A reforma da Matemática Moderna em contextos ibero-americanos

José Manuel Matos

Wagner Rodrigues Valente

Editores

UIED – Coleção Educação e Desenvolvimento

A reforma da Matemática Moderna em contextos ibero-americanos

José Manuel Matos e Wagner Rodrigues Valente (Editores)

1ª edição: Outubro de 2010
Tiragem: 200 exemplares

ISBN: 978-989-691-033-4
Depósito legal: 317563/10

UIED | Colecção Educação e Desenvolvimento

Faculdade de Ciência e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa
Campus da Caparica
2829-516 Caparica, Portugal
Tel.: +351 212948383
e-mail: uied@fct.unl.pt

A UIED é uma Unidade de Investigação financiada pela
Fundação para a Ciência e a Tecnologia

Capa, impressão e acabamento:
Várzea da Rainha Impressores SA.
Estrada Nacional 8, n.6ª
2510-082 Óbidos, Portugal
Tel.: +351 262098008
Fax: +351 262098582

INDICE

Estudos comparativos sobre a reforma da Matemática Moderna

José Manuel Matos, Universidade Nova de Lisboa, Portugal

Wagner Rodrigues Valente, Universidade Federal de São Paulo, Brasil

Designa-se por Matemática Moderna uma reforma curricular que ocorre um pouco por todo o mundo entre a segunda metade dos anos 50 e a primeira metade dos anos 70 do século passado. Trata-se de um movimento procurando renovar fundamentalmente o ensino da Matemática. Um seu traço marcante é a preocupação com uma mudança de conteúdos, centrando-os nas grandes estruturas que na época se pensava estarem na base de toda a matemática conhecida. O trabalho de unificação dos conhecimentos matemáticos que o grupo Bourbaki vinha desenvolvendo foram fundamentais para este esforço conceptual. Para muitos professores, e para muitos pais e alunos, o aspeto distintivo deste novo currículo de matemática consistiu numa reformulação dos conteúdos usuais da matemática escolar em termos da teoria dos conjuntos. Um segundo traço consiste na preocupação em compatibilizar os currículos de Matemática com os trabalhos de Jean Piaget, que precisamente continham uma descrição dos processos de aprendizagem muito próxima das estruturas bourbakistas. As estruturas-mãe: algébricas, de ordem e topológicas, que segundo Bourbaki estariam na base de todo o conhecimento matemático, encontravam muitas similitudes com as estruturas básicas da cognição teorizadas por Piaget. É ainda possível detectar uma terceira preocupação com a renovação dos métodos de ensino favorecendo as abordagens centradas no aluno e que está presente, pelo menos, nos documentos iniciais da reforma.

O âmbito deste movimento, que abrangeu alunos e professores em muitos países e que mobilizou a atenção, não só dos pais, mas também de decisores políticos, e da opinião pública, tornam natural a realização de estudos comparando os modos como a reforma se foi desenvolvendo em diversos contextos sociais e tradições educacionais. De entre estes trabalhos comparativos salientamos quatro.

O mais antigo é o trabalho colectivo de educadores de diversos países *Comparative studies of mathematics curricula — change and stability 1960-1980* (Steiner, 1980), resultado de uma conferência internacional realizada em Ohrbeck (RFA) promovida pelo Institut für Didaktik der Mathematik da Universidade de Bielefeld e pela International Association for the Evaluation of Educational Achievement. Tendo sido publicado quando a reforma já estava estabilizada em muitos países, este trabalho constitui uma reflexão sobre o modo como decorreu a introdução da matemática moderna e uma análise das mudanças efectivas (e da "estabilidade") que ela produziu no ensino da matemática. Esta reflexão é feita, em muitos casos, pelos próprios proponentes e executores da reforma.

Um segundo trabalho que destacamos é o livro *Curriculum development in mathematics* (Howson, Keitel e Kilpatrick, 1981), que tem uma natureza diferente do anterior. Aqui são usados exemplos do movimento de inovação para reflectir teoricamente sobre o conceito de desenvolvimento curricular na educação matemática. Diferentes modos de construção curricular são analisados, desde abordagens centralizadas, em que o programa de Matemática Moderna foi decidido por organismos governamentais e posteriormente aplicado nas escolas, até movimentos de sentido contrário, onde movimentos de professores vão a pouco e pouco integrando as novas ideias, até ao culminar de uma sua incorporação generalizada e oficializada.

Um terceiro trabalho é o livro *The "New Maths" curriculum controversy. An international story* (Moon, 1986) que, para além de estudar os eventos internacionais, analisa especificamente os casos da Inglaterra e do País de Gales, da França, da Holanda, da República Federal da Alemanha e da Dinamarca.

Por último, e mais recentemente, um outro livro, *Les sciences au lycée. Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger* (Belhoste, Gispert e Hulin, 1996), embora centrado na realidade francesa, inclui trabalhos de reflexão sobre a introdução da matemática moderna noutros países (Estados Unidos, Itália, República Federal da Alemanha, União Soviética e Bélgica).

O livro que ora propomos ao leitor insere-se no âmbito deste tipo de estudos mais comparativos e pretende confrontar os modos como a reforma da Matemática Moderna ocorreu em contextos educativos do espaço ibero-americano. Naturalmente não pretendemos esgotar o tema e, muito pelo contrário, pensamos que se trata ainda de trabalhos preliminares, na linha, aliás, do livro que publicámos anteriormente, *A Matemática Moderna nas escola do Brasil e de Portugal: primeiros estudos* (Matos e Valente, 2007), centrado em problemáticas da reforma nestes dois países.

Embora apresentando capítulos escritos independentemente, é possível detectar problemáticas que atravessam os diferentes textos. Tratando-se de um movimento curricular bem definido, uma dessas problemáticas é, inevitavelmente, o que é o currículo, como é construído, como se modifica, e como é apropriado pelos atores educativos (decisores políticos, professores, alunos, pais, formadores, etc.). Para tal, a valorização investigativa de uma história cultural é-nos fundamental. Recorde-se que este tipo de historiografia deve ser entendido como

> o estudo dos processos com os quais se constrói um sentido. Rompendo com a antiga ideia que dotava os textos e as obras de um sentido intrínseco, absoluto, único − o qual a crítica tinha obrigação de identificar −, dirige-se às práticas que, pluralmente, contraditoriamente, dão significados ao mundo. Daí a caracterização das práticas discursivas como produtoras de ordenamento, de afirmação de distâncias, de divisões; daí o reconhecimento das práticas de apropriação cultural como formas diferenciadas de interpretação. (Chartier, 1990, pp. 27-28)

Nesta busca da construção de uma história cultural do currículo escolar, surge naturalmente a diferenciação entre os modos como os diferentes actores se apropriam, reconstruindo, o ideário das inovações educativas. Diversos autores (Gimeno, 1998, por exemplo) têm insistido na necessidade de especificar o conteúdo do termo currículo, chamando a atenção para que as determinações emanadas das estruturas que, nos sistemas de ensino centralizados, oficializam o programa não são as que necessariamente são levadas à prática. As apropriações feitas na escola por professores e alunos (e outros intervenientes no processo educativo como os autores de livros de texto, os pais, os explicadores, ou mesmo os avaliadores das aprendizagens) diferem significativamente das esperadas e o estudo destas diferenças está no cerne da compreensão das mudanças educativas. É assim relevante a distinção de Gimeno (1998) entre seis níveis de decisão curricular: o *prescrito* — correntemente designado de programa—, o *apresentado aos professores*, o *modelado pelos professores*, o *em acção*, o *realizado* e o *avaliado*.

No caso da Matemática Moderna, estas decisões foram tomadas por distintos intervenientes, todos eles com as suas práticas discursivas transformando (e moldando) através do seu processo de apropriação particular o ideário renovador. Nos diversos capítulos mostra-se como as forças da mudança partiram por vezes de organismos governamentais (González Astudilho, Matos e Mosquera), mas também da iniciativa de grupos que conseguiram com sucesso pressionar as estruturas oficiais (Valente). Matos refere igualmente como estas pressões podem vir dos lugares mais inesperados, por exemplo de governantes pouco confiantes na adesão dos seus colegas de gabinete aos seus ímpetos reformadores. A importância dos livros de texto, cujos autores tiveram o seu próprio processo de apropriação e aos quais Gimeno atribui um nível de decisão curricular próprio, é igualmente referida em quase todos os capítulos. Naturalmente as estratégias editoriais das casas editoras são aqui relevantes. González Astudilho refere as mudanças no mundo editorial que ocorreram durante a implementação da reforma e Valente aponta como a reforma ocorre num contexto de disputa do mercado editorial na qual os livros escolares foram um peão. Os professores, possuindo um dos níveis de decisão de Gimeno, são estudados no capítulo de Matos e no de Pinto. As aprendizagens dos alunos são referidas em Matos que aborda igualmente, tal como Pinto, o nível do currículo avaliado.

