: 2 de primaria (8 años de escolaridad, a contar de los 6 años), 7 de secundaria (4 años de escolaridad, a contar de los 14 años aproximadamente) y 3 de superior (a contar de los 18 años aproximadamente).

[2] Si bien, este análisis es una herramienta para que el docente diseñe unidades didácticas, nosotros (Rojas, Flores y Ramos, en prensa) ampliamos su uso como herramienta para analizar al docente y su práctica profesional.

El trabajo realizado agrupó a los profesores en parejas quienes reflexionan sobre la clase puesta en práctica por uno de sus integrantes. En nuestra investigación procedimos a un estudio de caso, seleccionando intencionalmente una pareja de profesoras de secundaria de la quinta región, quienes trabajaron en un tema de álgebra, la simplificación de expresiones algebraicas fraccionarias. Se escogió esta pareja, ya que cubre el máximo de criterios apropiados o altamente convenientes para los fines que persigue la investigación, como su disposición a ser parte de este estudio y que presentaron todos los informes pedidos (de donde extraeremos los datos).

Con un enfoque cualitativo, nos ubicamos en un estudio exploratorio, con un diseño de tipo no experimental, clasificándolo de longitudinal de panel (Cohen & Manion, 2002). Para las dos dimensiones, de índole cualitativa: gestión de las tareas y demanda cognitiva, explicitadas en los fundamentos teóricos, se consideran sus categorías, resumidas en la tabla 2.

Tabla 2: Categorías de las dimensiones del estudio

Dimensiones	Categorías
Gestión de tareas	Errores
	Dificultades
	Obstáculos
Demanda cognitiva	Memorización
	Producción sin conexión
	Producción con conexión
	Haciendo matemáticas

La recolección de datos se limitó al extraído de los informes escritos entregados por las profesoras en el transcurso del proceso formativo. Los datos utilizados son comentarios, ideas y observaciones presentados en dichos informes, textos escritos de las profesoras. Se explicita en la figura 2 los informes pedidos y sus contenidos expresados en términos del momento en que se presentan, además agregamos la identificación de las etapas del proceso ALACT.

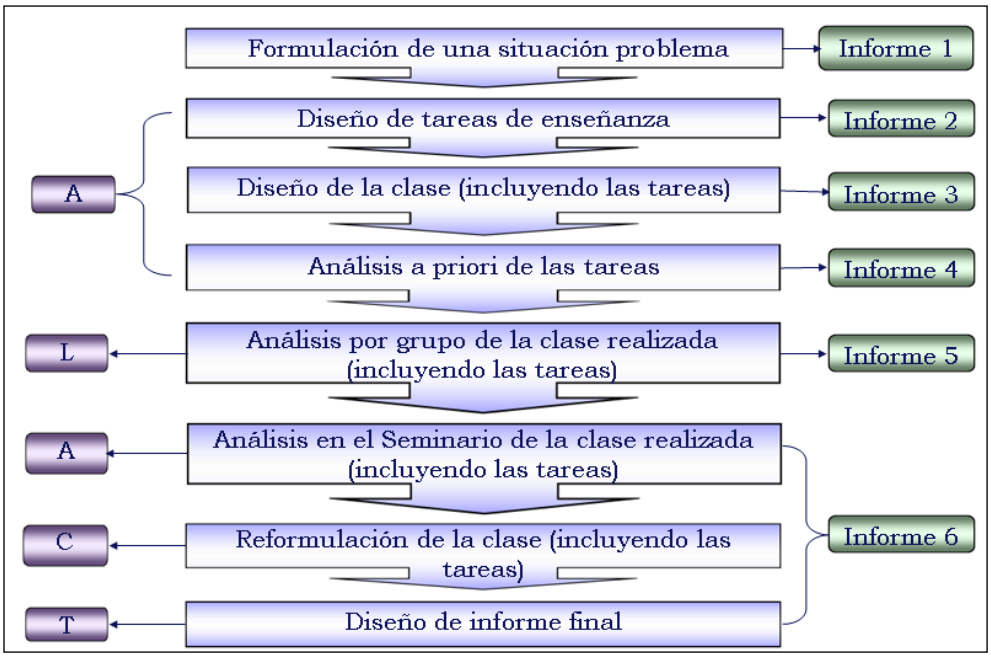


Figura 2. Esquema con la relación de los momentos del proceso formativo con los informes, junto con la identificación de las etapas del proceso ALACT.

El proceso de interpretación de datos se basó en el *análisis de contenido* (Krippendorff, 1990), dado que los datos con los que contamos son escritos y de ellos necesitamos extraer información para detectar las dimensiones del estudio. Realizamos un análisis de contenido semántico, que se dirige específicamente a la clasificación de las unidades de análisis de acuerdo con sus significados. Como unidades de análisis consideramos las unidades referenciales, en nuestro caso, los párrafos o conjunto de éstos, que tuvieran alguna conexión o idea en común. No se procedió a un muestreo de la información, ya que la cantidad de datos era suficientemente operable para el estudio.

El curso comenzó invitando a los participantes a definir un problema detectado en su práctica, que estuviera relacionado con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Las docentes seleccionadas formulan una problemática mediante las siguientes preguntas: ¿por qué los alumnos no descomponen en factores al momento de simplificar una fracción algebraica cuyo numerador es un polinomio? y ¿por qué los alumnos transfieren el procedimiento de simplificación de un monomio al momento de simplificar una fracción algebraica no contemplando la diferencia?

A partir de esta cuestión, se inicia un ciclo de reflexión, que hemos modelizado empleando el ciclo ALACT de Korthagen (Korthagen *et al*., 2001). Una vez iniciado este ciclo, los profesores tienen que diseñar, realizar y analizar una clase que aborde dicha situación. Hemos identificado en este proceso un segundo ciclo de reflexión, que también analizamos bajo el modelo ALACT, en el que intervienen directamente las tareas de enseñanza, cuyas fases desarrollamos y analizamos a continuación, centrándonos en los aspectos concernientes a las tareas de enseñanza.

Proceso de análisis

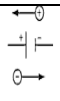
Se convirtieron los informes de las profesoras en unidades de información, cada una de las cuales se examinaron empleando las dimensiones definidas. Pasamos a describir el proceso llevado a cabo por las docentes, enfatizando el rol que tuvieron las tareas de enseñanza.

Fase 1: "A", acción. Considerando la interrogante que emerge de la *problemática*, las docentes diseñan y aplican una clase que aborde dicha situación. Esta es la consigna que da pie a esta primera fase.

En estas instancias, las profesoras inician la propuesta con tareas de enseñanza de baja demanda cognitiva (de tipo memorización y de tipo procedimientos sin conexiones), donde se requiere la memorización de fórmulas, una traducción directa y/o uso de un procedimiento para ser resueltos, no demandan establecer conexiones entre conceptos matemáticos. Un ejemplo de las primeras tareas de enseñanzas propuestas por las docentes se presenta en la figura 3.

Tarea 3 (Informe 2)

Completa la siguiente tabla dados los valores de a y b y contesta las siguientes preguntas

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
a	b	(a+b)	(a-b)	$a^2 - b^2$			$\frac{ab}{b}$
2	1						
3	2						
-2	4						
-1	0						

a) Compara las columnas (6) y (1) ¿Qué puedes decir?

b) Compara las columnas (7) y (2) Qué puedes decir?

Figura 3: Tarea de enseñanza propuesta por las docentes

En ella observamos que:

- Es una tarea de tipo "procedimiento sin conexiones" (demanda cognitiva), ya que requiere el reemplazo de valores y reducción de términos para ser resuelto, pero no demanda establecer conexiones entre conceptos matemáticos.
- Presenta algunas imprecisiones en su forma, como aparecer paréntesis innecesarios en algunas expresiones y letras en distintos formatos en algunas expresiones.
- Considera dos tipos de expresiones que aparecen en el Texto Guía (Zañartu, Darrigrandi & Ramos, 2011) para el profesor de matemáticas (figura 4) de 2° año de educación media (15 años aproximadamente).

2. Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.

a. La adición de fracciones cumple con las propiedades asociativa y conmutativa.

b. Si $a \neq 0$, entonces $\frac{0}{a} = 0$

c. Si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $a \neq 0$, entonces $\frac{a+b}{a} = b$

d. Si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $a \neq 0$, entonces $\frac{a \cdot b}{a} = b$

e. $\frac{1}{0}$ existe.

f. La multiplicación de fracciones cumple con las propiedades conmutativa y asociativa.

Figura 4: Tarea de enseñanza propuesta en texto guía del profesor (Zañartu, Darrigrandi & Ramos, 2011).

En este texto, se presenta posibles dificultades (dimensión gestión) que puedan tener los alumnos en la pregunta de la figura 4, las que se exhiben en la figura 5.

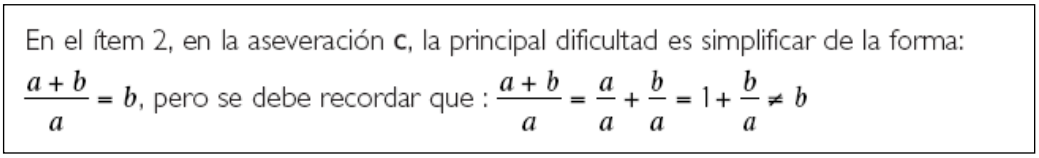


Figura 5: Sugerencia para abordar cierta dificultad en el tratamiento de las expresiones algebraicas fraccionarias (Zañartu, Darrigrandi & Ramos, 2011)

- Tienen que ver con tipos de errores que Cervantes y Martínez (2007) identifican con mayor frecuencia en alumnos de pre-grado al solucionar ejercicios algebraicos (figura 6).



Figura 6: Errores en la manipulación algebraica (Cervantes & Martínez, 2007)

Destacamos esta tarea de enseñanza, ya que las profesoras la seleccionan para la *clase en estudio*, que sufrirá modificaciones a lo largo del proceso de reflexión.

Además, de tareas de enseñanza, las docentes indican diversas dificultades y errores que pueden tener los alumnos. Sobre las dificultades, las profesoras mencionan que están en relación a la operatoria con fracciones y con expresiones algebraicas, a que los alumnos no le den significado a la expresión algebraica fraccionarias y a las técnicas de factorización. Consideran que estas dificultades tienen que ver con los conocimientos previos de los estudiantes. Aluden a dificultades generales que surgen en el tratamiento del tema, entre ellas, se refieren al pasaje de la aritmética al álgebra (unidad de análisis, T1_U8), dificultad que encontramos en la literatura (Trigueros, 1999).

Unidad de análisis (u.a.) T1_U8[3]

Ausencia del significado del álgebra, es decir, los alumnos no establecen el vínculo entre la aritmética y la generalización que conlleva el álgebra, por lo cual errores que cometen en aritmética se convierten en una dificultad [obstáculo] *para el nuevo proceso cognitivo del alumno, en particular, en el problema de simplificación.*

Identifican cinco errores que pueden cometer los alumnos, que agrupamos en dos tipos:

- los alumnos no toman en cuenta la restricción de la validez de las expresiones algebraicas o los relacionados con conocimientos previos (aritmética y factorización).
- errores relacionados con la *problemática* en cuestión (identifican como error: "*Simplificar términos comunes* [aditivos] *de una expresión algebraica*").

Esto último, ratifica la idea de que las profesoras, a pesar de tener una problemática no directamente relacionada con el error, lo afrontan cuando lo detectan en sus alumnos.

[3] A las unidades de análisis se les asigna un código de la forma $Ti_Ui \quad \text{con} \quad i \in \bullet$, donde *Ti* identifica la tabla de transcripción del informe "*i*" y *Ui* identifica la unidad de análisis de aquella tabla. Por ejemplo, $T1_U8$, es la unidad 8, de la tabla 8, es decir, del informe 1.

Fase 2: "L", mirar hacia atrás. El proceso de mirar hacia atrás se identifica en el informe 5, tras la realización de la clase. En este momento las profesoras focalizan la atención en las tareas de enseñanza, en las estrategias para aplicarlas y en las dificultades y errores en el tratamiento del tema, de forma que responden a preguntas del tipo ¿Cómo lo hice? ¿Cómo me sentí? ¿Qué pensaban, qué sentían o que hacían mis alumnos? Cuestiones que forman parte del repertorio de preguntas que se deben plantear en esta fase del proceso reflexivo. En los escritos del informe 5, las docentes escriben sus apreciaciones respecto de lo que fue la clase, observando que los alumnos realizan estrategias no previstas (u.a.: T5_U3).

u.a.: T5_U3

Se observa un porcentaje de alumnos, que considera números consecutivos, lo cual establece otro tipo de relaciones en la tabla, muy lejos de la equivalencia de fracciones algebraicas.

