

# Pavimentações com o Geometer's Sketchpad – Um estudo no 10.º ano de escolaridade

António Domingos e Maria João Mendes Vieira

Este artigo pretende dar conta dos principais resultados da aplicação das tarefas apresentadas no número anterior da Revista, nesta mesma secção. Pretende-se analisar o impacto que o Geometer's Sketchpad (GSP) tem na aprendizagem da Geometria, quando associado à demonstração de propriedades algébricas e geométricas relativas às pavimentações.

Procura-se compreender de que forma um ambiente de geometria dinâmica como o GSP influencia o estudo das pavimentações regulares e semi regulares, nomeadamente que tipo de aprendizagens estão associadas ao estudo das pavimentações, que conhecimentos os alunos mobilizam para a construção de pavimentações e de que forma a utilização do GSP desencadeia a necessidade de validação das conjeturas e demonstração (no contexto das propriedades das pavimentações).

Trata-se de um estudo de natureza qualitativa (Vieira, 2012) baseado na realização de tarefas no contexto de aula e que recorre a estudos de caso. Foram analisadas em particular as respostas às tarefas propostas, realizadas por três grupos de alunos (A, B e C) de uma turma do 10.º ano de escolaridade de um curso profissional (técnico de Design Gráfico). Os alunos manifestaram algumas dificuldades no cumprimento das tarefas, em especial na compreensão do papel da demonstração. Apenas um grupo reconheceu a importância das funções de validação e explicação. A maior parte revelou dificuldade em formular conjeturas e manipular resultados algébricos.

## Aprendizagens associadas ao estudo das pavimentações com GSP

Todos os grupos em estudo conseguiram construir as pavimentações que lhes foram propostas nas tarefas, facilitados pelo uso do GSP. Desta forma, restou mais tempo para analisar as propriedades e focalizar o estudo em algumas propriedades algébricas referentes às pavimentações embora nalguns casos tenham sido as propriedades geométricas, o foco dessas aprendizagens. O fato de os alunos manipularem as construções permitiu a exploração de resultados e da procura de propriedades quando distinguem o que «mexe» e o que permanece invariante.

O nível de conhecimento dos alunos foi determinante para a concretização das tarefas propostas (Whiteley, 2000) uma vez que os alunos que compreendem bem a noção de rotação e translação, realizam as tarefas com facilidade enquanto os que não dominam bem os conhecimentos, demoram mais tempo em explorações e

consequentemente a realizar as tarefas. Um dos grupos (Grupo A) domina bem os conhecimentos que têm apreendido sobre isometrias mobilizando-os na realização das tarefas e por isso concretizam-nas com sucesso, antes dos restantes grupos, e têm mais tempo disponível para responder às questões que são colocadas. Recorrem igualmente aos conhecimentos relativos às propriedades dos polígonos, no que respeita aos ângulos, para concretizar as tarefas e encaram-nos como tarefa rotineira, construindo e explicando relações geométricas (Jones, 2005).

As alunas dos restantes grupos não tinham os conhecimentos consolidados no que diz respeito ao estudo das isometrias e portanto revelaram dificuldades na sua aplicação na construção das pavimentações solicitadas. Neste caso, a utilização do GSP permitiu, através da exploração, a consolidação destes conceitos sendo que com o decorrer do tempo estes conhecimentos iam sendo aplicados sem qualquer dificuldade indo de encontro ao que diz Abrantes (1997), o AGD serviu de suporte para que estas alunas se apropriassem de processos fundamentais no que diz respeito a estes [isometrias] conceitos geométricos.

O Grupo A, manipula as figuras e testa as conjeturas que vão elaborando sucessivamente, sem se aperceberem disso, apenas por manipulação dos sketches e portanto, por vezes, torna-se difícil distinguir entre o processo de elaboração de conjetura e o processo de teste da conjetura. Estes dois alunos manipulam as figuras que construíram, fazem medições, procuram regularidades e formulam conjeturas testando-as seguindo o processo descrito por Machado (2005): desenvolveram a atividade a partir de uma tarefa, geraram exemplos a partir da análise da situação, organizaram e analisaram esses exemplos procurando regularidades e relações e posteriormente testaram as suas conjeturas tentando encontrar um contra exemplo. Neste processo verificaram-se duas situações distintas em tarefas diferentes: (a) encontraram um contraexemplo e reformularam a conjetura (b) a conjetura resistiu a vários testes.