Naturalmente que outra das problemáticas estudadas prende-se com a forma de circulação do ideário da reforma, incontornável num movimento de dimensão internacional, e dos modos como ele foi sendo apropriado nos distintos contextos educacionais fazendo emergir as suas "mestiçagens culturais" (Vidal, 2006). Arboleda aponta a importância da influência francesa anterior à reforma entre os matemáticos colombianos, Mosquera desvenda a importância determinante que os EUA tiveram no movimento na Venezuela, Matos mostra a influência de educadores suecos no sistema educativo português, Pinto refere a penetração de correntes educativas exteriores (francesas e norte-americanas) no ensino primário brasileiro, Valente refere como os dois atores que estuda, Euclides Roxo e Osvaldo Sangiorgi, funcionaram como mediadores culturais trazendo para o seu país correntes de pensamento estrangeiras. Valente refere ainda como chegaram a Portugal ecos do programa brasileiro de Matemática Moderna.

Permeando, facilitando e condicionando estas mestiçagens estão as grandes organizações internacionais, como a OCDE (nos casos espanhol e português), a UNESCO (no caso português e venezuelano), a USAID (no caso brasileiro) ou mesmo empresas (no caso venezuelano). Mas não são apenas estas organizações que desempenharam um papel no desenvolvimento das reformas. A influência de entidades menos estruturadas, mas eventualmente com um papel fundamental, pode ser detectada nos capítulos de Pinto (educadores estado-unidenses), de Matos (educadores suecos), de Mosquera (França, Suíça, Inglaterra e Espanha) e de Arboleda (matemáticos franceses), por exemplo. A recuperação parcial destas formas de intercâmbio cultural merece certamente ser aprofundada de forma a reconstituir uma *história conetada* deste evento e identificando os seus *mediadores* na feliz denominação de Vidal (2006).

Seguindo a terminologia de Chartier (1990), estas influências foram apropriadas pelas culturas escolares de cada país. Encontramos, no entanto que, esta apropriação, no sentido literal de tornar próprio, tomou direcções distintas e se nalgumas culturas se encontra a preocupação de reproduzir as ideias externas o mais fielmente possível (Mosquera), noutros casos (Matos) encontram-se fenómenos já próximos de uma rejeição passiva.

Referências

Belhoste, B., Gispert, H. e Hulin, N. (Eds.). (1996). *Les sciences au lycée. Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*. Paris: Vuibert.

Chartier, R. (1990). *A história cultural: entre práticas e representações*. Lisboa: Difel.

GimenoSacristán, S. J. (1998). *O currículo: uma reflexão sobre a prática*. Porto Alegre: Artmed.

Howson, G., Keitel, C. e Kilpatrick, J. (1981). *Curriculum development in mathematics*. Cambridge, Inglaterra: Cambridge University Press.

Matos, J. M. e Valente, W. R. (Eds.). (2007). *A Matemática Moderna nas escola do Brasil e de Portugal: primeiros estudos*. São Paulo: GHEMAT.

Moon, B. (1986). The *"New Maths" curriculum controversy. An international story*. Londres: Falmer Press.

Steiner, H.-G. (Ed.). (1980). *Comparative studies of mathematics curricula - change and stability 1960-1980*. Bielefeld: Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld.

Vidal, D. G. (2006). Fronteiras e mestiçagens culturais — a circulação de objectos, pessoas e modelos pedagógicos como problemática em história da educação (Brasil, EUA, França e Portugal no final do século XIX). *Estudos do Século XX*, *6*, 43-55.

Sobre os autores

Wagner Rodrigues Valente
Universidade Federal de São Paulo
Estrada do Caminho Velho, 333 - Guarulhos-SP, Bairro dos Pimentas
07252-312 - Sao Paulo, SP – Brasil
wagner.valente@unifesp.br

José Manuel Matos
Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia, UNL
2825-118 Caparica, Portugal
jmm@fct.unl.pt

O impacto da Matemática Moderna na cultura da escola primária brasileira

Neuza Bertoni Pinto, Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Brasil

Uma das principais iniciativas do Movimento da Matemática Moderna no Brasil foi reconfigurar o programa de Matemática do curso ginasial, nível de ensino destinado aos alunos que haviam concluído o curso primário. Posteriormente, ainda na década de 60, o movimento ampliou seu espaço de disseminação para a escola primária, que passou a incluir a teoria de conjuntos em seu programa de matemática e a conceber a matemática como linguagem necessária à participação do cidadão na vida moderna. Qual o impacto dessa modernização ao propor uma nova lógica formadora à tradicional cultura aritmética da então escola primária?

O presente estudo busca compreender as implicações da chegada da matemática moderna na escola primária, as possíveis rupturas e continuidades ocorridas em um ensino marcado por uma forte herança pedagógica que, perpassando várias reformas educativas, ainda se caracterizava, na década de 60, como uma disciplina predominantemente prática. Para tanto recorre aos Exames de Admissão ao Ginásio, realizados na Escola Estadual de São Paulo no período de 1931 a 1969, considerando-os uma fonte histórica valiosa, pelos dados que oferecem sobre os conteúdos mínimos exigidos do candidato ao ingresso no curso ginasial; portanto, um testemunho das transformações ocorridas na matemática da escola primária ao longo de quatro décadas. Consultando o valioso arquivo organizado pelo Grupo de Pesquisa da História da

Educação Matemática (GHEMAT)[1], buscamos analisar as provas de matemática de candidatos ao ingresso ao ginásio, considerando também que esse instrumento, além de dados sobre o repertório de conhecimentos matemáticos exigidos aos que concorriam a uma vaga na escola secundária, continha vestígios dos ideários pedagógicos que permeavam as práticas escolares daquele período.

Como produção material de uma cultura escolar, os referidos exames constituem preciosas fontes para a compreensão não apenas do sistema avaliativo prescrito para um determinado momento da educação brasileira; enquanto documentos escolares, encerram os sentidos dados pela escola às sucessivas reformas educacionais, especialmente as finalidades que os componentes curriculares cumpriram no processo de escolarização da população. Como testemunhos "vivos" das práticas matemáticas que ajudaram a tecer a cultura escolar (Julia, 2001), os referidos exames constituem importante fonte primária para a escrita da história de uma disciplina escolar (Chervel, 1990), sobretudo, por possibilitarem a compreensão da mobilidade da cultura escolar, pois uma característica dessa cultura é justamente ser construída nas relações estabelecidas pelos agentes escolares ao se apropriarem dos ideários e dispositivos legais que permearam o contexto educacional de um dado momento histórico. Mais que prática discursiva da escola, em sua materialidade física os exames expressam o conjunto de regras características do *modus operandi* das disciplinas escolares formalizarem seu processo de escolarização. Nesse sentido, podem ser compreendidos como um relevante ordenador da cultura escolar.

[1] Arquivos da Escola Estadual de São Paulo: Os Exames de Admissão ao Ginásio - 1931-1969. Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática - PUCP-SP, 2001.

Para Chervel (1990), toda disciplina escolar "comporta não apenas as práticas docentes da aula, mas também as grandes finalidades que presidiram sua constituição e o fenômeno de aculturação de massa que ela mesma determina" (p. 184). Como eixo estruturante da função educativa, ela pode revelar o "poder criativo" da escola, segundo o autor, insuficientemente valorizado, ao intervir na formação do indivíduo e da própria sociedade, ao produzir uma cultura que penetra, molda e modifica a cultura da sociedade global, mas também resiste ao processo de aculturação escolar. Em cada época, segundo esse autor, as disciplinas escolares estão a serviço de uma determinada finalidade educativa, não se restringindo apenas aos ensinamentos explícitos e programados. As reais finalidades da disciplina escolar não se encontram apenas nos textos oficiais. Segundo o que diz o autor (p. 190), para conhecê-las é preciso compreender "por que a escola ensina o que ensina?", indo à realidade pedagógica, pois, "no coração do processo que transforma as finalidades em ensino, há a pessoa do docente" e é através de uma "tradição pedagógica e didática complexa e, na verdade, sofisticada, minuciosa que as finalidades chegam aos docentes" (p. 191).

1 — A matemática da escola primária antes do Movimento da Matemática Moderna

A escola primária brasileira consolida-se definitivamente no Brasil com a implantação dos grupos escolares paulistas, a partir da grande reforma da instrução pública paulista, implementada entre 1890 e 1896, modelo de referência para outros estados brasileiros, ao longo da Primeira República. Segundo Saviani (2004), somente após a Revolução de 1930, com a criação do Ministério da Educação e Saúde Pública, é que a educação passa a ser reconhecida como uma questão nacional. Com a Reforma Francisco Campos, em 1931, inicia-se o processo de regulamentação do sistema de ensino em âmbito nacional. Da escola de primeiras letras, como eram denominadas no período anterior, em que um professor ministrava aulas a um grupo de alunos em níveis diferentes de aprendizagem, a partir da instalação dos grupos escolares[2], o ensino elementar passou a ser progressivo, divido em quatro séries. Para a Aritmética eram prescritos o cálculo de números inteiros e frações; a geometria prática (taximetria) com as noções necessárias para sua aplicação à medição de superfícies e volumes; o sistema métrico decimal.