Vemos así, que las profesoras, atienden a obstáculos, como la disposición a considerar valores naturales, en un ambiente en el que está implícito Q.

La importancia que atribuyen a estrategias de los alumnos sugiere un interés de las docentes por abordar errores que emergen en ellas, como queda de manifiesto en la unidad T5_U2.

u.a.: T5_U2

- *La profesora lee el enunciado del problema y al no entender los alumnos, vuelve a explicar dando pie a posibles estrategias.*
- *La profesora tiene un rol protagónico en la clase, guiando demasiado las posibles estrategias que deben seguir los alumnos.*
- *No se contempló en el análisis a priori la posibilidad de que los valores tomados fueran números consecutivos.*
- *Se dejan en pizarra las evidencias de las estrategias utilizadas, lo que permite el análisis en la puesta en común.*

Observamos que las profesoras perciben como la tarea pierde el elevado nivel de demanda cognitiva (Stein, 1998), al adoptar la docente a cargo un papel protagónico para guiar las estrategias de resolución.

Las profesoras perciben una dificultad que tuvieron los alumnos en la comprensión del enunciado (unidad de análisis T5_U1).

u.a.: T5_U1

Se presenta una dificultad por no entregar la guía individual antes de presentar el problema en forma general.

Este último aspecto, será abordado nuevamente por las docentes en las fases siguientes, con intención de aclarar puntos importantes de su clase y buscar alternativas de comportamientos para una nueva ocasión.

Fase 3: "A", aclaración de puntos importantes. Esta fase se inicia con una sesión tras el análisis de la clase por el grupo, anterior al informe 6. Por tanto, su evidencia se estudia en el informe 6, examinando cómo las profesoras recogieron las apreciaciones de sus pares y de la formadora, tras el informe 5.

Se observa que las profesoras perciben puntos importantes para abordar en posteriores ocasiones, centrados en cómo enfrentar las dificultades (gestión), qué forma y contenido tienen que tener las tareas y la necesidad de justificarlas, aportando argumentos y examinando consecuencias (demanda cognitiva).

Las profesoras dirigen la atención a estrategias utilizadas por los alumnos en tareas de enseñanza presentadas y al tratamiento que hubo de ellas por parte del docente, pero además plantean sugerencias para abordar las dificultades observadas al respecto. Evidencian que hubo más de una estrategia de resolución, tal como se refleja en la siguiente unidad de análisis:

u.a: T6_U34

No se contempló en el análisis a priori la posibilidad de que los valores tomados fueran números consecutivos, por ejemplo, al reemplazar por los números 1, 2, 3 se dan otras relaciones entre las columnas que se aleja de la pretensión del educador.

Se dejan en pizarra las evidencias de las estrategias utilizadas por los alumnos, lo que permite que los alumnos puedan visualizar dichas estrategias para apoyar el análisis en la puesta en común.

*Las estrategias realizadas por los estudiantes se pueden agrupar en dos. Una de ellas es reemplazar por valores enteros las variables **a** y **b.** La otra es aplicar la simplificación considerando la factorización de las expresiones algebraicas tanto del numerador como del denominador.*

Observamos una mayor preocupación de las profesoras por la demanda cognitiva de tareas de enseñanza, al diseñar aquellas que requieran mayor nivel de exigencia (unidad T6_U20).

u.a.: T6_U20

En una primera etapa diseñamos ejercicios relacionados con la geometría donde aplicarán el concepto de simplificación, pero nos dimos cuenta que no eran desafiantes para los alumnos dado que se resolvían directamente.

Se aprecia en cada uno de los aspectos mencionados en la fase anterior, cómo las profesoras van incorporando estrategias o caminos de solución a dificultades o elementos para mejorar la clase. Hacen explícita la necesidad de enfrentar las dificultades que tuvieron los alumnos, como en la comprensión del enunciado (T6_U33).

u.a: T6_U33

Al iniciar la clase, la profesora lee el problema expuesto en forma general, pero al no entregar inmediatamente las guías individuales, provoca una dificultad en la comprensión de este.

Fase 4: "C", comportamientos alternativos. Después de contar con la retroalimentación de pares y formadora, y dar estrategias de solución, las docentes buscan o crean alternativas de acción posterior, como las siguientes:

u.a: T6_U36

1. Se sugiere que desde un principio los alumnos tengan la guía individual en su poder. Se recomienda dar la palabra a los alumnos en relación a la lectura del problema sin intervención de la profesora, de modo de lograr un mayor protagonismo del alumno.

2. Se sugiere observar las estrategias sin intervenir, para escoger mayor diversidad.

3. Se recomienda extraer las respuestas expertas de los propios alumnos.

Las docentes proponen una alternativa de solución para afrontar la dificultad de los estudiantes respecto a la comprensión del enunciado. Evidencian que la tarea de enseñanza tiene más de una estrategia de resolución y que los estudiantes pueden generar la respuesta. Además, sugieren que intervenga menos el docente para ayudar a que los alumnos respondan, muestran un interés por atender a errores y dificultades de los alumnos en el tema, manifestando su preocupación por mantener la demanda cognitiva de la tarea.

Fase 5: "T", comprobar en una nueva situación. Tras la fase anterior, las profesoras están en condiciones de abordar nuevos ciclos reflexivos en relación a la acción original. En este caso, las docentes consideran los elementos que surgen de las fases anteriores para replantear la clase y llevarla a cabo en otra ocasión. Así, encontramos una reformulación de los objetivos de la clase en la siguiente unidad:

u.a.: T6_U9

Identificar las fracciones algebraicas equivalentes a través de la simplificación de fracciones algebraicas valorando su rol en el cálculo de expresiones numéricas y distinguiendo la diferencia en la simplificación de fracciones algebraicas con monomios, de aquellas con polinomios.

Las profesoras avanzan de manera explícita en la *problemática* planteada, comenzando a aventurar una respuesta a su pregunta, es decir, que el alumno debe distinguir la simplificación de fracciones algebraicas con monomios de las formadas por polinomios. Incorporan la problemática al objetivo de la *clase en estudio*. Los ciclos de reflexión se cierran en conjunto.

Las profesoras presentan finalmente la tarea 6 (ahora de tipo procedimental con conexión, alta demanda cognitiva), como una transformación de la tarea 3 (figura 7), considerando las observaciones realizadas por sus pares y formadora en el análisis de la clase. Esta tarea (figura 7) se corresponde con el nuevo objetivo propuesto y es la que se plantea para una nueva realización de la clase.

¿Se puede ahorrar cálculos?

En el segundo medio C, la profesora de Matemática escribió la siguiente tabla:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
a	b	$a+b$	$a-b$	a^2-b^2	$\frac{a+b}{a}$	$\frac{a^2-b^2}{a-b}$	$\frac{ab}{b}$
….	….						
….	….						
….	….						
….	….						

Luego, empezó a recitar algunos valores para *a* y *b*, y pide completar la tabla.

Al cabo de poco tiempo, Aldo, un alumno del curso, dice que ya terminó, el resto de compañeros se encuentran asombrados por la rapidez en los cálculos de su compañero.

La profesora le pregunta ¿Completaste todas las columnas? y el responde:

"Si completé todas las columnas, pero no fue necesario el cálculo en algunas"

¿A qué columna(s) crees que se refiere Aldo? Explica.

Figura 7: Tarea propuesta por las profesoras en la fase final del proceso reflexivo.

En ella se observa que:

- Es una tarea de enseñanza con un nivel de demanda cognitiva alta, de tipo procedimiento con conexiones, ya que:
  - no se dan valores a las variables, se deja abierto. Permitiendo abordar la tarea de enseñanza con distintas estrategias de resolución, como dar valores a cada expresión (estrategia numérica) o bien simplificar algunas expresiones e identificar las que son equivalentes (estrategia algebraica),
  - involucra la atención en la estructura algebraica, al uso de simplificación de expresiones algebraicas, a la equivalencia de éstas, de tal forma que ayuda a desarrollar el objetivo de la tarea. Es una propuesta que no se puede resolver descuidadamente y cuya respuesta no se deduce explícitamente del planteamiento.
- La propuesta ya no presenta paréntesis innecesarios, por lo que se elimina la dificultad que puedan tener los alumnos en el manejo de expresiones algebraicas.
- Las letras de las expresiones algebraicas están en el mismo formato, eliminando otra posible dificultad presentada en la versión inicial.

Vemos que las profesoras, con esta nueva modalidad de presentación de la tarea, intentan (conscientes o no) promover un nivel de demanda cognitiva más alto al contemplado en la versión inicial, que era un procedimiento sin conexión. Además, se preocupan por abordar posibles deficiencias de presentación de la tarea, como evitar paréntesis innecesarios y unificar el formato de letras de las expresiones algebraicas.

De esta manera, las profesoras cubren el ciclo de reflexión ALACT de Korthagen, en donde se evidencia:

- Progreso en la demanda cognitiva de las tareas de enseñanza, pues, si bien parten con unas tareas de enseñanza de demanda cognitiva baja, al avanzar en los informes, modifican una de ellas (figura 3) hasta obtener una tarea con demanda cognitiva alta (figura 7). Las primeras propuestas de tareas de enseñanza son de tipo memorización y procedimientos sin conexiones, mientras que la versión final es de tipo procedimiento con conexiones.
- Progreso en la detección de dificultades y errores de los alumnos al abordar la tarea de enseñanza (categoría gestión), referido a imprecisiones en su diseño, preferentemente ligados a la forma en que se presentan, como por ejemplo, el uso de distintos tipos de letras o el uso innecesario de paréntesis.

Conclusiones, limitaciones y perspectivas del estudio

El propósito del trabajo que presentamos es examinar el tipo de tareas de enseñanza propuestas por docentes, y cómo evoluciona su formulación en un curso de formación. El análisis realizado nos da ideas al respecto, donde las docentes reflejan en sus informes la atención que prestan a tareas de enseñanza y su preocupación por mejorarlas. Respecto a la clase, se observa que el proceso de reflexión de las docentes las lleva a plantear nuevas tareas de enseñanza. Sin embargo, no se explicita el significado de los conceptos matemáticos y didácticos utilizados (formas de interpretar la simplificación, papel de la letra, significados de la variable, por ejemplo, y su peso en las tareas de enseñanza). Apreciamos que durante el ciclo reflexivo, muestran una preocupación por la demanda cognitiva de las tareas de enseñanza, partiendo con tareas de enseñanza de exigencia cognitiva de nivel bajo, que al avanzar en las fases del ciclo reflexivo, les lleva a fijar su atención y seleccionar y reformular una de ellas (figura 3) para obtener una tarea con demanda cognitiva alta (figura 7).

Sobre la dimensión gestión de las tareas de enseñanza, se aprecia en los escritos de las profesoras, un progreso en la detección y toma en consideración de posibles dificultades y errores de los alumnos al abordar tareas de enseñanza, aunque el hecho de que los detecten les lleva más a cuidar la forma de presentación de las tareas que a proponer actuaciones específicas para prevenirlos y emplearlos en su enseñanza.

Estamos conscientes que el estudio puede mejorarse ampliando las fuentes de datos, limitadas en esta ocasión a los obtenidos de los informes escritos. Por consecuencia, estamos diseñando una investigación que amplía los elementos teóricos base de nuestro trabajo, centrado en el estudio de reflexión sobre la práctica de profesores participantes en cursos de formación, diseñados con intención de provocar ciclos de reflexión, resaltando aún más el papel de las tareas de enseñanza como elemento de análisis.

Referencias

Arbaugh, F., & Brown, C. (2005). Analyzing mathematical tasks: a catalyst for change. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*, 499–536.

Cervantes, G., & Martínez, R. (2007). Sobre algunos errores comunes en desarrollos algebraicos. *Zona próxima. Revista del Instituto de Estudios Superiores en Educación Universidad del Norte, 8*, 34-41.

Clarke, D. (2008). The mathematics teacher as curriculum maker. Developing Knowledge for Enacting Currículo. In P. Sullivan y T. Wood (Eds.) *Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development. The international handbook of mathematics teacher education*. (Vol. 1, pp. 133-152). Rotterdan: Sense Publisehrs.

Cohen, L. & Manion, L. (2002). *Research Methods in Education*. London: Routledge.

Cooney, T. J. (2001). Considering the paradoxes, perils and purposes for conceptualizing teacher development. In F.L. Lin & T. J. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 9–31). Dordrecht: Kluwer.

Flores, P. (2007). Profesores de Matemáticas reflexivos: formación y cuestiones de investigación. *PNA, 1*(A), 139-159.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, España.