Quando responderam à questão «será que todo o triângulo pavimenta o plano?», este grupo seguiu o percurso (b) e houve necessidade de partir para a sua demonstração, em grande parte por ser um dos objetivos da tarefa mas também porque se sentiram motivados a justificar o seu raciocínio. Para isso apresentaram argumentos e justificações formais, utilizando as propriedades dos triângulos relativas aos ângulos internos para justificarem a conjetura formulada (Fig.1)

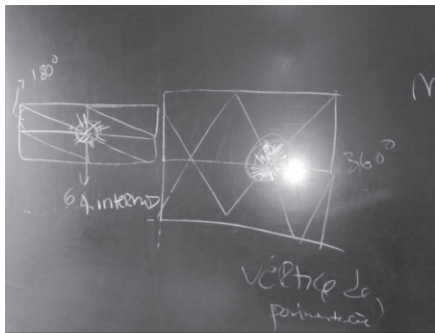


Figura 1

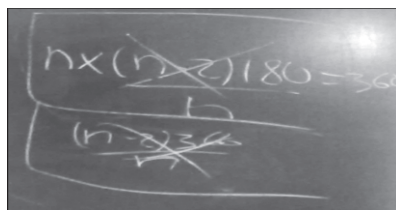


Figura 2

		$60 + 150 + 150 = 360$
1	+ triângulo	+ triângulo, dodecágono, dodecágono
2	+ quadrado	$90 + 135 + 135 = 360$ quadrado, octógono, octógono
3	+ hexágono	+ triângulo x 6 $60 \times 6 = 360$
4	+ quadrado	Quadrado x 4 $90 \times 4 = 360$
5	+ triângulo	3x triângulos $3 \times 120 = 360$
6	+ triângulo	$60 + 90 + 90 + 120 = 360$ + triângulo 2 □ 2 1 ◊

Figura 3

Uma das alunas deste grupo utiliza claramente as diferentes funções da demonstração: explicação, descoberta, verificação, desafio intelectual e sistematização (De Villiers, 1999) e para si a demonstração surge como um processo de busca do porquê de determinada conclusão, segundo ela «explicar como chegamos ao resultado» motivada pelo convencimento obtido com o GSP no caso, por exemplo, da pavimentação com triângulos.

No que se refere à tarefa sobre pavimentações regulares, o Grupo A utiliza o GSP para a construção das pavimentações. No entanto a sua utilização não influencia diretamente o processo de elaboração da conjectura, uma expressão matemática que relaciona o número de lados e os ângulos internos de um polígono regular que seja condição para que esse polígono pavimente o plano. Os alunos testam a conjectura (Fig.2) sem utilizar o software, e abandonam as conjecturas cada vez que arranjam um contra exemplo. Quando verificam que a conjectura é válida para todos os casos dão o trabalho como concluído e não sentiram necessidade de apresentar mais nenhum tipo de justificação.

Com o decorrer do tempo, estes alunos, não sentem necessidade em medir e manipular as figuras para elaborar as conjecturas e apresentam argumentos dedutivos para as suas explicações. Aliás, na última tarefa dispensam a utilização do GSP para a construção das pavimentações e apenas apresentam argumentos que justifiquem as suas generalizações (Fig.3)

Os outros dois grupos tiveram muita dificuldade em elaborar conjecturas sendo que esta foi uma das competências que não ficou adquirida. O Grupo B, esboçou uma tentativa para elaborar a conjectura no caso da pavimentação com triângulos, mas com uma linguagem confusa em que as ideias estão pouco claras e que contém erros, não desenvolvendo argumentos (formais ou informais) para a justificação do que tinham escrito. A tarefa seguinte foi cumprida no que diz respeito à construção dos sketches, sendo esta a preocupação constante das alunas desde o primeiro momento. Apesar de descobrirem e investigarem

relações e propriedades geométricas, no caso específico das pavimentações (Jones, 2005) não são levadas a elaborar conjecturas sobre os seus resultados. Em termos de raciocínio demonstrativo não desenvolveram competências ao nível do desenvolvimento e justificação de argumentos.