A obra *Como se ensina a Aritmética*, de autoria de Everardo Backheuser[3] (1946), informa que o ensino da aritmética[4] da escola primária foi herdeiro de variadas influências estrangeiras e que durante meio século apresentou uma lenta evolução. Segundo o autor, a influência francesa predominou por mais de cinqüenta anos e a educação matemática baseava-se essencialmente na *memória.*

---

[2] "Grupo Escolar" — termo que além de significar o prédio escolar urbano, destinado ao curso primário, também é uma representação da escola primária brasileira. Os grupos escolares, enquanto modalidade de escola primária, emergiram em vários estados brasileiros desde 1893 e só foram extintos em 1971. Para conhecer a história dos Grupos Escolares ver Vidal (2006a).

[3] Everardo Backheuser foi professor de Mineralogia e Geologia na Escola Politécnica e presidente da Confederação Católica Brasileira de Educação e Presidente da Comissão do Ensino Primário após 1930. Autor de inúmeros livros didáticos, empenhou-se em encontrar uma terceira via entre o tradicionalismo e o ideário da escola nova (Ghiraldelli Jr., 2006).

[4] "*Contas* era antigamente o nome da aritmética rudimentar. Alguns ainda a chamam de "cálculo", dando-lhe duas designações: de *contas* (ou cálculo), para os rudimentos da aritmética do curso primário, e de *Aritmética,* para a ciência, propriamente dita, estudada nos cursos secundários – havia a vantagem de fixar com bastante nitidez a linha de demarcação da didática primária e da didática secundária dessa disciplina. É o que ainda se dá hoje em dia na língua alemã: *Rechenunterricht,* que se traduz ao pé da letra por *ensino de contas,* é o vocábulo que designa o estudo da *Aritmética* no curso primário" (Backheuser,1946, p. 17).

> A *tabuada* era recitada de cor, e de modo cantado (Duas vezes dois, quatro; duas vezes três, seis...). As *contas* eram extensíssimas, de numerosas parcelas, de enormes fatores, de cumpridos divisores; os *carroções* bem complicados, faziam o encanto dos "mecanizadores" como um arrojo de progresso; os *problemas* obedeciam a pequeno número, meia dúzia de paradigmas. (Backheuser, 1946, p. 70)

Segundo o autor, esse "feitio decorador" perpassou também as demais disciplinas do então curso primário até o advento da República em 1889, momento em que a didática dessa *matéria* (como era denominada uma disciplina escolar) passou a fundamentar-se no *raciocínio*. Nesse momento, segundo esse autor, a ênfase positivista recaiu sobre a *marcha do cálculo*, em detrimento do resultado do numérico e da memória, cuja principal preocupação era a aquisição dos conhecimentos científicos. Não bastava, dizia ele, a "marcha certa, vigorosa, exata; é preciso o *resultado* também exato, certo, rigoroso" (p. 73).

Backheuser afirma que essa segunda fase, adjetivada por ele de "teorismo *flou*", preocupada em formar cientistas, em valorizar "uma educação para cientistas" e não uma educação pela ciência, foi mais nociva que o mecanicismo da fase anterior, pois, apesar de ser tão prejudicial quanto à precedente, deixava no aluno uma "petulante impressão de alto saber, ao passo que os '*decoradores*' sempre se caracterizaram por muita modéstia e muita timidez em assuntos matemáticos. Lembra que nas reformas pedagógicas dos primórdios da República, até os colégios de primeiras letras foram influenciados pela "classificação filosófica das ciências" de Augusto Comte. A terceira fase, designada de influência norte-americana, era uma justa reação aos exageros do teorismo, em que "volta-se a querer a prática" (p. 74). Todavia, Backheuser faz uma crítica à excessiva preocupação utilitarista trazida pelo reformador norteamericano John Dewey que, segundo ele, acabou por deturpar as nobres finalidades da educação integral. Defende acirradamente o método intuitivo, ou as lições de coisas, método muito disseminado nos grupos escolares, a partir da década de 30.

Uma tentativa de intervir na tradição aritmética, demasiadamente enciclopédica e utilitarista das fases apontadas por Backheuser, já havia sido apresentada por Rui Barbosa na Câmara dos Deputados, em 1883, quando o jovem deputado, designado como relator da Instrução Pública, apresentou um extenso relatório propondo uma nova programação para o curso primário, inspirado na obra de Allison Norman Calkins *Primary object lessons*, mais tarde traduzida por ele como *Lições de coisas*. Esse método (intuitivo) era utilizado no Colégio Progresso, no Rio de Janeiro, pela professora norte-americana Eleanor Leslie. Segundo Lourenço Filho (1937), face às condições gerais do trabalho escolar da época, representou uma "verdadeira revolução". Argumentos de Rui Barbosa em 1883:

> Quando vemos a mente juvenil assoberbada de generalidades, antes de possuir nenhum dos dados concretos a que elas se referem; quando vemos as matemáticas admitidas sob a forma puramente racional, em lugar da forma empírica, por onde o menino devia principiá-las, como a principiou a espécie humana; quando vemos um estudo tão abstrato como a gramática incluído entre os primeiros, e não entre os últimos; quando encontramos, em suma, a escola reduzida à memorização passiva, à recitação material e à leitura inconsciente dos livros mais inconciliáveis com as exigências da natureza; quando vemos as gerações nascentes mirrarem sob a influência desses métodos abomináveis – desta semente ôca, crestada pela educação que a devia fecundar, não podemos esperar senão uma nacionalidade estéril, depauperada, valetudinária, amanhada para todas as humilhações e todas as surprêsas de um destino, de que a sua educação não a preparou para assumir a iniciativa, prever as contingências, e dirigir o curso. (Lourenço Filho, 1956, pp. 76-7)

A proposta de Rui Barbosa para a Aritmética elegia o cálculo como um dos elementos fundamentais para a formação do indivíduo, não o cálculo abstrato como era praticado nas classes elementares da época, mas o cálculo ensinado exclusivamente por meio de combinações e aplicações concretas. Condenava a decoração da tabuada e exaltava a utilidade extraordinária do cálculo mental e dos problemas concretos, da intuição da proporcionalidade como base da geometria elementar. A par da aritmética, o desenho era considerado por Rui outra matéria fundamental do programa da escola elementar.

O estadista propunha um ensino primário em três etapas: dois anos de primário elementar; dois anos de primário médio e quatro anos de primário superior. No primário elementar seria estudada a aritmética prática até divisão por um algarismo, primeiras idéias de frações, problemas fáceis, concretamente formulados; na escola primária média, a aritmética prática até regra de três simples e sistema métrico; na escola primária superior, a aritmética prática e teórica até raízes quadradas e cúbicas e logaritmos inclusive, noções de geometria, álgebra até equações do 1º grau, rudimentos de trigonometria (Martins, 1984, p. 59).

No entanto, sua proposta foi mal compreendida na época e não obteve aprovação da Câmara. A aritmética da escola primária, nesse período, seguiu sua linha positivista. Como afirma Backheuser, o resultado do cálculo permaneceu em segundo plano; era mais importante saber a "marcha do cálculo", tendo em vista a criança dominar as regras algorítmicas das quatro operações aritméticas.

Em 1926, por ocasião da instituição no Distrito Federal do *Programa de Ensino para as Escolas Primárias*, uma das recomendações de Carneiro Leão foi:

> No ensino de aritmética nada de expressões longas, de cálculos, de problemas, cujo sentido as crianças não possam perceber.

Em outro ponto, Carneiro Leão critica os valorizadores do teorismo ao dizer:

> No correr dos diversos anos busca-se aplicar a aritmética e ensiná-la relacionada ou aplicada aos fatos e às necessidades correntes. (apud Backheuser, p. 75)

A obra de Backheuser indica que a partir da década de 30 aumentou a polêmica em torno do método de ensino da Aritmética do curso primário. Criticando a vertente norte-americana da escola nova, ele advoga a favor do ensino intuitivo, um ensino da aritmética por meio de jogos coletivos, de problemas resolvidos em cooperação, seguindo uma concepção contrária àquela proveniente do grande reformador norte-americano John Dewey e muito divulgada no Brasil. Insistindo nos "princípios cardiais da escola nova", Backheuser sugere que fossem excluídos do curso primário os "famosos problemas sem número", tão comuns na fase comtista e spenceriana do ensino brasileiro. Defendia o uso de cálculo mental, da rapidez e exatidão dos cálculos, a repetição moderada dos exercícios.

No método intuitivo, segundo Valdemarin (2004), a ligação com a vida cotidiana era apenas um pretexto, um ponto de partida para alcançar novos conhecimentos, um elemento motivador para prender a atenção do aluno, levá-lo a observar.