Hughes, E. K., Smith, M. S., Boston, M., & Hogel, M. (2008). Case stories: supporting teacher reflection and collaboration on the implementation of cognitively challenging mathematical tasks. In F. Arbaugh & P. M. Taylor (Eds.), *Inquiry into mathematics teacher education* (pp. 71-83). San Diego, CA: Association of Mathematics Teacher Educators.

Isoda, A., Arcavi, A., & Mena A. (2007). *El Estudio de Clases Japonés en Matemáticas. Su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global*. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso.

Jaworski, B. (1993). The professional development of teachers: The potential of critical reflection. *British Journal of In-service Education, 19*, 37-42.

Korthagen, F., & Verkuyl, H. S. (1987). *Supply and Demand: Towards Differentiation in Teacher Education, Based on Differences in Learning Orientations.* Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Washington. D.C.

Korthagen, F., Kessels, J., Koster, B., Lagerwerf, B., & Wubbels, T. (2001). *Linking practice and theory: The pedagogy of realistic teacher education.* Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido: teoría y práctica*. Barcelona: Paidós Comunicación.

Mewborn, D. S. (1999). Reflexive thinking among preservice elementary mathematics teachers. *Journal For Research Mathematics Education*, 30(3), 316-341.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ramos, E. (2011). *Reflexión de docentes sobre la enseñanza del álgebra en un programa formativo*. Trabajo de fin de Master, Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada, España.

Rico, L. (1997). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid: Síntesis.

Rojas, N., Flores, P., & Ramos, E. (En prensa). *El análisis didáctico como herramienta para identificar conocimiento matemático para la enseñanza en la práctica*. Granada, Departamento de Didáctica de las Matemáticas.

Schön, D. (1983). *La formación de profesionales reflexivos: Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones*. Madrid: Paidós.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 268-275.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: A casebook for professional development*. New York: Teachers College Press.

Trigueros, M. (1999). *Un modelo de medida con interacción.* Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid: España.

Zañartu, M., Darrigrandi, F., & Ramos, M. (2011). *Matemática 2° para Segundo de Educación Media. Guía didáctica para el profesor.* Santiago: Santillana.

RECURSOS DIDÁTICOS NUMA AULA DE ENSINO EXPLORATÓRIO: DA PRÁTICA À REPRESENTAÇÃO DE UMA PRÁTICA[1]

Hélia Oliveira
Instituto de Educação da Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ul.pt

Luís Menezes
Escola Superior de Educação de Viseu/ CI&DETS
menezes@esev.ipv.pt

Ana Paula Canavarro
Universidade de Évora & Unidade de Investigação do IE da Universidade de Lisboa
apc@uevora.pt

Resumo. Esta comunicação pretende analisar as intenções e ações de uma professora no que diz respeito ao uso de recursos didáticos numa aula de matemática de ensino exploratório de uma turma do 4.º ano, centrada no desenvolvimento do pensamento algébrico. Este estudo decorreu no contexto do planeamento e concretização de um *caso multimédia* que ilustra práticas de ensino exploratório a ser usado na formação de professores, no âmbito de um projeto de investigação. Integra-se numa investigação mais ampla de *Design Research*, em que a investigação sobre a prática dos professores dá origem à construção de materiais multimédia para a formação, sendo depois testados em vários contextos formativos. Para a presente comunicação, a recolha de dados foi realizada com uma professora com experiência de ensino exploratório, a partir da realização de uma tarefa matemática, recorrendo-se à gravação vídeo da aula, a duas entrevistas à professora, antes e após a aula, ao plano de aula e às resoluções escritas dos alunos. Os resultados evidenciam que os recursos didáticos merecem uma atenção particular da professora, desde a fase de planificação da aula, e têm uma forte presença no momento de introdução da tarefa à turma, acompanhando a sua intenção de garantir a adesão dos alunos à tarefa e a sua apropriação. O *caso multimédia* construído retrata a prática da professora, em diversas dimensões, tendo características que poderão ajudar outros professores a reconhecer as potencialidades da utilização de recursos num ensino exploratório e a dar pistas sobre quando e como estes poderão ser utilizados.

Palavras-chave. Recursos didáticos; práticas profissionais; desenvolvimento do pensamento algébrico; casos multimédia.

Introdução

O ensino exploratório pressupõe novos papéis para professor e alunos quando se compara com a aula tradicional assente no tipo de ensino direto, em que a informação é difundida do professor para os alunos (Ponte, 2005). No ensino exploratório, "a ênfase desloca-se da atividade 'ensino' para a atividade mais complexa 'ensino-aprendizagem'" (Ponte, 2005, p. 13), em que tanto o professor como os alunos estão ativos, à sua maneira. Nesta visão do ensino e da aprendizagem, os alunos aprendem em resultado do seu trabalho com tarefas ricas e

[1] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projeto Práticas Profissionais dos Professores de Matemática (contrato PTDC/CPECED/098931/2008).

sobretudo da possibilidade de partilharem e discutirem as suas ideias. Dessa forma, os alunos têm oportunidade de ver surgir conhecimentos e procedimentos matemáticos como resultado de uma construção coletiva, na base da negociação de significados (Canavarro, 2011; Ponte, 2005).

O sucesso da aprendizagem dos alunos neste tipo de aulas depende da concretização de uma estratégia de ensino que pressupõe diversos momentos, em que o trabalho dos alunos com tarefas matemáticas, apoiadas por recursos didáticos, é central. Em particular, os materiais manipuláveis têm um papel importante durante a aula, em especial, quando os alunos trabalham autonomamente, procurando resolver os problemas que lhes são propostos, lidando com ideias e relações matemáticas (Matos & Serrazina, 1996). Nesta visão da aula de Matemática, o trabalho dos alunos implica da parte do professor um trabalho correspondente, tanto na fase de preparação como na aula, no acompanhamento e monitorização dos alunos. Dada a exigência para o professor deste tipo de aulas, também pelo facto de esta ser uma abordagem metodológica ainda nova para muitos e não ser fácil à generalidade dos professores ter acesso à observação de práticas de sala de aula significativas, o projeto de investigação P3M – *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática*, numa das suas ações, propõe-se construir casos multimédia a partir da investigação dessa prática para serem usados em contextos de formação (McGraw, Lynch, Koc, Budak, & Brown, 2007).

Nesta comunicação, partindo de um *caso multimédia*[2] de uma aula do 4.º ano, pretendemos refletir sobre as ações e intenções da professora relativamente aos recursos didáticos a utilizar a partir do momento em que planeia a aula e depois na aula, com principal incidência no momento da introdução da tarefa.

Materiais manipuláveis e ensino exploratório

A Matemática, de modo mais vincado do que as outras disciplinas escolares, lida com abstrações. Os conceitos matemáticos, como por exemplo o de número, o de volume ou o de média, são abstrações, ou seja, são construções mentais que foram desenvolvidas pelo ser humano ao longo do tempo com o intuito de resolver problemas do seu quotidiano, mas também como resultado do simples propósito de saber mais. A Matemática, como é referida no atual programa de Matemática do ensino básico (ME, 2007), "não é uma ciência sobre o mundo, natural ou social, no sentido em que o são algumas das outras ciências, mas sim uma ciência que lida com objetos e relações abstratas" (p. 2). Nessa medida, o professor de Matemática, principalmente nos primeiros anos de escolaridade, deve ter como preocupação proporcionar aos alunos boas representações dos conceitos que se propõe ensinar, ou seja, é importante que os conceitos que por natureza são abstratos possam ser "tornados presentes" aos alunos. Os materiais específicos ou os objetos do dia-a-dia podem constituir-se como recursos para o professor na sua ação didática na sala de aula, seja como forma de criar representações de objetos matemáticos (por exemplo, a bola como representação da esfera ou o cordão que contorna a base circular de uma garrafa como a representação do perímetro da base) ou de relações matemáticas (objetos com diferentes medidas de massa colocados nos pratos de uma balança em equilíbrio podem representar a relação de igualdade).

O recurso a materiais para o ensino da matemática, em particular os manipuláveis, tem sido apontado por diversos autores do âmbito da educação matemática (Kelly, 2006; Matos & Serrazina, 1996; Post, 1981) e também na generalidade dos currículos de Matemática. Para

[2] Agradecemos a colaboração de Ana Paula Gil na edição dos vídeos das aulas e no apoio à construção do Caso Multimédia.

Matos e Serrazina (1996), os materiais, principalmente os manipuláveis, apelam a vários sentidos e, por isso, favorecem o envolvimento dos alunos na aprendizagem. Estes autores sublinham, contudo, que a forma como os materiais são utilizados na aula pode fazer toda a diferença, porque uma coisa é serem utilizados como instrumentos que apoiam a comunicação do professor numa dinâmica de transmissão de conhecimento e outra é serem integrados na atividade dos próprios alunos, a partir de tarefas propostas pelo professor, numa dinâmica de construção coletiva do conhecimento através da troca de ideias: "É diferente um material ser utilizado como instrumento de comunicação do professor que explica mostrando objetos que só ele manipula, ou serem os alunos a manipulá-los, interpretando as suas características, resolvendo problemas com a sua ajuda e formulando novos problemas" (Matos & Serrazina, 1996, p. 197). Também Post (1981) chama a atenção para este papel dos materiais em aulas tradicionais e em aulas em que os alunos têm um forte envolvimento na atividade, sublinhando em relação a estas segundas que "o professor comprometido com a ideia da aprendizagem ativa da matemática (…) está preocupado em organizar ou facilitar interações adequadas entre aluno(s) e materiais." (p. 5). O autor sublinha que o papel do professor no acompanhamento e monitorização de uma aula em que os alunos trabalham com materiais manipuláveis é bem mais exigente do que uma aula baseada na explicação por parte do professor. Moyer (2001) assinala, igualmente, o desafio que constitui para os professores usar os materiais manipuláveis como ferramentas para traduzir ideias abstratas, uma vez que a representação interna das ideias matemáticas parte sempre do aluno.

Na senda de um ensino em que os alunos devem ter um forte comprometimento na sua aprendizagem, o programa de Matemática (ME, 2007) defende que "os materiais manipuláveis (estruturados e não estruturados) devem ser utilizados nas situações de aprendizagem em que o seu uso seja facilitador da compreensão dos conceitos e das ideias matemáticas" (p. 14). No entanto, o programa adverte para o facto de que "a simples utilização dos materiais não é suficiente para o desenvolvimento dos conceitos, sendo indispensável registar o trabalho feito e refletir sobre ele" (p. 14).

Os materiais manipuláveis têm no quadro do ensino exploratório uma grande importância, na sua articulação com as tarefas matemáticas. Kelly (2006) sublinha que o professor deve ter em conta um conjunto de aspetos relativamente aos materiais manipuláveis e ao seu uso. Em primeiro lugar, os materiais são ferramentas que ajudam os alunos a aprender melhor, mais do que objetos para jogarem ou simplesmente manipularem. Em segundo lugar, ao introduzir os materiais, o professor deve clarificar junto dos alunos o propósito da sua utilização, tendo como horizonte as aprendizagens que pretende promover. Em terceiro lugar, o uso de materiais manipuláveis precisa de ser modelados pelos professores durante a sua introdução, a fim de ajudar os alunos a ver a sua relevância e utilidade na resolução de problemas e na comunicação matemática.

Apesar das recomendações curriculares para o uso de materiais manipuláveis no ensino da Matemática, a sua utilização tem sido relativamente reduzida no ensino básico. Ao nível do 3.º ciclo, Mosquito (2008) assinala uma forte diminuição da sua utilização relativamente aos resultados do estudo *Matemática 2001* realizado dez anos antes pela APM (1998). Num outro estudo, com uma amostra de 324 professores do 1.º ciclo dos distritos de Viseu e da Guarda, Silva (2008) concluiu que cerca de metade dos professores dizem utilizar em *muitas aulas* materiais manipuláveis. Estes resultados não surpreendem, dado que existe tradição na utilização de materiais manipuláveis nos primeiros anos de escolaridade. Contudo, a elevada frequência da sua utilização não deixa transparecer como são utilizados e que papel cumprem na aprendizagem dos alunos.

O caso multimédia "Cubos com autocolantes"

A utilização de *casos de multimédia* no projeto P3M - *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* procura promover o conhecimento do professor sobre a planificação e o ensino, no contexto de uma aula de natureza exploratória, e a sua capacidade para analisar e refletir sobre o ensino e a aprendizagem, mobilizando conceitos fundamentais da área didática da matemática.