O Grupo C, mobiliza corretamente os conhecimentos que têm sobre rotações e translações para a construção das pavimentações. Sobre a questão «será que todo o triângulo pavimenta o plano?» efetuam a generalização mas, no entanto, não desenvolvem qualquer tipo de justificação para a mesma o que poderia indiciar que tenham respondido aleatoriamente à questão.

Estes dois Grupos (B e C) apesar de iniciarem um processo de investigação: observaram, registaram e manipularam, não passaram à fase seguinte, a de conjecturar, testar e desenvolver teorias como explicação num processo como o que sugere Olive (2002). No que se refere à tarefa onde se pedia uma condição para que um polígono pavimente o plano, estes dois grupos, utilizaram a função de arrastamento do software para investigar propriedades aproveitando as potencialidades do mesmo no que diz respeito à verificação de casos particulares mas não conseguiram elaborar conjecturas a partir daí (generalização), grande parte das vezes foram registando as experiências realizadas como conjecturas mas nunca as formalizaram nem apresentaram raciocínios que de alguma forma as justificasse (validação). O Grupo C, efetuou as construções com relativa facilidade, entenderam os conceitos teóricos mas provavelmente confundiram entre o que é experimentação e demonstração, como refere Hanna (2000).

O que se observou nestes dois grupos vai de encontro à preocupação manifestada por Mariotti (2010) quando refere que a facilidade de utilização do software «para compreender tais propriedades pode inibir alguns processos de argumentação que conduzem à procura de elementos úteis para a construção da

demonstração» referindo-se às propriedades que permanecem invariantes.

A motivação para a demonstração não surgiu em todos os grupos como se descreveu no ponto anterior. Apenas o Grupo A elaborou conjecturas condicionados pela realização das tarefas e pela atribuição de tarefas por parte do professor (Takác, 2009). A vertente exploratória deste software permitiu um maior convencimento sobre a veracidade dos resultados que iam sendo apresentados (Hull e Brovey, 2004) fato que se constatou em todos os grupos relativamente à aplicação da primeira tarefa.

Na globalidade, a utilização do GSP orientada por tarefas específicas contribuiu para a investigação de relações e propriedades geométricas no decurso da construção das pavimentações, nomeadamente no caso das isometrias e num dos casos (Grupo A) contribuiu de forma bastante acentuada para a elaboração de conjecturas e demonstração como forma de justificação de raciocínios.

Em síntese, observam-se comportamentos distintos nos alunos envolvidos no estudo relativamente às aprendizagens que a utilização do GSP proporcionou. Para os alunos do Grupo A, a utilização do software teve um papel mais preponderante no que se refere à elaboração e validação de conjecturas tendo sido utilizado como um meio para atingir um fim. Estes alunos utilizam as funções de validação e explicação como funções da demonstração. Não têm dificuldades em apresentar e justificar os seus raciocínios embora apresentem alguma relutância em começar mas, quando iniciam sabem que resultados devem utilizar e não revelam dificuldade em manipular expressões algébricas redigindo-as de forma organizada. Para as alunas dos grupos B e C, as aprendizagens situaram-se ao nível da exploração das propriedades geométricas, nestes casos a utilização do GSP permitiu uma consolidação de conceitos referentes à geometria que não tinham sido bem apreendidos e serviu de motivação para o estudo de um tema que as alunas consideravam difícil e a que tinham alguma resistência aquando do início deste estudo. No final apresentaram como vantagens da utilização do software a compreensão de conceitos geométricos e inclusive referem uma melhoria no desempenho na disciplina de Geometria Descritiva. Em relação à demonstração matemática estas alunas revelaram bastantes dificuldades em elaborar conjecturas considerando a maioria das vezes que as experiências que realizavam eram justificações claramente confundindo entre o que é experimentação e validação. Em termos de motivação a utilização de tecnologia foi um fator positivo no estudo tendo sido referido por todos os alunos por considerarem as aulas mais estimulantes e «divertidas» e por tentarem «descobrir como é que são as coisas, em vez de ser a professora a explicar».