> O *método de ensino intuitivo*, popularizado também sob a denominação de *lições de coisas* e *método objetivo*, pode ser caracterizado como a prática pedagógica que faz uso de objetos

> didáticos, conhecidos ou semelhantes àqueles conhecidos pelos alunos, para promover a aprendizagem. Esta prática baseia-se numa concepção sobre o conhecimento humano segundo a qual todas as noções do espírito têm sua origem na percepção da existência de semelhanças e diferenças entre os objetos proporcionada pelos sentidos, ou, dito de outro modo, o conhecimento das coisas que nos rodeiam é possível pelo fato de termos sentidos que fazem a ligação do objeto a ser conhecido ao sujeito que o conhece, criando as ideias. (Valdemarin, 2004, p. 171)

Tratando-se de ensino ativo, é importante destacar a diferença existente entre o conceito de "atividade" seguido pelo método intuitivo em relação ao apresentado por Dewey, também difundido no Brasil pelo Movimento da Escola Nova. Como explicita Valdemarin:

> Embora nas duas concepções se afirme a importância da atividade do aluno, estamos diante de compreensão diferente do que seja atividade: nas *lições de coisas*, a atividade do aluno é falar, responder perguntas, desenhar, pintar, expressar-se oralmente e por escrito, emitindo sua compreensão da atividade proposta e esperada pelo professor. Tais atividades são bastante valorizadas e vistas como inovadoras porque estão se contrapondo ao ensino centrado na fixação, na qual a repetição e a memorização são mais importantes que o entendimento do processo. O objeto diante da criança desencadeava perguntas, feitas pelo professor e respondidas pelos alunos (...). Na concepção de Dewey, a atividade implica atividade corporal, que alimenta a atividade do pensamento e é traduzida numa solução que deve ser testada na prática. (...) Por isso Dewey recomenda que se deve dar alguma coisa para o aluno fazer: a aprendizagem adquirida será o ganho sobre a atividade de fazer. (Valdemarin, 2004, p. 194)

A década de 30, no Brasil, foi palco de acirradas disputas políticas, decorrentes da queda da "política do café com leite" que, segundo Ghiraldelli Jr. (2006), era formada pelo grupo de proprietários e homens influentes em Minas Gerais (coronéis do leite) e em São Paulo (barões do café). Com a Revolução de 30 e frente ao crescimento econômico industrial do país, a educação passa por uma fase turbulenta; diferentes projetos são defendidos para a educação brasileira: dos liberais, dos católicos, dos integralistas e dos comunistas[5].

As sucessivas reformas implementadas em vários momentos da educação brasileira e voltadas para a escola primária constituíram, como afirma Vidal (2006b, p. 10), um terreno fértil para a consolidação "de uma nova forma de organização administrativa e pedagógica do ensino, de orientação laica, que não negando as conquistas da escola graduada, apresentava outros contornos às práticas e aos saberes escolares". A autora lembra ainda:

> A criação do Ministério da Educação e Saúde em 1930 e a presença nele do educador *escolanovista* M. B. Lourenço Filho, por mais de 40 anos em diversos cargos técnicos, asseguraram a disseminação das propostas a todo o território nacional, ainda que a semântica da Escola Nova não fosse única e as disputas com educadores católicos fossem acirradas, particularmente depois de 1932. (Vidal, 2006b, p. 11)

Com a aura dos grupos escolares – símbolo da escola primária de excelência – o método intuitivo, disseminado nas Escolas Normais da época, consolidou-se nas práticas de ensino das professoras normalistas, cuidadosamente preparadas para realizar, na escola primária, experiências didáticas ricas em imagens, manipulação de objetos, respeitando a ordem lógica e psicológica, prescritas pelos manuais pedagógicos da época, ministrando o ensino do próximo ao distante, do concreto ao abstrato, do global para o específico.

Aspectos da aula de Aritmética, já descritos em estudo anterior, lembram a rotina do grupo escolar ao final dos anos 40, no Estado de São Paulo:

---

[5] Para conhecer as diferentes propostas pedagógicas da década de 30, ver Ghiraldelli Jr. (2006, cap. 4).

O culto à recitação da tabuada, mesmo o ritual sagrado da memorização, não era cumprido à risca, conforme prescrevia o "livrinho de tabuada". A tabuada era também prazerosamente "cantada" pelo coletivo da sala de aula e algumas vezes até "reconstruída" nas carteiras, com cartões coloridos, sementes ou palitinhos, sob o olhar atento da professora que percorria a sala silenciosa. Isso contribuía para que o candidato ao exame de Admissão levasse, em sua bagagem matemática, um conjunto de ferramentas úteis para os momentos de enfrentamento dos imprevisíveis problemas e os "arme e efetue" rotineiros dos cálculos aritméticos. Tudo era bem guardado na memória e quando necessário recorria-se à imaginação, outra faculdade primorosamente cultivada nas tarefas de descrição e narração das aulas de Linguagem. A matemática elementar exigia do aluno, e muito, habilidades de leitura e escrita. A compreensão de um problema aritmético dependia de um razoável domínio dessas "artes de dizer", especialmente da escrita, domínio que requeria um bom uso da caneta (de madeira) e da qualidade da pena (para molhar no tinteiro), materiais auxiliares na aquisição de hábitos disciplinares de atenção, concentração, base simbólica do futuro rigor ginasial. O bom uso do tinteiro (incrustado nas pesadas carteiras de madeira maciça e abastecido diariamente pelas serventes na hora de limpeza das salas de aula), o limpa-penas (artesanalmente confeccionado em casa com tecido de lã), o mata-borrão, comprado na papelaria (às vezes distribuído como brinde na compra do material escolar), funcionavam como instrumentos a serviço da clareza e da estética da escrita, habilidades muito valorizadas naqueles tempos até nas aulas de Aritmética. O tempo se encarregava de burilar tais destrezas e colocá-las, definitivamente, a serviço de registros mais legíveis, feitos com mais rapidez; exigências jamais ignoradas no gesto professoral das correções do "diário escolar". Essas práticas eram reforçadas com o tradicional "para casa", dever que integrava o "passar a limpo", em cadernos personalizados, as "lições do dia", também a realização da bateria de "contas" e uns poucos "problemas-tipo", destinados para "fixar" os raciocínios trabalhados em sala de aula, ou seja, os procedimentos utilizados na resolução. Nessas práticas, silenciosamente, o aluno aprendia que qualquer borrão, mesmo qualquer forma confusa de registro, resultava em punição, não física, mas na perda de pontos e no rebaixamento de sua imagem perante os colegas, um dos estigmas moralizantes mais fortes na diferenciação dos "bons" e "maus" alunos. A maior parte da rotina das aulas de matemática, ainda conhecida no final dos anos 40 como Aritmética, consistia das quatro operações aritméticas: no mínimo, uma folha de contas,

> "deitadas e de pé", representações simbólicas do aluno para entender o sentido das emblemáticas "indicação", "solução" e "resposta" do problema aritmético, formalidade severamente cobrada pela professora na correção das tarefas. Os famosos "carroções" (na linguagem escolar, expressões numéricas), ao lado das dízimas periódicas (simples e compostas) provocavam tédio nos alunos, mas não havia outro jeito senão resolvê-las. O cálculo mental, sempre presente, nas parlendas, no coral uníssono da tabuada coletiva, no canto seqüencial e rápido dos fatos numéricos, era o termômetro usado pela professora, procedimento didático que além de diagnosticar a temperatura da aprendizagem, servia para aguçar o raciocínio do aluno. (Pinto, 2006, p. 26)

Em meados do século passado, no Brasil, a escola se fazia "berço de civilidade" e o grupo escolar era o espaço-laboratório dos futuros ginasianos. O ensino, predominantemente individual, a rotina escolar, tal como a disciplina, seguiam um rígido ritual: hora da fila, do hasteamento da bandeira e cantos patrióticos, hora do ditado, da leitura, da descrição, da narração, da composição, do cálculo escrito, do recreio, do cálculo oral, da caligrafia, da geografia, do desenho, dos trabalhos manuais, do canto orfeônico, da história, da educação física, tudo religiosamente distribuído no tempo e espaço, sob o controle dos inspetores de ensino (e do olhar invisível de Capanema[6]). Essa face moralizante da escola estava inscrita no governo do presidente Getúlio Vargas. Uma forma de controle era o Exame de Admissão, simbólica herança da rigorosa seletividade que marcara a educação republicana e que funcionou, no período de 1931 a 1969, como um divisor de águas entre o primário e o ginásio.

[6] Ministro da Educação e Saúde do Governo de Getúlio Vargas no período de 1943 a 1945.

2 — O Exame de Admissão ao Ginásio: um ordenador da cultura escolar

A década de 30, predominantemente marcada pela consolidação de reformas de ensino, orientadas para a "construção do espírito nacional", dentre outras exigências, determinavam que o acesso ao ensino secundário em nível nacional, ficaria subordinado ao Exame de Admissão que a partir da Reforma Francisco Campos, constitui-se um fato histórico que vem marcar, significativamente, a vida escolar de grande parte da população brasileira até a década de 1970. Segundo Valente (2001, V.2), "o exame de admissão funcionou como um verdadeiro 'rito de passagem' no processo de seleção à continuidade dos estudos, representada pelo ginásio acadêmico, que teve procura intensificada a partir de 1930". Na década de 40, o ginásio secundário, ao lado do industrial, comercial e agrícola, reestruturado pela Lei Orgânica de 1942, era a escola mais cobiçada pelas famílias que almejavam "o melhor" para seus filhos. Centrado numa cultura geral e humanística, mantinha a mesma seletividade da legislação anterior por meio do exame de admissão, linha divisória entre a escola primária e a secundária. Analisando como ocorreu a democratização do ensino paulista, na década de 30, Azanha (1979) lembra que:

> Os exames de admissão a esse nível, obrigatórios por lei federal, haviam se transformado numa barreira quase intransponível para a grande massa de egressos do primário. Estes exames, diante da avalanche de candidatos, eram elaborados pelas próprias escolas com extremo rigor, de modo a evitar o impasse de candidatos aprovados e sem matrícula. (Azanha, 1979, p. 16)

Nessa década, o grande entusiasmo que se propagava no país foi estimulado pela crença no poder da educação para colocar o Brasil no processo de modernização urbano-industrial, rompendo com estruturas significativas da oligarquia agrária, responsáveis pela manutenção do analfabetismo da população.