Um *caso multimédia* foca-se em uma ou duas aulas que se desenvolvem em torno de uma tarefa matemática, sendo ilustrado com segmentos de vídeo de diferentes fases da aula, com resoluções escritas dos alunos e com comentários do próprio professor sobre essas aulas. Tendo em conta a variedade de tópicos que podem ser relevantes numa aula, a atenção do observador pode ser dirigida para aspetos específicos como o pensamento dos alunos, o papel do professor ou o discurso de sala de aula (MacGraw *et al*., 2007). Na construção dos casos multimédia foram tidas em conta várias características apontadas por Brunvand (2010) que um recurso como este deve possuir para apoiar os (futuros) professores a focarem-se em aspetos relevantes da aula. Estes casos são disponibilizados num sítio virtual desenvolvido pela equipa do projeto.

Na construção do *caso multimédia* adotamos um modelo de quatro fases para a estrutura da aula, de acordo com um quadro que desenvolvemos para descrever as ações intencionais do professor em aulas exploratórias (Canavarro, Oliveira, & Menezes, 2012). Nesta comunicação analisamos o caso "Cubos com autocolantes", que adota o nome da tarefa matemática (em anexo) que foi proposta a uma turma do 4.º ano, por Célia, uma professora experiente que se sente confortável com o ensino exploratório.

Metodologia do estudo

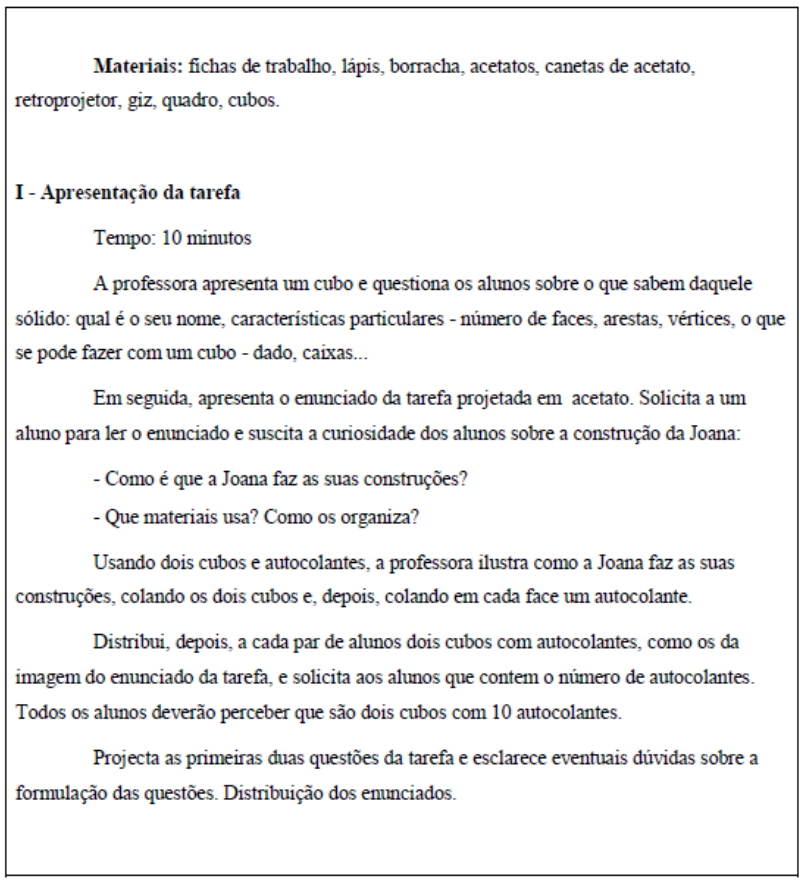
Este estudo é parte de um projeto de *Design Research* onde a investigação sobre a prática em sala de aula, a construção dos casos e o planeamento da formação de professores se desenvolvem simultaneamente, seguida por uma fase de investigação sobre a formação de professores (Cobb, Zhao, & Dean, 2009). Nesta comunicação focamos a primeira fase dedicada à construção do caso multimédia, utilizando os dados recolhidos na sala de aula e com a professora. Antes da aula, foi realizada uma entrevista à professora, com o objetivo de captar as suas principais opções relativamente à tarefa, as orientações metodológicas seguidas e a antecipação de estratégias e dificuldades, com o objetivo de recolher material que pudesse integrar o caso multimédia, expressando o seu pensamento sobre a aula. Após a aula, teve lugar uma segunda entrevista, com o objetivo de levar a professora a refletir sobre a aula lecionada. A aula foi gravada em vídeo, e a partir desse material, selecionámos os segmentos que foram sujeitos a uma análise mais aprofundada e que se tornaram episódios de ensino no caso de multimédia e/ou perguntas para colocar à professora, na entrevista pós-aula.

Os recursos didáticos na prática da professora

A análise de dados está organizada em quatro secções: (i) Antecipação do uso de recursos didáticos; (ii) O uso de recursos didáticos na introdução da tarefa; (iii) O uso de recursos didáticos como apoio à realização da tarefa e à apresentação das resoluções dos alunos; (iv) Reflexão sobre o papel dos recursos nas estratégias de resolução dos alunos.

Antecipação do uso de recursos didáticos

A análise do plano de aula elaborado pela professora permite conhecer os materiais didáticos que prevê para a aula e o modo como os pensa utilizar. No documento que elaborou, explicita a sua intenção de usar uma variedade de recursos e apresenta um conjunto de indicações sobre o que planeia fazer no momento de apresentação da tarefa (fig. 1).



Materiais: fichas de trabalho, lápis, borracha, acetatos, canetas de acetato, retroprojetor, giz, quadro, cubos.

I - Apresentação da tarefa

Tempo: 10 minutos

A professora apresenta um cubo e questiona os alunos sobre o que sabem daquele sólido: qual é o seu nome, características particulares - número de faces, arestas, vértices, o que se pode fazer com um cubo - dado, caixas...

Em seguida, apresenta o enunciado da tarefa projetada em acetato. Solicita a um aluno para ler o enunciado e suscita a curiosidade dos alunos sobre a construção da Joana:

- Como é que a Joana faz as suas construções?
- Que materiais usa? Como os organiza?

Usando dois cubos e autocolantes, a professora ilustra como a Joana faz as suas construções, colando os dois cubos e, depois, colando em cada face um autocolante.

Distribui, depois, a cada par de alunos dois cubos com autocolantes, como os da imagem do enunciado da tarefa, e solicita aos alunos que contem o número de autocolantes. Todos os alunos deverão perceber que são dois cubos com 10 autocolantes.

Projecta as primeiras duas questões da tarefa e esclarece eventuais dúvidas sobre a formulação das questões. Distribuição dos enunciados.

Figura 1 – Excerto do plano de aula da professora

Salienta-se desta primeira parte do plano, o cuidado da professora em estabelecer uma ponte com aprendizagens anteriores dos alunos através do recordar de algumas características do sólido geométrico presente na situação. De seguida, ainda em grande grupo, procura modelar com os alunos a situação, usando material: cubos e autocolantes. No plano, prevê também o uso de material manipulável idêntico pelos alunos no seu trabalho autónomo.

A professora reconhece que, embora dedique bastante tempo à planificação das suas aulas, habitualmente não efetua planos tão pormenorizados. Ainda assim, há um conjunto de preocupações que estão sempre presentes: "apesar de não fazê-las tão detalhadamente, estas questões, já tinha como preocupação a apresentação da tarefa, o tipo de questões a colocar, o apoio aos grupos" (E2). A preparação dos materiais para o apoio à realização da tarefa, é indispensável dado que, na maioria das vezes, eles não estarão disponíveis na aula se a sua utilização não for prevista. A antecipação das estratégias dos alunos é fundamental para que se possa perceber quando e como os recursos podem ser úteis, como ilustra Célia a propósito de uma outra aula.

> Estou a lembrar-me de uma aula muito no início em que eu tinha previsto uma tarefa e que não previ que havia um conjunto de cálculos que eram quase desnecessários para o conteúdo da tarefa, eles perderam imenso tempo nesse processo e se eu tivesse pensado

> nisso teria colocado logo a calculadora – foi o que fiz na aula a seguir –, e a tarefa teria sido mais rica. (E2)

Portanto, a professora evidencia reconhecer a necessidade de pensar os recursos em articulação com as tarefas matemáticas propostas, antecipando a sua utilização pelos alunos e por si própria.

O uso de recursos didáticos na introdução da tarefa

A introdução da tarefa à turma decorreu de uma forma muito próxima daquela que foi antecipada no plano de aula. Salientamos nesta análise as ações e intenções da professora que se prendem com a utilização do recurso didático "cubos", enquanto material manipulável.

Antes de introduzir a tarefa, a professora fez os alunos recordar algumas características do cubo, verificando se tinham o conhecimento necessário sobre o objeto matemático necessário à compreensão da tarefa. Houve um esclarecimento de vocabulário e das partes constituintes do cubo, a partir do que os alunos mencionaram.

Após a apresentação da parte inicial da tarefa, e ainda sem mostrar as questões, a professora procurou modelar a situação ali descrita com a turma. Com a ajuda de uma aluna, usou dois cubos em que foi colando autocolantes, de uma forma organizada (sequencialmente, nas faces dos dois cubos no mesmo plano), juntando no final os autocolantes nas duas faces dos "topos".

A professora explica que esta sua opção decorreu do facto de antecipar a dificuldade de visualização de um objeto tridimensional que se encontra representado a duas dimensões na figura do enunciado da tarefa. De facto, um dos seus receios é que alguns alunos se foquem apenas nas faces do cubo que conseguem observar na figura da tarefa e não considerem todas as outras.

> Como a primeira dificuldade que posso antecipar que os alunos vão ter se prende com a questão da visualização, pensei mesmo na parte de introdução da tarefa usar o cubo e fazer a construção como a Joana…portanto, usar dois cubos, aquilo que o enunciado da tarefa diz é que a Joana uniu os cubos por uma das faces e em cada uma das restantes faces colocou um autocolante. Fazer esse processo com o coletivo, para eles perceberem como é que a Joana fez essas construções e ao mesmo tempo a ajudá-los já a visualizar as faces que levam autocolantes. (…) há alunos com mais dificuldade que podem centrar-se só nos autocolantes que estão visíveis. (E1)

A forma organizada como colou os autocolantes denota também uma dupla preocupação com o grau de dificuldade desta tarefa comparativamente a outras, com sequências, que os alunos realizaram nas aulas anteriores: a contagem é realizada com objetos a três dimensões e esta contagem valoriza a apreensão da estrutura da sequência, em particular, a identificação da constante numérica na expressão geral. Tendo em conta que pretendia que os alunos conseguissem chegar à generalização da relação presente na sequência, através da expressão geral ("regra", para os alunos), estas eram questões importantes.

> A grande dificuldade que eu posso já prever será eles não identificarem as duas faces das pontas das construções como uma constante, porque aqui interessa a relação entre o número de cubos e as 4 faces de cada cubo que têm o autocolante e que percebam ainda que há mais 2 faces ou mais 2 autocolantes, das pontas da construção que eu uso, que é constante em todas as construções. Portanto, a dificuldade é que eles vejam exatamente essa constante, porque depois de eles perceberem que há mais 2 faces para além das 4 em cada cubo, penso que aí estabeleceram a relação e aí será mais fácil generalizar. (E1)

Esta modelação da situação proposta tinha também a intenção de desincentivá-los, numa primeira fase, de tentarem representar a duas dimensões a situação descrita na tarefa, na medida em que tendo em conta o seu nível etário, essa poderia ser uma capacidade que alguns alunos ainda não tinham muito desenvolvida. Tal situação poderia acarretar-lhes dificuldades adicionais, fazendo com que se descentrassem daquilo que é central na tarefa: "A primeira tendência deles será desenhar e será muito difícil, porque é uma coisa que eles costumam fazer quando se pede para continuarem uma sequência, mas será muito difícil neste caso o desenho dos cubos" (E1).

Embora a representação da situação proposta, mediada pelo material, seja uma questão que se coloca sempre que os alunos têm que registar por escrito as suas ideias, como é o caso desta aula, para a professora é imprescindível que consigam, em primeiro lugar, compreender a situação, desenvolvendo uma representação interna da sequência em causa, antes de começarem a tentar responder às questões da tarefa.

Nesta primeira fase da aula observa-se um conjunto de ações de Célia que pretendem garantir a *adesão à tarefa* e a *apropriação da tarefa* pelos alunos, nas quais o uso do material manipulável tem um papel importante. Ele é o elemento central na modelação da situação proposta. A modelação da situação é inicialmente feita pela professora em diálogo com os alunos, procurando, desta forma, que estes cheguem a uma compreensão partilhada da sequência pictórica representada no enunciado da tarefa.