Considera-se que o GSP enquanto tecnologia no ensino da Matemática desempenha um papel motivador das aprendizagens, criando hábitos de trabalho autónomo e a efetiva compreensão dos conceitos geométricos envolvidos nas tarefas quer pela própria filosofia do programa que «obriga» ao conhecimento de conceitos básicos para realizar as construções, quer pela

facilidade com que se podem efetuar construções sucessivas, por experimentação num curto espaço de tempo. Por outro lado conjugado com a aplicação de tarefas de natureza investigativa pode proporcionar aos alunos o desenvolvimento de competências ao nível da elaboração e justificação de raciocínios como forma de convencimento das situações que experienciam.

### Referências Bibliográficas

- Abrantes, P. (1997) A tecnologia no currículo de Matemática: dez anos de investigação em Portugal. *Educação e Matemática*, 45, pp. 27-31. Lisboa: APM
- Baccaglioni-Frank, A. e Mariotti, M. (2010) Conjecturing and proving in dynamic geometry: the elaboration of some research hypotheses. *Proceedings of CERME 6 – working group 2*. Lyon
- De Villiers, M. (1999). *Rethinking proof with the geometer's sketchpad*. Emeryville CA: Key Curriculum Press.
- Hanna, G. (2000a). Proof and its classroom role: A survey. *Actas do IX encontro de investigação em educação matemática* (pp. 75-104). Fundação: Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação – Secção de Educação e Matemática.
- Hull, A.N. e Brovey, A.J. (2004) The Impact of the Use of Dynamic Geometry Software on Student Achievement and Attitudes towards Mathematics. *ARE – Action Research Exchange*, Vol3 (1) USA: Department of Curriculum & Instructional Technology at Valdosta State University, Valdosta, Georgia [Retirado de <http://teach.valdosta.edu/are/vol3no1/pdf/anhull-article.pdf> em 27/11/2010]
- Jones, K. (2005), Research on the use of dynamic geometry software: implications for the classroom. Em, Edwards, J. and Wright, D. (Eds.), *Integrating ICT into the Mathematics Classroom*, pp.18-20. Derby, UK, Association of Teachers of Mathematics, 27-29 18(3)
- Machado, S. (2005). *A demonstração matemática no 8º ano no contexto de utilização do Geometer's Sketchpad* (tese de mestrado) Lisboa: Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa
- Olive, J. (2002). Implications of using dynamic geometry technology for teaching and learning. *Actas do IX Encontro de Investigação em Educação Matemática – Fundação 2003*. Secção de Educação Matemática, Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.
- Takác, Z. (2009). Influence of MRP Tasks on Students' Willingness to Reasoning and Proving. In F-L. Lin, F-J. Hsieh, G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education*. (Vol. 2, pp. 202-207). Taipei, Taiwan: The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
- Vieira, M. J. (2011). *O estudo de Pavimentações Regulares e Semi-Regulares com Ambiente de Geometria Dinâmica*. (tese de mestrado) Monte da Caparica: Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa.
- Whiteley, W. (2000) Dynamic geometry programs and the practice of geometry. *Proceedings of the ICME 9*. Tóquio [Retirado de <http://www.math.yorku.ca/Who/Faculty/Whiteley/Dynamic.pdf> em 30/11/2010]

#### Maria João Mendes Vieira

Escola Secundária de Casquilhos (matmaria.essa@gmail.com)

#### António Domingos

Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa (amdd@fct.unl.pt)