A avaliação dos candidatos a ingresso ao Ginásio era rigorosamente classificatória. Nunes (2000, p. 45) observa que esse sistema de provas mobilizava não só os estudantes, mas também seus pais e irmãos. "Obter a aprovação nas provas tinha uma importância equivalente à aprovação nos exames vestibulares ao ensino superior. Era uma espécie de senha para a ascensão social".

Em 1957, ainda eram muito baixas as taxas de ingresso no ensino secundário. "De 100 alunos que freqüentavam o nível primário apenas 14 chegavam ao nível subseqüente e, dentre esses, apenas 1% dos indivíduos era proveniente das classes populares, que correspondiam a mais de 50% da população brasileira" (Nunes, 2000, p. 48). A explicação desse baixo acesso, segundo a autora, era decorrente da política populista que gerava atraso e evasão dos alunos, dada a grave situação econômica de suas famílias. A falta de escolas suficientes para toda a demanda fez surgir tensões nos centros urbanos, como São Paulo, onde a industrialização se consolidava e a inflação, o congelamento de salários, a falta de energia elétrica, o alto custo dos transportes aumentavam a pressão da população. No entanto, sobretudo nas décadas de 50 e 60 do século XX, o ginásio secundário, mesmo voltado para uma cultura geral e humanística, um curso com forte seletividade, com o mesmo rigoroso sistema de provas e exames herdados da legislação anterior, ainda representava a "menina dos olhos" das populações urbanas. Nesse mesmo período houve uma intensa disseminação dos cursos preparatórios ao exame de admissão, oferecidos por professores particulares, e uma grande importância dada pelos adolescentes ao "famoso" livro: *Programa de Admissão*[7] (figura 1.1), uma espécie de bíblia para os que pretendiam entrar no curso secundário.

Figura 1.1. Capa do livro *Programa de Admissão* (1970).

O livro continha o conteúdo a ser averiguado nas provas e "sua aquisição resultava em sacrifício para algumas famílias desejosas de matricular seus filhos no ginásio" (Nunes, 2000, p. 49). Com a homologação do ensino de primeiro grau, proposto pela Lei 5.692 de 1971, ficaram extintos os Exames de Admissão e, com eles, um anúncio de morte aos grupos escolares, tradição que marcara, de forma singular, durante vários séculos, a cultura escolar da escola primária no Brasil. Essas medidas foram o prenúncio de um novo modelo de escolarização, o da escola única de oito anos, incorporando definitivamente a escola primária ao ginásio.

---

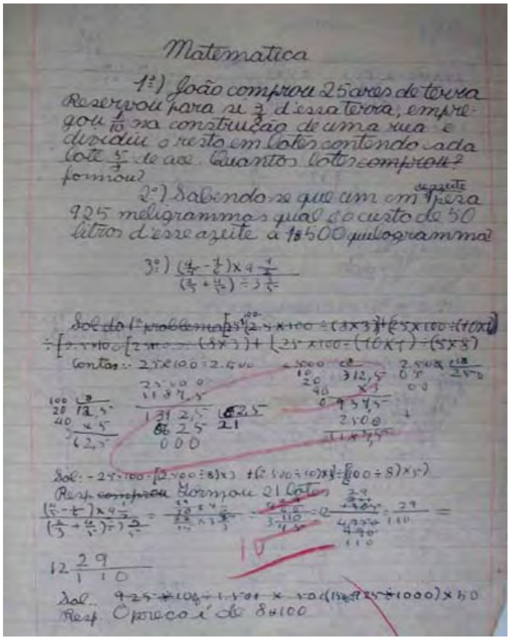
7 Livro elaborado por Azevedo, Cegalla, Silva, Sangiorgi e publicado pela Companhia Editora Nacional, com grande circulação no Brasil nas décadas de 1950 e 1960. Mesmo com a extinção dos Exames de Admissão, em 1970, é publicada sua 24ª edição, com conteúdos de Matemática Moderna.

3 — As transformações da Aritmética da escola primária

Uma das prescrições da Reforma Francisco Campos foi nacionalizar a passagem do curso primário ao secundário, o então ginásio da década de 30. Segundo Valente (2001), esses exames já eram realizados em muitas escolas secundárias brasileiras desde 1894, mas não tinham caráter nacional. O Decreto nº. 19.890, de 18 de abril de 1931, estabelecia em seu Artº. 18 que o candidato à matrícula na 1ª série de estabelecimento de ensino secundário prestaria exame de admissão na segunda quinzena de fevereiro. O exame seria composto de provas escritas, uma de português (redação e ditado) e outra de aritmética (cálculo elementar).

O exame de Aritmética destinava-se a apurar o domínio das operações fundamentais e o desembaraço no cálculo, evitando-se os chamados “quebra-cabeças”. Sinal de que o domínio do cálculo era a principal habilidade exigida dos candidatos que desejavam prosseguir os estudos. Até 1950, as provas eram copiadas pelos candidatos. Quando começam a ser datilografas, é ampliado o número de questões, porém os alunos continuavam copiando cada questão antes de resolvê-la. A cópia era feita à tinta e, no rascunho, predominava o uso do lápis. A escrita continuava a ser um elemento importante da cultura escolar e a cópia das questões, uma forma de o aluno apropriar-se dos dados do problema de forma mais precisa. Um aspecto importante das provas de Aritmética eram as formas convencionadas para o encaminhamento das resoluções dos problemas. De 1931 a 1937, há registros da “solução”, indicando as etapas de resolução, em seguida o registro da “resposta”, redigida com palavras que respondem à pergunta contida no enunciado do problema, um sinalizador da importância do registro correto da resposta do problema, certamente um critério relevante no cômputo da nota (figura 1.2).

Figura 1.2. Prova de Matemática de 1937 (Valente, 2001).


Matematica

1º) João comprou 25 ares de terra Reservou para si $\frac{3}{4}$ d'essa terra, empregou $\frac{1}{10}$ na construcção de uma rua e dividiu o resto em lotes contendo cada lote $\frac{5}{3}$ de are. Quantos lotes ~~comprou?~~ formou?

2º) Sabendo-se que um cm³ de azeite pesa 925 milligrammas qual é o custo de 50 litros d'esse azeite á 1$500 o kilogramma?

3º) $\dfrac{(\frac{4}{5}-\frac{1}{2})\times 4\frac{1}{2}}{(\frac{3}{5}+\frac{4}{5})\div 3\frac{1}{5}}$

Resp. ~~comprou~~ formou 21 lotes

12 $\frac{29}{110}$

Resp. O preço é de 8$100

Nas provas de 1938, essas regras são alteradas: logo abaixo do enunciado da questão, o espaço é dividido em duas partes por um traço vertical: à esquerda fica a "solução", com as mesmas características dos anos anteriores, à direita, o "cálculo", onde são registradas as formas algorítmicas desenvolvidas. O registro da "resposta" em forma de sentença se mantém. Os "rascunhos", muito extensos, são reveladores de que os candidatos experimentavam diferentes percursos cognitivos para encontrar a resposta solicitada pelo problema. Entretanto, o transporte para a sessão do "cálculo" indica a forma homogênea de resolução registrada pelos diferentes candidatos, uma prática que sinaliza para os "modelos" de raciocínios privilegiados pelas escolas.

Na prova de 1947, o rascunho apresenta-se mais desorganizado e mais configurado como espaço livre para o aluno exercitar os cálculos mentais que envolviam as operações. Em 1948, o termo "solução" é substituído pelo termo "raciocínio" e o cálculo das operações requeridas pelo problema são registrados no espaço da prova intitulado: "solução". Possíveis marcas do embate travado pelos docentes em relação às tradicionais e novas tendências da Aritmética.