O uso de recursos didáticos como apoio à realização da tarefa e à apresentação das resoluções dos alunos

A professora tinha também previsto, no plano de aula, disponibilizar aos pares de alunos, cubos já com os autocolantes colados, o que veio a concretizar. A sua expectativa era a de que os alunos se iriam apoiar bastante neste material para modelar a sequência, nas primeiras construções (i.e, termos da sequência), o que considerava fundamental dado o grau de dificuldade que atribuía à tarefa. A sua atuação passaria, nessa fase inicial, por incentivar os alunos à manipulação do material para efetuarem a contagem dos números de autocolantes e de cubos em cada construção.

> E depois dar a cada um dos pares uma construção igual, já feita com os 2 cubos e os autocolantes colados em cada uma das faces com os 2 cubos unidos e também a terceira construção da Joana, com 3 cubos e com os autocolantes também já colados, para que eles possam usar esse recurso para pensar nas primeiras questões e que se prendem exatamente com o número de autocolantes que a Joana vai usar numa construção com 3 cubos, 4 cubos, 10 cubos e 52 cubos. (…) Devido à possível dificuldade de visualização das faces não visíveis: (…) Portanto, é importante que eles peguem na construção, como é um objecto…e peguem e vejam e virem e contem quantos autocolantes tem cada construção. (E1)

A professora disponibilizou dois cubos colados entre si e mais três cubos colados entre si mas não considerou que fosse necessário serem os próprios alunos a colar os autocolantes nos cubos tal como ela tinha exemplificado na introdução da tarefa, dada a sua faixa etária. Ainda assim, levantou a hipótese de que alguns alunos não conseguissem fazer uma contagem organizada do número de autocolantes em cada construção e que obtivessem valores errados. Desse modo, antecipou uma forma de os poder ajudar na contagem: "Se acontecer isso, essa dificuldade de contagem, vou pedir-lhes que marquem os autocolantes que eles já contaram, porque eles podem contá-los repetidos, porque eles podem, ao virar, não se aperceberem que contaram" (E1).

Uma das preocupações principais da professora que motivaram a disponibilização deste material foi, como referimos, a possível dificuldade de os alunos apreenderem a estrutura da

sequência, de modo a que pudessem chegar à generalização, através da expressão geral. Como refere: "inicialmente eles vão precisar mesmo das construções, penso eu, que vão precisar das construções para contarem e se apreenderem da estrutura da sequência" (E1). A forma como os alunos percecionam o crescimento da sequência e a contagem dos autocolantes dá origem a diferentes estratégias para obtenção dos valores numéricos dos termos da sequência e da expressão geral. Célia evidencia ter bem presente o facto de que os cubos se revelam um recurso importante de suporte às ideias dos alunos, ainda assim existem diferentes maneiras de contar que poderão dar origem a estratégias diferentes:

> A melhor forma para chegar à relação seria realmente identificar as 4 faces, com autocolantes e cada cubo, em cada um dos cubos que a Joana vai acrescentando nas suas construções, e depois adicionar as 2 das pontas, mas eles podem olhar, por exemplo, começar por uma da ponta e juntar 5 faces no primeiro cubo, não é? E depois ser mais complicado fazer 5 autocolantes no primeiro cubo, mais 4 no segundo, mais 4 no terceiro e por aí fora até ao último que será 5. E com esse tipo de pensamento será mais difícil deles chegarem à generalização e à regra.

Esta hipótese que a professora colocou veio a concretizar-se, na medida em que a maioria dos grupos que modelou a situação tal como ela fez na introdução da tarefa, conseguiu realizá-la com relativa facilidade e rapidez, o que a surpreendeu:

> E chegaram mais cedo do que eu estava a prever à construção da regra e isso achei que foi muito evidente, eles perceberam muito bem…aquilo que eu tinha algum receio no início, de visualizarem, de verem a constante dos dois autocolantes nas faces das pontas e eles…isso muitos grupos apreenderam logo.

Os grupos que seguiram outras estratégias necessitaram de maior apoio para conseguirem completar a tarefa, dado que a relação entre o número de cubos em cada construção e o respetivo número de autocolantes não é tão evidente. No *caso multimédia* ilustramos uma situação em que há divergências no grupo sobre a forma de contar os cubos e em que a professora tenta perceber como uma das alunas está a modelar a situação recorrendo aos cubos:

> Professora – Porque é que dizes isso? Explica lá isso melhor para eu e o Diogo percebermos...
>
> Rita – Tirámos este e depois colámos aqui para dar 4 cubos. Depois fizemos assim: 4, 8, 12, 16, 17 e 18. 4 vezes 5 menos 2.
>
> Professora – 4 vezes 5, porquê o 5?
>
> Rita – Porque 1, 2, 3, 4, 5…
>
> Diogo – Pois, mas assim estás a acrescentar 2 cubos. Assim, estás a dizer que está 2 cubos, um aqui e outro aqui.
>
> Professora – Como é que tu achas que deve ser?
>
> Diogo – Deve ser sempre menos 1…

Ainda assim, para todos os grupos, o material mostrou-se um recurso fundamental para pensarem sobre a sequência, para as primeiras construções, apoiando o seu raciocínio matemático. A professora incentivou e usou ela própria o material para pedir aos alunos que explicitassem as suas ideias e se focassem nas relações envolvidas. Por exemplo, um dos episódios retratados no *Caso multimédia* diz respeito a um grupo que não estava a conseguir chegar à generalização para a construção 52 cubos. A própria professora pega nos cubos que lhes tinha fornecido (que os alunos já tinham posto de parte) e coloca-os em primeiro plano

sobre a mesa destes, sugerindo-lhes que repensem a forma como estão a percecionar a sequência: "Agora com 52 [cubos]? Vamos lá pensar de outra forma".
Na fase de discussão da tarefa, depois de a professora ter selecionado as resoluções que considerou deverem ser discutidas, os grupos responsáveis apresentam-nas no retroprojetor com base no registo que fizeram num acetato. Nesse momento, o material manipulável foi usado, em algumas situações, por indicação da professora, como auxiliar para explicarem o seu raciocínio. Na situação seguinte, em que um aluno apresenta a resolução do grupo, apoia-se no desenho que fizeram dos cubos, mas os colegas não conseguem entender, pelo que a professora sugere que recorra ao material:

> João – Depois mostrámos aqui o cubo e depois fizemos 8 cubos vezes 4 lados vai dar 32…
>
> Menino – Isso não se percebe…
>
> Menina – Pois, isso está muito confuso.
>
> João – Eu explico melhor…pronto, são 8 cubos, certo? E nós representámos os 4 lados, frente, trás, cima e baixo.
>
> Professora – Se quiseres demonstrar, tens aí cubos para fazer. Diz lá o que queres dizer com isso.

O material manipulável que foi usado pelos alunos na exploração autónoma da tarefa é, nesta fase da aula, usado para apoiá-los a apresentarem *explicações mais claras e com evidência matemática*. A professora apenas sugere a utilização mas deixa à responsabilidade e critério dos alunos o modo como o integram nas suas explicações e justificações.

No momento de sistematização das aprendizagens, a professora já não recorre ao material manipulável, uma vez que a sua intenção é a formalização das relações matemáticas encontradas que, em princípio, terão ficado consolidadas com a sequência de apresentações dos grupos e respetiva discussão. Como refere, apoia-se numa tabela que projeta, recordando um termo distante da sequência, ou seja, usa: "uma tabela de sistematização onde eles vão expressar, partir de um exemplo, neste caso será dos 52 cubos, vamos ali num momento coletivo dizer como é que encontrámos o número de autocolantes para os 52 cubos e expressar depois essa generalização" (E1).

Reflexão sobre o papel dos recursos nas estratégias de resolução dos alunos

Uma componente muito importante da prática profissional do professor é a reflexão sobre a aula, aspeto com grande destaque no *caso multimédia* construído. Após a realização da aula, a professora reviu algumas das suas opções, em particular, o modo como introduziu a tarefa, apoiando-se na modelação da situação com o uso de cubos, conforme foi já descrito. O tempo dedicado a este momento da aula foi, na sua opinião, além do previsto, devido principalmente à ilustração da situação com o material, mas considera que este se revelou produtivo, pela forma como os alunos se apropriaram da tarefa, tendo em conta também a sua experiência anterior:

> Eu acho que a parte da apresentação da tarefa, apesar de eu dizer que foi muito tempo, contribuiu para que eles percebessem bem, isso acho que foi conseguido nesse sentido, eles perceberam bem do que se tratava e depois o percurso que eles fizeram ao longo do ano também ajudou a que chegassem àqueles resultados. (E2)

A forma intencional como modelou com os cubos a situação parece ter influenciado as estratégias de contagem de muitos alunos, o que é notado por Célia. Esse foi um aspeto questionado e ponderado:

> Pensei no risco de condicionar, mas pensei que apesar disso ia arriscar porque a tarefa era de facto complicada. A minha primeira ideia não era que eles chegassem à regra ou àquela regra explicada daquela forma, 4n+2, não era esse o objetivo, mas era importante que eles visualizassem esta questão da constante, porque era uma coisa que tinha sido pouco trabalhada até aqui nas sequências e foi uma opção. (E2)

A professora reafirma a sua convicção acerca da necessidade de garantir a apropriação da tarefa pelos alunos, ajudando-os a estabelecerem conexões com o que tinham trabalhado anteriormente neste tópico. O facto de alguns alunos terem percecionado a construção da sequência de uma forma diferente e de um grupo ter tido sucesso em formular a expressão geral seguindo uma estratégia diferente, dá-lhe a convicção de que a sua introdução da tarefa acabou por não condicionar a atividade dos alunos. Como refere: "Acho que acaba por não condicionar muito porque, de facto, apareceu um par que juntou os dois cubos das pontas, cinco mais cinco autocolantes e depois os quatro autocolantes no meio e isso não foi de forma nenhuma sugerido" (E2).

Para que os alunos não ficassem com a ideia de que esta seria a única forma de visualizarem a relação envolvida na situação, deu oportunidade a este grupo de apresentar a sua estratégia, reforçando várias vezes que esta era também uma forma adequada de representar a sequência. E, mais uma vez, a professora foi sugerindo que se apoiassem nos materiais manipuláveis (cubos) para explicarem as suas ideias e facilitarem a compreensão dos colegas.

A prática da professora e o caso multimédia

Procuramos agora ilustrar como são integrados, no *caso multimédia,* os aspetos analisados relativamente às ações e intenções da professora acerca do material manipulável que introduziu na aula, com o objetivo de ajudar os formandos, professores e futuros professores, a desenvolverem perspetivas fundamentadas sobre o ensino exploratório e, em particular, no que diz respeito ao uso de recursos didáticos. Organizamos estes aspetos de acordo com algumas das características indicadas por Brunvand (2010), conforme referimos atrás.

Estabelecer perspetivas e tarefas

Cada peça de material disponibilizado no *caso multimédia* (plano de aula, resoluções de alunos, excerto de vídeo ou de entrevista com a professora) é acompanhada de um conjunto de questões de modo a facilitar a sua análise por parte dos formandos. Deste modo, os professores podem focar-se nos conceitos que são realmente importantes e desenvolver a sua capacidade de análise da prática letiva. No exemplo que explorámos, a discussão do papel dos recursos na aula começa logo com a importância do plano para a própria professora, e como tal é também um objeto de análise para outros professores. Uma das questões em que se leva os professores a refletir diz respeito às intenções da professora ao introduzir os cubos, tendo em conta o propósito matemático da aula e o nível de escolaridade dos alunos. Os professores são levados também a analisar o modo como os alunos reagiram à tarefa e a antecipar possíveis estratégias tendo em conta a introdução que foi feita pela professora, aspetos que, como vimos, se cruzam com a utilização do material manipulável.

Indicações explícitas

Torna-se necessário fornecer aos professores algum tipo de informação de natureza mais teórica, como ferramentas para analisar a prática e os apoiar na reflexão que vão realizando. O

caso contém pequenos textos de sistematização de ideias, onde é abordado também o uso de recursos. Refere-se, por exemplo, a propósito da importância das representações, que estas "tanto podem ser proporcionadas por materiais manipuláveis, estruturados ou não, como por tecnologias digitais (…). O fundamental é que estes recursos ampliem a capacidade de compreensão dos alunos e apoiem o seu raciocínio matemático". Estes dois últimos aspetos estão bastante retratados na prática de Célia.

Gestão do processo

Tendo em conta que um dos objetivos principais do trabalho em torno do *caso multimédia* é a compreensão de como uma aula de ensino exploratório se desenrola em quatro grandes momentos, este foi organizado segundo essa sequência. A sequenciação de episódios de vídeo da aula permite perceber a forma como a professora integrou os recursos e como estes foram usados por si e pelos alunos em cada um desses momentos da aula. A flexibilidade com que o professor pode usar o caso, permite-lhe também, por exemplo, estabelecer, por ele próprio, relações entre a modelação efetuada pela professora na introdução da tarefa e as estratégias de resolução da tarefa pelos alunos, visionando diferentes momentos e episódios da aula e as resoluções de todos os grupos.