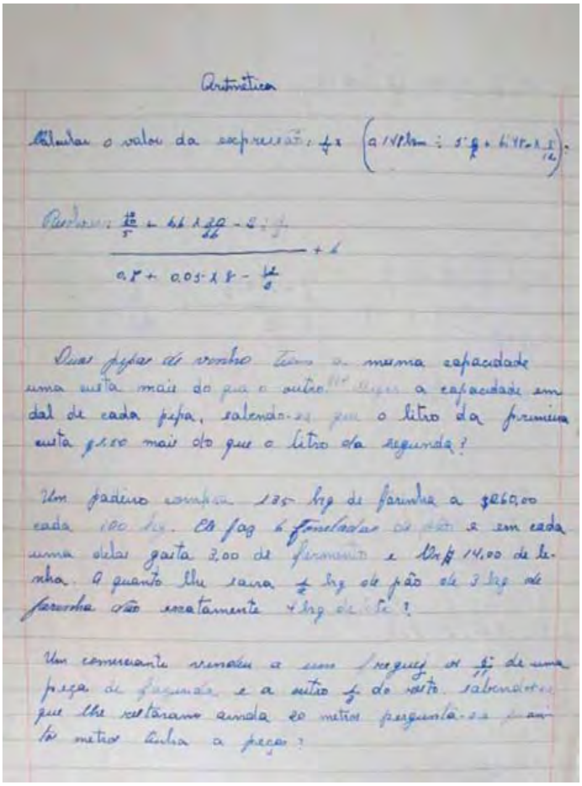
De 1949 a 1953, o dispositivo aparece como "indicação", "solução" e "resposta". A partir de 1954, até o final dessa década, o aluno passa a utilizar como dispositivo: "raciocínio", "operação" e "resposta". As questões eram avaliadas uma a uma, a partir da resposta apresentada. Em alguns casos, foram encontrados acertos individuais das partes de uma única questão. Por exemplo, para os diferentes desenhos de figuras, solicitados na questão de geometria, avaliava-se separadamente o valor de cada uma das figuras. As provas não apresentavam nenhuma apreciação ou comentário particular em relação aos erros ou acertos apresentados. O processo de resolução dos problemas era assinalado com traços vermelhos, quando aparecia erro. Foi encontrada apenas uma prova com o registro: "tentativa", uma observação feita em vermelho pelo avaliador, uma espécie de aceitação de uma resposta "quase completa", para a qual foi computado meio ponto para a questão que valia dois pontos. No cálculo apresentado pelo candidato, a conversão apresentava erro apenas na última etapa. Ao que tudo indica, novos pressupostos se incorporavam ao ensino da aritmética da escola primária.

As questões, organizadas de forma diferente para cada ano, caracterizam-se por um número diversificado de itens propostos. Em 1931, a prova é composta apenas de três questões de aritmética e uma de geometria; de 1932 a 1938 desaparece a questão de geometria e apenas aparecem provas com três questões de aritmética básica; em 1939 e 1940 as provas começam a ser elaboradas com quatro questões. De 1941 a 1943 a prova era constituída de apenas cinco questões. Nessas duas décadas, os conteúdos matemáticos predominantes nas provas eram as quatro operações fundamentais, o sistema métrico decimal, operações com números racionais (fração e número decimal) e cálculo com sistema monetário brasileiro (contos de réis). As expressões numéricas, com representação fracionária e decimal, são introduzidas a partir de 1935. As questões predominantes, entre 1931 e 1949, são problemas com fortes marcas do contexto sócio-cultural do momento histórico.

Nos enunciados das questões, é possível reconstruir o núcleo programático que deveria ser contemplado pela escola primária daquele período: a supervalorização dos cálculos das operações fundamentais, o uso do sistema monetário cuja unidade era o real ou réis (3:000$000 = três mil réis), as operações com números racionais nas representações fracionária e decimal, o sistema métrico de medidas. Observa-se que as questões são de modalidades diversas, porém, de acordo com o regulamento oficial, elas deveriam apresentar-se sob forma de "problemas práticos", uma evidência da permanência das marcas utilitaristas sedimentadas na cultura escolar do século anterior.

De 1931 a 1943, as provas mostram que a maior parte dos problemas propostos eram problemas de aplicação, requerendo uma variedade de relações aritméticas, desde uma simples tradução de linguagem ao uso de algoritmos rotineiros em situações contextualizadas. Isso aponta para a importância da exatidão do registro da resposta do problema, certamente, um critério relevante na contabilização dos pontos. Nos problemas de aplicação, a maior parte dos erros assinalados não se refere à interpretação do problema, nem à falha na escolha das operações necessárias para busca da resposta certa do problema, indicando um índice mínimo de erros conceituais. O maior percentual de erros aparece nos cálculos, porém, não se tratavam de erros relacionados ao domínio de tabuada, uso de fórmulas ou regras algorítmicas. Constituíam-se em erros de "glissement metacognitivo" (deslizes), como o não alinhamento das parcelas, a perda da seqüência na aplicação do algoritmo, possivelmente resultante da quantidade excessiva de algarismos envolvidos no cálculo. Parecia tratar-se de erros originários da dificuldade de armazenar, na memória, a extensa quantidade de dígitos na escrita do número (principalmente de quantias com inúmeros zeros como requeria o sistema monetário da época). Outra evidência, detectada em relação aos erros, é o lugar da vírgula, quando se multiplicava valores monetários com quantidades que expressavam medidas de área, volume, capacidade etc, indícios de que a Aritmética era excessivamente algorítmica e memorística ainda em meados do século XX (figura 1.3).

Figura 1.3. Prova de Matemática de 1943 (Valente, 2001).



Aritmética

Calcular o valor da expressão: [illegible]

Duas pipas de vinho têm a mesma capacidade uma custa mais do que a outra. [illegible] a capacidade em dal de cada pipa, sabendo-se que o litro da primeira custa $1,50 mais do que o litro da segunda?

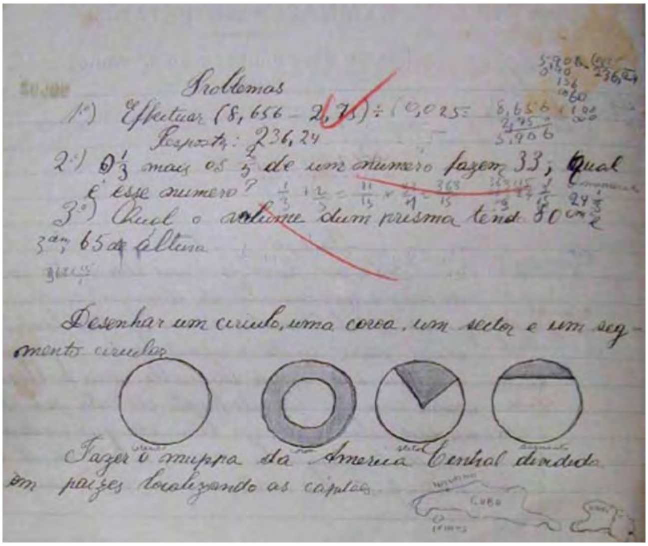
Um padeiro compra 135 kg de farinha a $260,00 cada 100 kg. Ele faz 6 fornadas de pão e em cada uma delas gasta 3,00 de fermento e Cr$ 14,00 de lenha. A quanto lhe sairá $\frac{1}{2}$ kg de pão se 3 kg de farinha dão exatamente 4 kg de pão?

Um comerciante vendeu a um freguês os $\frac{5}{11}$ de uma peça de fazenda e a outro $\frac{1}{2}$ do resto. Sabendo-se que lhe restaram ainda 20 metros pergunta-se quantos metros tinha a peça?

Os cálculos com frações eram os que apresentavam maior número de erros, em geral produzidos na resolução das expressões aritméticas que envolviam as quatro operações fundamentais, com suas regras e propriedades (os conhecidos carroções do cotidiano escolar). Contudo, há evidências nas provas de que os alunos sabiam estabelecer raciocínios corretos nas relações parte/todo. O maior número de acertos foi localizado na determinação do m.d.c. e m.m.c., em algoritmos isolados, mais indícios da ênfase dada às práticas algorítmicas na década de 40. As divisões, com números naturais (no regulamento, chamados de inteiros) eram resolvidas em sua totalidade pelo método convencional da divisão direta. O acerto de divisões, com números que apresentavam vírgulas e com mais de dois dígitos no divisor, surpreendeu. A maioria dos cálculos, apresentados pelos alunos, era realizada por algoritmos convencionais. Entretanto, formas diferentes e criativas foram encontradas nos encaminhamentos das resoluções de alguns problemas, o que contraria muitas afirmações de que a escola tradicional daquele período só trabalhava com memorização e impedia o desenvolvimento da criatividade dos alunos. Os erros, detectados nas questões de geometria, eram mínimos, porém, essas questões eram raras nas provas analisadas, confirmando o descaso dado a esse conteúdo no programa de matemática da escola primária. No entanto, foram identificadas, em provas de 2ª época do ano de 1931, desenhos de figuras geométricas contendo mais informações do que o solicitado, como um caso de classificação dos triângulos em que foram registrados símbolos para identificação dos lados iguais e dos ângulos congruentes (figura 1.4).

A partir da década de 50, as questões propostas apresentam-se menos contextualizadas e os problemas parecem perder o sentido prático valorizado pela Aritmética dos anos 30 e 40. Desaparecem as questões de geometria. Os erros produzidos pelos candidatos tornam-se mais numerosos em relação aos detectados nas provas de períodos anteriores; localizam-se, especialmente, na resolução de expressões numéricas e nos cálculos com frações. Nas provas dos anos 50 há um aumento do número de questões. De cinco, em 1950, passam a 10 questões em 1960, momento em que a prova apresenta-se datilografada e o candidato não precisa mais copiar cada questão.

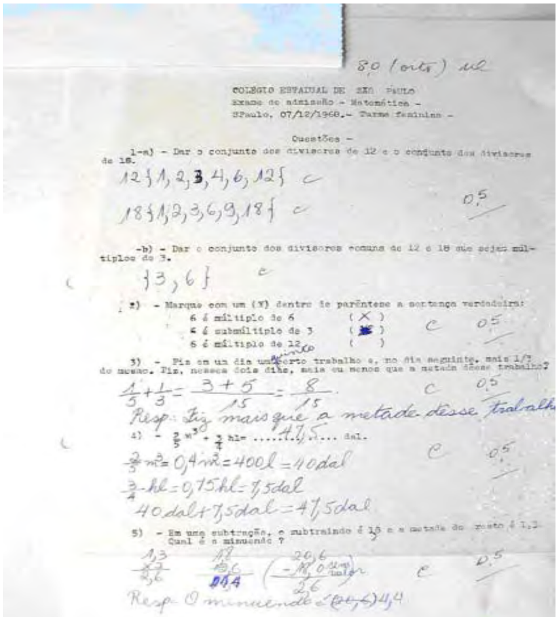
Figura 1.4. Prova de Matemática de 1931 (Valente, 2001).



Na década de 60, diminui o uso dos dispositivos nas resoluções das questões. A partir desse momento, as questões tomam um novo feitio. Em 1961, elas são em número de quinze até 1963, mesmo contendo cinco questões em forma de problemas, as provas apresentam, na primeira parte, 10 questões introdutórias, denominadas de "questões imediatas" que consistem em cálculos descontextualizados. Em 1962, essa parte é alterada para "questionário" e a décima questão é: "quais as operações da aritmética que têm a propriedade comutativa (ou da mudança de ordem)?" (*sic*). Nota-se, que a mudança na apresentação das questões ocorre no mesmo período que a Matemática Moderna era disseminada no país. Em 1963, as questões retomam a organização de 1961. Não aparece nenhuma questão sobre propriedades das operações, a não ser a habitual expressão numérica, porém, com operações mais complexas que nos anos anteriores (operações conjuntas com representações fracionárias e decimais). Em 1964, a organização da prova sofre novas alterações: são propostas apenas 10 questões, distribuídas em : "parte A" com seis questões; "parte B" com uma expressão aritmética relativa às quatro operações de frações. A novidade é que pela primeira vez a prova apresenta figuras em dois, dos três problemas propostos na "parte C". Em 1966, a prova é composta de apenas oito questões, distribuídas em três partes: seis na "parte A"; uma na "parte B" e três problemas na "parte C". A única questão da "parte B" é uma expressão com operações de decimais e frações, e o desafio colocado é uma dízima periódica simples que requer transformação. Em 1967, a prova consta de oito questões e, somente em 1968, os conteúdos da matemática moderna são oficialmente exigidos dos candidatos aos Exames de Admissão ao Ginásio da Escola Estadual de São Paulo. Entretanto, a "nova linguagem" não é o único conhecimento exigido dos candidatos a ingresso ao Ginásio. É o que mostra a prova de 1968. Organizada em forma de teste, é constituída de doze questões sendo que apenas duas referem-se à Matemática Moderna: "Questão VI : escreva o conjunto dos meses do ano que começam com a letra "j". Questão VII: escreva o conjunto das frações ordinárias próprias cuja soma dos termos seja 8; qual a intersecção desses conjuntos? As demais questões conservam a forma tradicional (figura 1.5).

Em 1969, último ano de realização de Exames de Admissão ao Ginásio, a prova apresenta cinco questões relativas à matemática moderna, duas sobre conjuntos e três, usando o termo "sentença". Nessa prova, os problemas são apresentados em etapas resolutivas e nos rascunhos são encontrados registros de resoluções que utilizam representações algébricas (uso de "quadradinhos" para incógnitas).

Figura 1.5. Prova de Matemática de 1968 (Valente, 2001).



8,0 (oito)

COLÉGIO ESTADUAL DE SÃO PAULO
Exame de admissão - Matemática -
SPaulo, 07/12/1968.- Turma feminina -

Questões -

1-a) - Dar o conjunto dos divisores de 12 e o conjunto dos divisores de 18.

12 {1, 2, 3, 4, 6, 12}

18 {1, 2, 3, 6, 9, 18}

0,5

-b) - Dar o conjunto dos divisores comuns de 12 e 18 que sejam múltiplos de 3.

{3, 6}

2) - Marque com um (X) dentro do parêntese a sentença verdadeira:

6 é múltiplo de 6 (X)
6 é submúltiplo de 3 ( )
6 é múltiplo de 12 ( )

0,5

3) - Fiz em um dia um quinto trabalho e, no dia seguinte, mais 1/3 do mesmo. Fiz, nesses dois dias, mais ou menos que a metade dêsse trabalho?

$\frac{1}{5}+\frac{1}{3}=\frac{3+5}{15}=\frac{8}{15}$ 0,5

Resp: Fiz mais que a metade desse trabalho

4) - $\frac{2}{5}m^3 + \frac{3}{4}hl =$ ....47,5.... dal.

$\frac{2}{5}m^3 = 0,4m^3 = 400l = 40dal$ 0,5

$\frac{3}{4}hl = 0,75hl = 7,5dal$

$40dal + 7,5dal = 47,5dal$

5) - Em uma subtração, o subtraendo é 15 e a metade do resto é 1,3. Qual é o minuendo?

0,5

Resp. O minuendo é 4,4

Considerações finais

Desde a República, o objetivo da escola primária brasileira era o de assegurar uma formação geral e ao mesmo tempo dar a alguns as ferramentas indispensáveis à sua inserção na sociedade e na vida econômica, naquilo que chamamos de vida ativa. O "ler, escrever e contar" foi sua principal oferta. Esta finalidade de preparar para a vida conferia-lhe uma posição e um status particular. Nesse processo de escolarização, a aritmética caracterizava-se mais como cálculo (aritmética) do que matemática. Seu progresso foi lento ao longo do tempo republicano. Só começa a apresentar mudanças significativas na década de cinqüenta, momento em que os princípios do ensino ativo já se encontravam melhor sedimentados nas práticas escolares.

A partir da década de sessenta, a escola primária começa a abrir-se para um contingente maior de alunos: todos deveriam ser escolarizados e o acesso ao ginásio começa a democratizar-se. As finalidades da escola mudam e com elas as práticas pedagógicas. Como indicam os Exames de Admissão ao Ginásio, nesse período há um deslocamento na tradicional cultura aritmética: os conteúdos apresentam-se menos "práticos" e começam a perder seu caráter algorítmico. É o momento de formar os espíritos, de preparar os alunos para um mundo que avança numa evolução rápida. É num contexto de crise social e ideológica, marcado pela predominância da técnica em oposição à velha sociedade agrícola e artesanal, que ocorre a reforma denominada Matemática Moderna. A matemática, mais que em outros tempos, passa a ser considerada elemento fundamental da formação dos indivíduos num mundo marcado pela predominância da ciência e da técnica. A matemática escolar deve atualizar-se enquanto linguagem das ciências e das técnicas, colocando-se em sintonia com o mundo moderno. Os representantes do movimento trabalham com duas grandes metas: modificar os programas escolares desde a escola primária até a secundária, dando um lugar importante à teoria dos conjuntos e às relações; utilizar novos métodos pedagógicos, dando um lugar especial à atividade dos alunos. Para construir a nova base do edifício matemático era fundamental agrupar noções, antes dispersas no programa. Como fazer isso? Não foi por acaso que Jean Piaget foi o convidado especial do Grupo Bourbaki. Ao longo de suas pesquisas, já havia compreendido o parentesco existente entre as estruturas matemáticas e as estruturas da inteligência. Nas discussões do movimento, Piaget descreve a maneira como ligar, por estágios sucessivos, as estruturas da inteligência da criança com as estruturas básicas da matemática. Ele insiste sobre o papel da atividade (real ou interiorizada) da criança no seu desenvolvimento intelectual, aquilo com que os pedagogos já tinham um primeiro contato ao trabalhar com os métodos ativos.

Em 1960, com a chegada da matemática moderna, há uma ruptura substancial na tradicional aritmética da escola primária que não se restringe à alteração dos conteúdos. Objetivos e métodos de ensino e de aprendizagem também são modificados, como mostram os registros da penetração da matemática moderna na escola primária. No conjunto das provas desse período é possível observar sinais sutis dessas mudanças, como a diminuição gradativa da elaboração do rascunho pelo aluno; este, quando existe, é muito confuso. As provas não apresentam mais a ordem e a boa escrita dos anos anteriores. O lápis e a tinta das antigas práticas da escrita dão lugar à caneta esferográfica, símbolo da modernidade tecnológica dos anos 60. Os registros dos avaliadores consistem em assinalar os erros (crucificá-los!), concentram-se apenas nas respostas. Não há registros de comentários do avaliador e as novas questões não requerem avaliação do processo resolutivo. Os registros desse processo são cada vez mais raros nas provas analisadas, pois as provas assumem a forma de "testes" e as questões requerem respostas imediatas. Essas marcas "tecnicistas", visíveis na nova diagramação das provas, mostram que uma nova racionalidade chegava à escola. A "novidade" dos conjuntos chega, assim, à escola primária emoldurada com a aura tecnicista que dominava a didática desse período, imprimindo uma "linguagem moderna" à aritmética do curso primário.