Os comentários da professora

Outra característica do *caso multimédia* é a integração de comentários da professora para análise. Do mesmo modo que num estudo de natureza interpretativa é fundamental ter acesso aos significados que os participantes atribuem às suas ações, também aqui é relevante os formandos terem acesso às intenções da professora, tal como as descrevemos acima. O conhecimento de tais intenções permite compreender aspetos importantes de uma aula exploratória. Por exemplo, qual é o objetivo do momento da discussão da tarefa? É possível perceber, pela análise do caso, que para a professora este não se destina apenas à apresentação da solução da tarefa mas à explicitação das estratégias e raciocínio matemático e, por esse motivo, a comunicação dos alunos apoiada no material faz todo o sentido enquanto que no momento de sistematização já não é apropriado.

A oportunidade de analisar as decisões e dúvidas do ponto de vista da professora visionada contribui para a compreensão da complexidade das situações que são retratadas mas, simultaneamente, para encará-las como manejáveis. Todas as razões e explicações que a professora Célia dá acerca da integração do recurso em causa permite compreender a complexidade de uma aula de ensino exploratório, mas permite também compreender que esta é realizável e pode ter sucesso.

Ferramentas de reflexão

Esta dimensão, a que é dado bastante destaque no caso multimédia, está presente na análise que apresentamos na discussão da professora sobre a influência da sua modelação da situação sobre as estratégias que os alunos desenvolveram. A reflexão da professora sobre as razões das suas opções e o reflexo destas no modo como decorreu a aula, levanta questões interessantes sobre o uso do material e a forma como pode limitar as possibilidades de representação das ideias matemáticas. No *caso multimédia* propomos aos professores que reflitam também sobre estes aspetos, com base na análise que eles próprios fizeram do caso.

A concluir

Ao contrário de uma visão que, por vezes, se encontra, de que a integração de recursos didáticos na sala de aula tem um carácter motivacional, tornando as aulas mais apelativas (Moyer, 2001), o recurso que aqui discutimos foi integrado pela professora como uma ferramenta para pensar sobre a situação, apoiar o raciocínio dos alunos e a comunicação matemática.

Dadas as previsíveis dificuldades ao interpretar a representação da situação proposta e o nível de abstração proposto na tarefa, a professora tem a noção de que não é simplesmente pelo facto de introduzir o material que os alunos podem torná-lo num recurso que ajude a concretizar as ideias matemáticas. De facto, os alunos podem construir ideias matemáticas a partir da sua representação no objeto, na medida em que possam relacioná-las com outras situações e ideias (Clements & McMillen, 1996), isto é, relacionando as novas ideias com o conhecimento que possuem (Moyer, 2001). O cuidado da professora na utilização do material manipulável tem também em conta a necessidade de estabelecer conexões com outras situações já trabalhadas.

A professora deu grande destaque à modelação da situação proposta, com recurso ao material, aspeto também valorizado por Kelly (2006), o que denota uma preocupação central com o garantir a apropriação da tarefa pelos alunos, assim como a sua adesão à tarefa. Numa aula de ensino exploratório, em que o envolvimento dos alunos é um objetivo importante, a antecipação e a monitorização do professor na aula são fundamentais para o sucesso das aprendizagens.

O *caso multimédia* que serve como pano de fundo a esta comunicação, retrata a prática da professora, a várias dimensões, possuindo características que poderão ajudar professores e futuros professores a reconhecer as potencialidades da utilização de recursos num ensino exploratório e a dar pistas sobre quando e como estes poderão ser utilizados.

Referências

APM (1998). *Matemática 2001: Diagnóstico e recomendações para o ensino e aprendizagem da Matemática*. Lisboa: APM.

Brunvand, S. (2010). Best practices for producing video content for teacher education. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, *10*(2), 247-256.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática, 115*, 11-17.

Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da Matemática: O caso de Célia. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática – Práticas de ensino da Matemática*, 2012.

Clements, D. H., & McMillen, S. (1996). Rethinking concrete manipulatives. *Teaching Children Mathematics*, *2*(5), 270-279.

Cobb, P., Zhao, Q., & Dean, C. (2009). Conducting design experiments to support teachers' learning: A reflection from the field. *The Journal of the Learning Sciences, 18*, 165–199.

Kelly, C. (2006). Using manipulatives in mathematical problem solving: a performance- based analysis. *TMME, 3*(2), 184-193.

MacGraw, R., Lynch, K., Koc, Y., Budak, A., & Brown, C. (2007). The multimedia case as a tool for professional development: an analysis of online and face-to-face interaction among mathematics pre-service teachers, in-service teachers, mathematicians, and mathematics teacher educators. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*, 95-121.

Matos, J. & Serrazina, L. (1996). *Didáctica da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Mosquito, E. (2008). *Práticas lectivas dos professores de matemática do 3º ciclo do ensino básico* (tese de mestrado). Universidade de Lisboa.

Moyer, P. (2001). Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 47*, 175–197.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Post, T. (1981). The role of manipulative materials in the learning of mathematical concepts. In *Selected Issues in Mathematics Education* (pp. 109-131). Berkeley, CA: NSSE and NCTM, McCutchan Publishing Corporation.

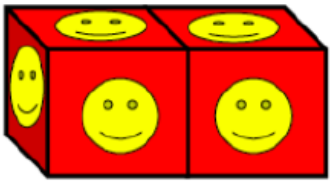
Silva, M. (2009). *Práticas pedagógicas dos professores do 1.º ciclo do ensino básico na área disciplinar de matemática* (tese de mestrado). Universidade de Lisboa.

Anexo[3]

Tarefas "Cubos com autocolantes"

A Joana está a construir um jogo com cubos e autocolantes. Ela une os cubos por uma das faces e forma filas de cubos. Depois cola um autocolante em cada uma das faces.

A imagem mostra a construção que a Joana fez com 2 cubos. Nessa construção ela usou 10 autocolantes.



1. Descobre quantos autocolantes a Joana usa numa construção com:

   1.1. Três cubos.

   1.2. Quatro cubos.

   1.3. Dez cubos.

   1.4. Cinquenta e dois cubos.

2. Consegues descobrir qual é a regra que permite saber quantos autocolantes a Joana usa numa construção com um qualquer número de cubos? Explica como pensaste.

[3] Tarefa adaptada de Moss, J., Beaty, R., McNab, S. L., & Eisenband, J. (2005). *The potential of geometric sequences to foster young students' ability to generalize in Mathematics.* http://www.brookings.edu/gs/brown/algebraicreasoning.htm

OS RECURSOS INTERATIVOS QUE ACOMPANHAM OS MANUAIS DE MATEMÁTICA

Paula Cristina Teixeira
Escola Secundária João de Barros
teixeirapca@gmail.com

José Manuel Matos
Unidade de Investigação e Desenvolvimento da Universidade Nova de Lisboa
jmm@fct.unl.pt

Resumo: Neste poster são apresentados alguns resultados de uma investigação focada nos recursos interativos de apoio aos manuais escolares de matemática. Numa primeira fase estes recursos foram distribuídos em CD-ROM e evoluíram no ano letivo 2010/2011 para plataformas disponíveis nos endereços eletrónicos das editoras dos manuais. A utilização que os professores fazem destes recursos reveste-se de particular interesse porque envolve diferentes transformações do currículo.

Palavras-chave: Professores, recursos interativos, manuais escolares

Os manuais de matemática são atualmente acompanhados de recursos eletrónicos disponibilizados em plataformas e CD-ROM. Naturalmente aceita-se que o manual desempenha um papel importante na preparação das aulas. Não será forçado afirmar que é possivelmente o recurso mais utilizado pelos professores. A utilização que os professores fazem do manual é determinante na passagem do currículo apresentado ao modelado pelos professores (Gimeno, 1998). Ainda, nos níveis de intervenção sobre o currículo definidos por Gimeno a passagem do currículo prescrito ao modelado pelos professores na seleção e conceção de tarefas não acontece por decreto. A investigação tem revelado que a integração das novas tecnologias nas aulas tem sido acompanhada por processos de resistência internos e externos associados à atividade dos professores, apesar das recomendações preconizadas nos programas de matemática do ensino básico e secundário.

Os estudos de Abboud-Blanchard e Lagrange (2006) têm mostrado que existem duas dimensões na forma como os professores utilizam a tecnologia: a dimensão pessoal e a dimensão profissional. A *dimensão pessoal* resulta na preocupação dos professores com a atividade com as tecnologias no contexto de uso pessoal, bem como no contexto da preparação de aulas. A *dimensão profissional* da utilização que os professores fazem da tecnologia inclui também uma dupla dimensão: a apropriação pessoal do *software* e uma apropriação para fins de ensino. Um artefacto complexo como a folha de cálculo ou um *software* de geometria dinâmica, não é constituído diretamente num instrumento utilizado com os alunos (Rabardel, 1995).
Stein (2007) defende que interessa perceber que recursos conseguem influenciar os professores e, consequentemente, os processos pelos quais os professores usam interpretam e transformam o currículo. Quais os determinantes que influenciam a transformação? Que condições e contextos podem ter impacto nesses processos de transformação?

O enquadramento teórico da nossa investigação resulta da definição de fatores que influenciam a passagem das fases do currículo prescrito para o currículo de intenções e a seguir para o currículo em ação de Stein (2007), dos desenvolvimentos da teoria da atividade para fundamentar a génese da utilização que os professores fazem da tecnologia (Lagrange *et al*, 2009) e da abordagem instrumental de Rabardel (1995). As questões de investigação são:

Como estão os professores a integrar os recursos interativos de apoio aos manuais escolares nos planos das suas aulas de matemática? Quais os fatores que influenciam os professores de matemática na forma como integram e utilizam os recursos interativos de apoio aos manuais escolares?

A recolha de dados foi realizada em oficinas de formação que envolveram cerca de 60 professores do ensino básico e secundário e que decorreram entre 2009 e 2011. O objetivo principal das oficinas foi a exploração destes recursos e a sua utilização numa aula ou numa sequência de aulas. A análise dos dados envolveu: a análise das tarefas que os professores prepararam; conversas informais com os professores durante todo o processo; a análise das suas reflexões sobre as aulas e sobre os materiais interativos que utilizaram; a observação de aulas de alguns professores das oficinas (ainda a decorrer).

No poster são apresentadas algumas das tarefas que os professores prepararam envolvendo os recursos interativos que acompanham os manuais, assim como as suas reflexões sobre a sua atividade desenvolvida com os alunos. Será ainda apresentado um primeiro esboço dos fatores que parecem influenciar os professores, que estiveram envolvidos nas oficinas, na passagem das fases do currículo prescrito para o currículo de intenções e a seguir para o currículo em ação.

Referências

Abboud-Blanchard, M. & Lagrange, J. B. (2006) Uses of ICT by pre service teachers: towards a professional instrumentation? *International Journal for Technology in Mathematics Education*, *13*(4), 183-190.

Gimeno-Sacristán, J. (1998). *O Currículo: Uma reflexão sobre a prátic*a. Porto Alegre: Artmed.

Lagrange, J. B., Abboud-Blanchard, M., Loisy, C. & Vandebrouck, F. (2009). *Genèses d'usages professionnels des technologies chez les enseignants*, Raport final. [Acedido em http://gupten.free.fr/g-rapres.htm].

Rabardel, P. (1995). *Les homes et les technologies - Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: A. Colin.

Stein, M., Remillard J. & Smith, M. (2007). How curriculum influences student learning. In Frank, K., Lester, Jr. (Eds), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Larning* (pp. 319-369). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

"E SE UM ALUNO SEGUE UM CAMINHO QUE EU NÃO COMPREENDO?" — GERIR O TRABALHO INVESTIGATIVO NA AULA DE MATEMÁTICA

Manuel Vara Pires
Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Bragança
mvp@ipb.pt

Resumo: O poster descreve uma experiência letiva de uma professora participante no Programa de Formação Contínua em Matemática, com o propósito principal de conhecer como os professores integram as investigações no desenvolvimento do currículo e como refletem sobre as suas práticas.

A dinâmica da formação ajudou a professora a atribuir um maior valor curricular às investigações, a integrá-las na sala de aula e a compreender que esta utilização acarreta novos desafios e exige mudanças na gestão do seu trabalho e do trabalho dos seus alunos.

Palavras-chave: Tarefas, Investigações matemáticas, Práticas de ensino, Conhecimento profissional

Investigações

A dinâmica da aula de matemática é fortemente influenciada pelas tarefas propostas, dado que podem permitir diferentes formas de *entender* ou *fazer* matemática. As investigações aparecem como expressões do trabalho de natureza não rotineira, referindo-se a processos matemáticos complexos, e podem ser vistas como uma atividade divergente em que se incentiva a procurar estratégias alternativas ou a generalizar uma situação. Uma situação pode ter as características de uma investigação (Ponte, Oliveira, Cunha & Segurado, 1998), mas a sua exploração na sala de aula distorcer, na prática, essas características. Por isso, o papel do professor na organização e gestão da sala de aula é determinante, de modo a conduzir os alunos a conjeturar, a explorar exemplos e contraexemplos, a justificar as conjeturas apoiando-se em argumentos matemáticos ou a esforçar-se por compreender a argumentação dos outros (Boavida, 2005).

O estudo

A experiência corresponde ao ciclo letivo (planificação, condução da aula, reflexão) de uma aula de uma professora numa turma de 25 alunos do 5.º ano. O estudo (Pires, 2011) segue uma abordagem de natureza qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994). A recolha de dados suportou-se em transcrições de episódios de sessões de formação e da aula, em produções escritas da professora relativas à aula analisada e posterior reflexão, em produções escritas feitas pelos alunos na resolução das tarefas, e em notas de campo registadas pelo autor na sala de aula (como observador participante) e nas sessões de reflexão. A análise dos dados envolveu uma aproximação *flutuante* e continuou com uma cada vez maior sistematização, com estabelecimento de classificações e categorias, envolvendo negociação de significados com os participantes.

Conclusões

As principais preocupações da professora ao preparar a aula centraram-se na procura e antecipação das conjeturas que os alunos poderiam formular muito devidas à imprevisibilidade e diversidade dos caminhos a seguir e consequente possibilidade de não poder orientar apropriadamente as descobertas dos alunos.

A professora também se confrontou com desafios na gestão da sala de aula, desde logo com a apresentação da tarefa aos alunos, mas especialmente em aspetos relacionados com os processos de procura, validação e discussão das conjeturas e de sistematização do conhecimento matemático envolvido.

Após a aula, a professora destacou a maior relevância que passou a atribuir às tarefas de investigação nas suas práticas e no desenvolvimento do currículo. Reconheceu vantagens da sua integração na abordagem dos temas matemáticos, embora prevendo eventuais complicações na gestão do tempo para a tarefa. Considerou que o caráter divergente das investigações ajudou os alunos, em especial os que revelaram mais dificuldades, por permitir processos baseados nos seus conhecimentos anteriores e com mais significado para eles. Realçou que a dinâmica do programa de formação a ajudou a integrar as investigações na sala de aula e a ultrapassar melhor as dificuldades nas diversas fases do ciclo letivo.

Referências

Boavida, A. M. (2005). A argumentação na aula de matemática: Olhares sobre o trabalho do professor. Em J. Brocardo, F. Mendes & A. Boavida (Orgs.), *XVI SIEM – Atas* (pp. 13-43). Setúbal: APM.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Porto: Porto Editora.

Pires, M. V. (2011). Tarefas de investigação na sala de aula de matemática: Práticas de uma professora de matemática. *Quadrante*, *XX*(1), pp. 31-53.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha, H., & Segurado, I. (1998). *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: IIE.

A COMPLEXIDADE DO PENSAMENTO MATEMÁTICO E A QUALIDADE DAS APRENDIZAGENS: TAREFAS MATEMÁTICAS

Fernando Luís Santos
ESE Jean Piaget de Almada
fsantos@almada.ipiaget.org

António Domingos
Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNL, UIED
amdd@fct.unl.pt

Resumo: O objetivo é descrever e analisar as respostas a tarefas matemáticas de dois grupos de alunos de formação inicial de professores e a qualidade das aprendizagens relacionadas com a complexidade do pensamento matemático com base nos níveis do modelo SOLO. Enquadrados nas teorias de David Tall sobre o PMA e sobre os três mundos da matemática e utilizando o modelo SOLO para a identificação das categorias procedeu-se à análise de conteúdo às respostas dos alunos a duas tarefas matemáticas distintas.

Palavras-chave: Complexidade do pensamento matemático, pensamento matemático avançado, modelo SOLO, currículo, formação inicial de professores.

Introdução

Com o modelo SOLO (Biggs & Collis, 1982), utiliza-se uma ferramenta que fomenta a compreensão e posterior interpretação do conhecimento matemático dos alunos bem como a sua natureza, permitindo direcionar melhor o processo de ensino.

Aprender matemática significa participar em diferentes tipos de práticas matemáticas. Uma forma de explicar as variações entre cada prática pode ser vista através de definições de Tall (2002) sobre o pensamento matemático avançado (PMA) e o pensamento matemático elementar (PME).

Defende-se que o currículo de matemática na formação inicial de professores de ensino básico forneça uma matriz matemática forte e flexível o suficiente para capacitar os futuros professores a manipular e criar as condições para que os alunos aprendam matemática com base em três dimensões: identificar conteúdos relevantes, compreender como o conhecimento deve ser aprendido e o que é necessário para ensinar os conceitos matemáticos.

Este estudo exploratório passa pelas seguintes questões:

-Será o modelo SOLO útil para aferir as respostas dos alunos tendo como pano de fundo a qualidade das aprendizagens matemáticas?

-De que forma é que o modelo promove uma melhoria das práticas do professor tendo por base as respostas dos alunos?

Metodologia

Trata-se de um estudo exploratório elaborado com 2 grupos de alunos de um curso de 1.º ciclo de Educação Básica. Foram propostas 2 tarefas (em anexo) e foi feita uma análise de conteúdo às respostas dos alunos, tendo como categorias os 5 níveis da taxonomia SOLO.

Depois dos conteúdos terem sido ensinados (Teoria de Conjuntos e Geometria), foram realizadas as tarefas sob a forma de trabalho de investigação. Após a análise de conteúdo das respostas dadas foi possível categorizá-las nos níveis SOLO. Apresentamos a tabela 1 com os valores de frequência absoluta de contagem de cada categoria:

Tabela 1. Frequências absolutas das contagens por tarefa e por nível SOLO

	Tarefa 1	Tarefa 2
Pré-estrutural	1	32
Uni-estrutural	15	32
Multi-estrutural	29	34
Relacional	2	16
Abstrato	0	2

Discussão

Na tarefa 1 (Anexo 1) só foram analisadas as contagens codificadas das últimas duas questões dos 13 trabalhos apresentados (trabalho de grupo, totalizando 42 alunos) onde seria expectável que as respostas se centrassem nos níveis Multi-estrutural e Relacional. As respostas estão em sintonia com o que era pedido. Assim, a análise de conteúdo das respostas permite concluir que a tarefa avalia o que era expectável.

Na tarefa 2 (Anexo 2), ao contrário do que seria expectável (a maioria das respostas dos trabalhos individuais dos 40 alunos se centrarem nos níveis Relacional e Abstrato) assiste-se a uma concentração de respostas nos níveis mais baixos, não estando em sintonia com o que era pedido. Assim, a análise de conteúdo permite concluir, que na tarefa, a qualidade matemática das respostas ficou aquém do expectável, tendo em conta a pergunta colocada.

Da análise às tarefas, este estudo exploratório sugere que:

-O modelo SOLO é útil para aferir a qualidade das aprendizagens matemáticas dos alunos tendo em conta as tarefas propostas.

-O modelo permite ao professor alterar as suas práticas tendo em conta as expectativas iniciais e o nível das respostas.

Conclusão

Este estudo exploratório permite avançar com pistas que podem servir de etapas para outras experimentações tendo sempre em mente que:

- A taxonomia SOLO permite avaliar o desempenho num determinado momento, evitando generalizações e ilações sobre as estruturas cognitivas dos alunos.
- O modelo SOLO promove um enquadramento que permite uma interpretação consistente da estrutura e da qualidade das respostas dos alunos em vários ambientes de aprendizagem, em vários tópicos e em várias áreas.
- A utilização do modelo SOLO permite alterar as práticas do professor de um modo sustentado na qualidade do pensamento matemático dos alunos.

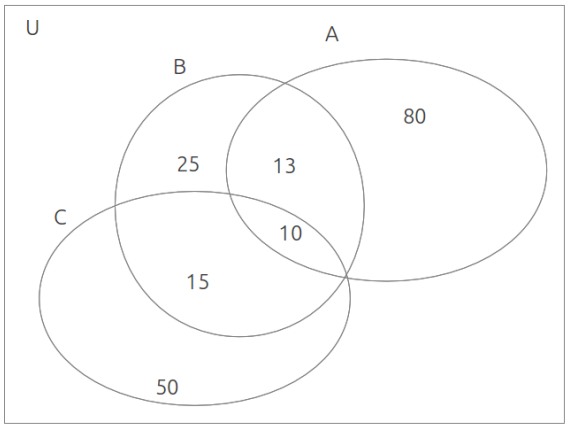
Referências

Biggs, J., & Collis, K. (1982). *Evaluating the quality of learning*. London: Academic Press.

Tall, D. (Ed.). (2002). *Advanced Mathematical Thinking*. New York: Kluwer Academic Publishers.

ANEXO 1. Tarefa 1

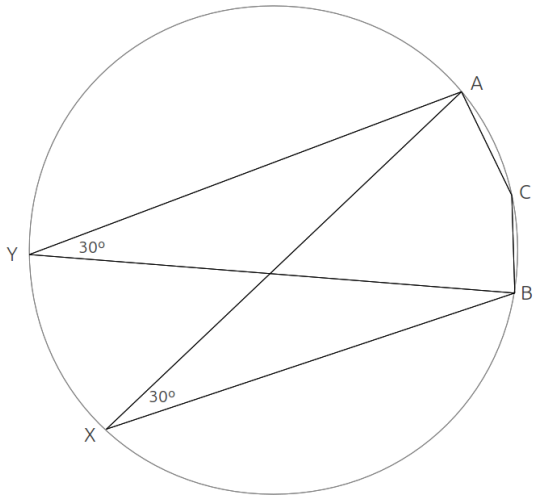
Seja:
U o conjunto dos alunos de uma escola; A o conjuntos dos Almeida; B o conjunto dos Batista e C o conjunto dos Castro.
(Os números representam o número de elementos de cada parcela)



1. Quantos Almeida há na escola?
2. Quantos alunos há na escola com os 3 nomes citados?
3. Quantos alunos há na escola que têm o nome Batista, mas não são Almeida nem Castro?
4. Se na escola há 2000 alunos, quantos deles não têm nenhum dos nomes citados?

ANEXO 2. Tarefa 2

Explique, com base em pesquisa, o porquê dos ângulos apresentados terem a mesma amplitude.



TAREFAS NA E PARA A FORMAÇÃO MATEMÁTICA DE PROFESSORES – ALGUMAS ESPECIFICIDADES

C. Miguel Ribeiro
Centro de Investigação sobre o Espaço e as Organizações (CIEO), Universidade do Algarve, ESE de Lisboa
cmribeiro@ualg.pt

Arne Jakobsen
Departamento de Educação, Universidade de Stavanger (Noruega)
arne.jakobsen@uis.no

Resumo: O conhecimento que detemos sobre os distintos tópicos matemáticos, as tarefas que preparamos e o modo como as implementamos influem, de forma direta, as aprendizagens dos alunos. Aqui, discutiremos a conceptualização de um tipo de tarefas para a formação de professores e a sua especificidade associada ao desenvolvimento do conhecimento matemático do conteúdo dos (futuros) professores e que se relaciona intrinsecamente com as denominadas *tasks of teaching* (Ball, Thames & Phelps, 2008).

Palavras-chave: Formação de professores; natureza das tarefas; conhecimento matemático para ensinar; objetivos.

A natureza das tarefas (Ponte, 2005) que preparamos, e a(s) forma(s) como estas são implementadas na sala de aula (Stein *et al*., 2000) estão intrinsecamente relacionadas com os objetivos matemáticos que perseguimos e o conhecimento que detemos (ou assumimos deter) relativamente a cada um dos tópicos matemáticos. É fulcral um amplo e sólido conhecimento profissional, nas suas mais diversas dimensões, almejando um ensino com e para a compreensão dos tópicos, fundamentado na exploração e implementação de tarefas matematicamente desafiadoras. Este conhecimento contempla, neste trabalho, somente aspetos relacionados com a especificidade do conteúdo a abordar, assumindo a perspetiva do *mathematical knowledge for teaching* (MKT) (Ball *et al*., 2008).

Enquanto professores, e apenas quanto ao conhecimento do conteúdo, para além de um conhecimento que nos permita saber para nós próprios (do ponto de vista do utilizador), necessitamos, entre outros, de um conhecimento que nos faça entender os porquês associados a cada um dos tópicos matemáticos, e a(s) possível(eis) forma(s) como eles se podem relacionar e evoluir ao longo da escolaridade, e interpretar e dar significado às resoluções dos alunos. Considerando que este MKT pode ser ensinado (Hill & Ball, 2004), as tarefas que preparamos, enquanto formadores de professores, e como as implementamos, assumem um papel de extrema relevância na promoção desse conhecimento. É, assim, essencial que os (futuros) professores sejam confrontados com oportunidades de desenvolver o seu conhecimento de forma mais ampla do que apenas conhecerem os conteúdos para si. As tarefas preparadas e implementadas na formação de professores exteriorizam (devem exteriorizar) uma responsabilidade de explorar, concomitantemente, possíveis situações críticas em termos de MKT, o que possibilitará transpor esse conhecimento matemático para ensinar para a sua zona de conforto. Pela natureza do contexto, as tarefas conceptualizadas na e para a formação terão de possuir, necessariamente, especificidades próprias, que vão além de uma maior dificuldade quanto ao conhecimento matemático comum (no sentido de Ball *et al*., 2008), quando comparadas com as tarefas propostas aos alunos e com o conhecimento matemático que se pretende que estes desenvolvam. Estas tarefas partem de tarefas para os

alunos do 1.º e 2.º ciclos e são, posteriormente, adequadas à especificidade da formação de professores, recorrendo a, entre outros: resoluções de alunos desses ciclos e aspetos identificados na literatura como sendo problemáticos tanto para alunos como para (futuros) professores (na perspetiva do MKT).

Iremos apresentar uma primeira aproximação à conceptualização de um tipo de tarefas que, pela sua natureza e foco, se encontra associado a algumas das especificidades da prática docente. Este tipo de tarefas possibilita concretamente o desenvolvimento do conhecimento matemático do conteúdo dos (futuros) professores, relacionando-se, de forma intrínseca e explícita, com as *tasks of teaching* (Ball *et al*., 2008). Este trabalho, que se encontra, ainda, numa fase embrionária, tem por objetivo desenvolver um conjunto de tarefas especificamente orientadas para a formação de professores. Espera-se que as tarefas contribuam para um incremento do conhecimento matemático do professor para ensinar.

Agradecimentos:

Este poster foi parcialmente financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia. Este trabalho forma parte do projeto "Conocimiento matemático para la enseñanza respecto a la resolución de problemas y el razonamiento" (EDU2009-09789), Dirección General de Investigación y Gestión del Plan Nacional de I+D+i. Ministerio de Ciencia e Innovación (Espanha). O segundo autor agradece à Norwegian Oil Industry Association pelo apoio facultado.

Referências

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Hill, H. C., & Ball, D. L. (2004). Learning mathematics for teaching: Results from California's mathematics professional development institutes. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(5), 330-351.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O Professor e o Desenvolvimento Curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: a Casebook for Professional Development*. New York: Teachers College Press.

BLOCOS PADRONIZADOS: CONTRIBUIÇÃO PARA UMA ATITUDE DE REFLEXÃO PERANTE ESCOLHAS PEDAGÓGICAS

Conceição Costa
Escola Superior de Educação de Coimbra / UIED FCT UNL
ccosta@esec.pt

Regina Kopke
Universidade Federal de Juiz de Fora / UIED FCT UNL
regina.kopke@ufjf.edu.br

Resumo: Tentamos desenvolver uma formação adequada de professores e futuros professores para a educação matemática com integração de tecnologia. Abraçamos a visão de ensino e aprendizagem onde esta é uma atividade social enraizada em formas culturais de pensamento e de ser (Radford, 2008). Examinamos atividades de professores e futuros professores com *blocos padronizados* a: identificar possíveis compreensões matemáticas dos alunos e planificar ensino. Serão analisados produções e obstáculos.

Palavras-chave: blocos-padronizados; mediação-semiótica; conhecimento-conteúdo-pedagógico-tecnológico; pesquisa-ação

Esta pesquisa quer aprofundar e examinar o conhecimento necessário para ensino e aprendizagem da matemática com uso apropriado de tecnologia. Mishra & Koehler (citados em Fuglestad, 2011) identificaram o termo *conhecimento do conteúdo pedagógico e tecnológico*. O examinar a educação dos professores, o estudar se as actividades influenciam a aprendizagem dos estudantes, faz ter de distinguir o que é que os professores podiam estar ou podiam não estar a fazer e correlacionar isto com as produções dos alunos. As seguintes questões de pesquisa foram identificadas: 1. Que especificidade deve ter o ensino com integração de tecnologia que fundamente as escolhas de: matemática, didáctica da matemática e pedagogia da matemática? 2. Que diferenças naquela especificidade quando tratamos da educação matemática de professores em serviço e de alunos de formação inicial?

Começamos por conduzir uma pesquisa-ação *piloto* usando os manipulativos computadorizados "Pattern Blocks" (blocos-padronizados) cuja principal intenção é compreender que situações de aprendizagem são criadas pelos professores/futuros professores e como são imaginadas para serem usadas. Aquele software é um recurso educacional aberto, construído para uma pesquisa baseada no desenvolvimento de materiais do Pré-escolar ao 2º ano do Ensino Básico (Clements, 2008). Oferecemos então a professores do 1º ciclo (formandos do Programa de Formação Contínua em Matemática-PFCM, 2010-11) *um workshop* (2 horas) no Seminário do PFCM cujo conteúdo foi dominado por: familiarização com aquele software, onde foram sugeridas tarefas que apoiavam atividades com puzzles para a composição geométrica; reflexão sobre a avaliação daquele artefacto no ensino/aprendizagem da matemática; e o esboço de uma planificação de aula para os alunos que integrasse aquele software no currículo do Programa de Matemática do Ensino Básico-PMEB. Mais tarde, numa aula (2 horas), estudantes da Escola Superior de Educação de Coimbra-ESEC do 3º ano da Licenciatura em Ensino Básico trabalharam na disciplina relacionada com integração de tecnologia na educação matemática, com *o mesmo* conteúdo do workshop. Algumas das tarefas escolhidas são a adequação de outras pertencentes a uma trajetória de aprendizagem para composição da forma, para os primeiros anos de ensino básico que integrava Pattern Blocks virtuais (Clements, 2008). Uma das autoras deste trabalho

concebeu e conduziu o workshop e foi a professora dos estudantes e a outra atuou como observadora em ambos os ambientes.

Neste poster apresentaremos exemplos de produções dos participantes acima referidos, reflexões sobre estas e sobre suas opções pedagógicas relativas a duas tarefas que envolvem dois processos do artefato: instrumentalização (reconhecimento progressivo das suas potencialidades e limitações) e instrumentação (desenvolvimento de esquemas de utilização) (Bussi & Mariotti, 2008).

Referências

Bussi, B. & Mariotti, A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: artifacts and signs after a Vygotskian perspective. In L. English *et al*. (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, (pp. 746-805). New York, USA: Routledge.

Clements, D. (2008). Linking research and curriculum development. In L. English *et al*. (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, (pp. 589-625). New York, USA: Routledge.

Fuglestad, A. (2011). Challenges teachers face with integrating ICT with an inquiry approach in mathematics. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2328-2338). Rzeszów, Poland: CERME. [Acedido em http://www.erme.unito.it/doc/cerme7/cerm7.pdf].

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing: Toward a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring & F. Seeger (Eds.), *Semiotics in mathematics education: epistemology, history, classroom and culture* (pp. 215-234). Rotterdam, Netherlands: Sense Publishers.

MODELAÇÃO MATEMÁTICA COMO AMBIENTE DE APRENDIZAGEM: UMA PRIMEIRA APROXIMAÇÃO NO 1.º CICLO

Fernando Martins[1,2], Marta Vieira[1], Diogo Reis[1], C. Miguel Ribeiro[3]
[1]Escola Superior de Educação de Coimbra
[2]Instituto de Telecomunicações (Covilhã), RoboCorp (ISEC)
[3]Centro de Investigação sobre o Espaço e as Organizações, Universidade do Algarve, Escola Superior de Educação de Lisboa
fmlmartins@esec.pt; mcdvieira@esec.pt; di_traves@hotmail.com; cmribeiro@ualg.pt

Resumo: A modelação matemática como ambiente de aprendizagem é uma abordagem que potencia a problematização e investigação matemática, baseada em situações com referência na realidade. Tendo por base um trabalho desenvolvido na formação de professores apresentamos alguns resultados preliminares que relacionam a aplicação desta metodologia com o conhecimento dos futuros professores, e que nos permitem perspetivar as suas potencialidades para a prática (aprendizagens matemáticas) e para a formação.

Palavras-chave: Modelação matemática; formação de professores; práticas de sala de aula.

Nas últimas duas décadas, a modelação matemática como ambiente de aprendizagem tem assumido particular relevância (e.g., Barbosa, 2001). Ao ser considerada como uma metodologia que se fundamenta na conjugação da resolução de problemas com referência na realidade envolvente onde os alunos assumem um papel de relevo na enunciação de tais situações, e na busca da(s) sua(s) solução(ões), encaramo-la como uma das formas de potenciar a aprendizagem matemática, em que os alunos participam ativamente no processo de construção do seu conhecimento e são também (co)responsáveis pelo conhecimento do grupo.

Esta é uma metodologia onde o rumo a tomar pode ser diverso. Uma sua plena implementação, pondo em jogo todas as suas potencialidades, apenas se tornará efetiva (em termos das aprendizagens dos alunos) se o professor se sentir, efetivamente, à-vontade tanto com a metodologia como no que concerne aos temas matemáticos e suas conexões. Para a promoção deste à-vontade é fulcral que os professores (atuais ou futuros) vão adquirindo uma visão mais ampla sobre a sua utilização de modo a poderem decidir, autonomamente, a sua incorporação na prática (e.g., Ferri, 2010), sendo, nesse sentido, fundamental que a experienciem enquanto formandos, de modo a que possam assumir as situações como suas e se possam apropriar das discussões (Tichá & Hošpesová, 2006). A implementação desta prática, pela maior imprevisibilidade, poderá, mais facilmente, colocar o professor em situações de contingência (no sentido de Rowland, Huckstep e Thwaites, 2005), que se revelam uma das suas desvantagens (Jurkiewicz & Friedman, 2010), assumindo o conhecimento do professor um papel preponderante na minimização dessas situações e na potenciação das aprendizagens dos alunos. Este conhecimento é, aqui, encarado na perspetiva do *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) (e.g., Ball, Thames e Phelps, 2008).

Neste poster temos por objetivo efetuar uma primeira abordagem às potencialidades da implementação deste tipo de abordagem na formação de professores, relacionando essas potencialidades com o MKT do (futuro) professor, e o à-vontade que assume possuir em relação aos distintos tópicos matemáticos. Com esse intuito apresentaremos alguns dos primeiros resultados referentes a um estudo exploratório desenvolvido no âmbito de um mestrado profissionalizante. Esses resultados ilustram, por um lado, a influência do conhecimento do professor na implementação da modelação matemática como ambiente de

aprendizagem e nas oportunidades de aprender facultadas aos alunos e, por outro, algumas potencialidades da discussão da sua implementação e reflexão associada (na primeira pessoa), na formação de professores – tendo por fim último melhorar a prática letiva e as aprendizagens dos alunos.

Agradecimentos:

Este artigo foi parcialmente financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia e pelo Instituto de Telecomunicações (Covilhã).

Este trabalho forma parte do projeto "Conocimiento matemático para la enseñanza respecto a la resolución de problemas y el razonamiento" (EDU2009-09789), Dirección General de Investigación y Gestión del Plan Nacional de I+D+i. Ministerio de Ciencia e Innovación (Espanha).

Referências

Ball, D. L., Thames, M. H. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Barbosa, J. (2001). Modelagem na educação matemática: contribuições para o debate teórico. *Anais da 24ª Reunião da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação*. Rio de Janeiro: ANPED. [Disponível em http://www.uefs.br/nupemm/anped2001.pdf. Acedido em 14/04/2012].

Ferri, R. (2010). Estabelecendo conexões com a vida real na prática da aula de Matemática. *Educação e Matemática*, 110, 19-25.

Jurkiewicz, S., & Friedman, C. (2010). Modelagem matemática na escola e na formação do professor – uma abordagem abrangente. *Educação e Matemática*, *106*, 43-47.

Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*, 255-281.

Tichá, M., & Hošpesová, A. (2006). Qualified pedagogical reflection as a way to improve mathematics education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*, 129-156.