Nesse período, os cadernos começam a ser substituídos pelo "livro do aluno", repletos de figuras e de "testes", porém, sem a eliminação total dos tradicionais "exercícios de fixação". As provas, em forma de testes de múltipla escolha, requerem novas habilidades docentes: ser um bom planejador de testes, saber datilografia, saber lidar com o mimeógrafo, usar gabaritos na correção e dominar a nova linguagem da matemática, um professor mais "técnico" e melhor preparado para a "planomania", que marcou a fase tecnicista da educação brasileira.

Ao criar um espaço contínuo na programação dos dois cursos, outrora separados em termos de estrutura matemática, o movimento impregnado da nova racionalidade desenvolvimentista propiciou uma ruptura substancial na tradicional cultura aritmética da escola primária, antes valorizada como ferramenta útil e indispensável à vida cotidiana. Os conjuntos tiveram um lugar preferencial nos programas em detrimento do cálculo, em especial do cálculo mental abandonado nas práticas escolares.

As práticas avaliativas, como prática cultural, encerram vestígios dos códigos que a sociedade elegeu para que a instituição escolar pudesse cumprir suas finalidades educativas. As provas indicam que, no contexto educacional de onde se originam, vigia uma rigorosa seletividade imposta pelo sistema aos alunos que aspiravam prosseguir seus estudos. Mais do que isso, revelam como a escola resolvia a problemática da sociedade liberal: quem deveria ser eliminado e qual o perfil do conhecimento matemático desejável para o modelo econômico vigente. Ao por em circulação os novos códigos do avanço científico e tecnológico da sociedade, o Movimento da Matemática Moderna interfere nas marcas "memorísticas" e "letradas" do conhecimento matemático tradicional de forma política, mas não didaticamente correta. As intensas reformas propostas pelo sistema no conturbado período de 1930 a 1971, em especial a redistribuição do tempo e espaço escolar, já vinham atuando para que a Aritmética se tornasse menos rigorosa e enciclopédica, sem enfraquecer sua identidade formativa.

Segundo Chervel (1990), "o sistema pedagógico cria, adota, discute, abandona como entende seus métodos de ensino" (p. 193). Isso significa que a disciplina Aritmética tornou-se mais flexível, face à nova população que ingressava no ensino secundário?

Na indagação às fontes do estudo, fica evidente a preocupação dos agentes escolares com a conservação dos códigos de uma cultura clássica, em que a valorização do "ler, escrever, e fazer bem as contas", marcava a diferença entre as classes sociais. Mais que formar cidadãos passivos, a escola primária também garantia o acesso de boa parte da população à cultura letrada da escola secundária, fornecendo-lhe as ferramentas cognitivas indispensáveis à transposição da barreira colocada pelos Exames de Admissão ao Ginásio. Ao mesmo tempo, instigava anseios da população marginalizada para lutar pela democratização dessa almejada escolaridade.

Como afirmou o renomado historiador cultural Roger Chartier (1990), considerar o uso que as pessoas fazem dos objetos que lhes são distribuídos ou dos modelos que lhes são impostos é uma questão desafiadora para a história cultural, pois há sempre uma prática diferenciada na apropriação dos objetos colocados em circulação. A aceitação das novas mensagens opera-se segundo ele, "através de ordenamentos, de desvios, de reempregos singulares que são o objecto fundamental da história cultural" (pp. 136-7).

Ao levar as noções de conjuntos ao currículo da escola primária, o movimento certamente antecipou a abertura de fronteiras entre o primário e o ginásio, antes que fossem legalmente retiradas pela Lei 5.692/71. Se isso representou, parafraseando Dias (1997), uma passagem sem ponte, com mais rupturas do que continuidades, conseguiu, no entanto, derrubar muros medievais entre duas culturas distintas: a do ensino primário e a do ginásio, abrindo novos horizontes para as pesquisas no campo da educação matemática.

Nesse embate cabe indagar: a introdução dos conjuntos na escola primária ajudou os alunos a raciocinarem mais? A nova estrutura programática tornou mais eficazes os conhecimentos antigos? Com a nova linguagem, os cálculos da antiga aritmética conservaram sua utilidade para a vida cotidiana?

A história tem mostrado que, a partir do movimento, as pesquisas relativas ao ensino e à aprendizagem da matemática avançaram no Brasil. As contribuições da psicologia da educação, em especial as de Piaget, na esteira do movimento, avançaram e inauguraram uma nova tendência pedagógica nas práticas escolares de matemática, em especial nas das séries iniciais do atual ensino fundamental. Isso tem provocado um realinhamento da tradicional cultura matemática herdada do curso primário. Ao valorizar mais os princípios e as relações das operações aritméticas, antes que a algoritmização de outrora, aquilo que o movimento da matemática moderna não conseguiu concretizar mas que, certamente, deixou plantado entre os professores. Como observou Certeau (1992), “a mutação escolar não passa de um alinhamento tardio por uma deslocação das forças e das ‘disciplinas’ que articulam o país”. Ao tentar mudar as finalidades do ensino de matemática da escola primária, teriam os divulgadores do movimento subestimado o peso e a singularidade das tradições pedagógicas da cultura escolar?

Referências

Azanha, J. M. P. (1979). Democratização do ensino: vicissitudes da idéia do ensino paulista. *Cadernos de Pesquisa*, *30*(Set.), 13-20.

Azanha, J. M. P. (1990-1991). Cultura escolar brasileira: um programa de pesquisas. *Revista de Educação*, *dez., jan., fev.*, 65-70.

Azevedo, A., Cegalla, D. P., Silva, J., Sangiorgi, O. (1970). *Programa de Admissão* (24ª. ed.). São Paulo: Companhia Editora Nacional.

Backheuser, E. (1946). *Como se ensina a Aritmética.* Rio de Janeiro; Editora Globo.

Chartier, R. (1990). *A história cultural: entre práticas e representações.* Lisboa: Difel.

Certeau, M. De (1994). *A invenção do cotidiano: 1. Artes de fazer* (6ª. ed.). Petrópolis, RJ: Vozes.

Chervel, A. (1990). História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. *Teoria e Educação*, 177-229.

Dias-da-Silva, M. H. G. F. (1997). *Passagem sem rito. As 5as. séries e seus problemas.* Campinas/SP: Papirus.

Ghiraldelli Jr., P. (2006). *História da educação brasileira* (2ª ed.). São Paulo: Cortez Editora.

Julia, D. (2001). A cultura escolar como objeto histórico. *Revista Brasileira de História da Educação*, *1*, 9-43.

Lourenço Filho, M. B. (1956). *A pedagogia de Rui Barbosa* (2ª. ed.). São Paulo: Edições Melhoramentos.

Martins, M. A. M. (1984). *Estudo da evolução do ensino secundário no Brasil e no Estado do Paraná com ênfase na disciplina de Matemática.* Curitiba, Universidade Federal do Paraná, Faculdade Educação. Dissertação (Mestrado em Educação).

Nunes, C. (2000). O “velho” e “bom” ensino secundário: momentos decisivos. *Revista Brasileira de Educação*, *14*, 35- 60.

Pinto, N. B. (2008). Cultura escolar e práticas avaliativas. Em W. R. Valente (org.), *A avaliação em Matemática: história e perspectivas actuais.* São Paulo: Papirus.

Saviani, D. (2004). O legado educacional do "Longo Século XX" brasileiro. Em D. Saviani e outros, *O legado educacional do século XX no Brasil* (pp. 9-57). Campinas, SP: Autores Associados.

Valdemarin, V. T. (2004) Os sentidos e a experiência. Professores, alunos e métodos de ensino. Em D. Saviani e outros, *O legado educacional do século XX no Brasil* (pp. 163- 203). Campinas, SP: Autores Associados.

Valente, W. R. (Org.). (2001). *Os Exames de Admissão ao Ginásio. Arquivo da Escola Estadual de São Paulo*, Vols.1, 2 e 3. São Paulo: GHEMAT.

Vidal, D. G. (2006a). (Org.). *Grupos escolares: cultura escolar primária e escolarização da infância no Brasil (1893-1971*). Campinas, SP: Mercado das Letras.

Vidal, D. G. (2006b). Tecendo história (e recriando memória) da escola primária e da infância no Brasil: os grupos escolares em foco. Em D. G. Vidal (org.), *Grupos escolares: cultura escolar primária e escolarização da infância no Brasil (1893-1971)* (pp. 7-19). Campinas, SP: Mercado das Letras.

Sobre a autora:

Neuza Bertoni Pinto
Pontifícia Universidade Católica do Paraná
Rua Imaculada Conceição, 1155
Prado Velho, CEP: 80215-901, Curitiba, PR, Brasil
neuzard@uol.com.br

La Matemática Moderna en España

Maria Teresa González Astudillo, Universidad de Salamanca, Espanha

El movimiento de la Matemática Moderna en España abarcó un amplio periodo de tiempo que se inicia en el año 1961 y llega hasta casi finales del siglo XX. Dentro de este movimiento se pueden considerar varias etapas marcadas por los documentos oficiales elaborados por el Ministerio de Educación y Ciencia.

1 — El contexto político-educativo español

No se puede comprender la repercusión ni la forma en que se llevó a cabo la introducción de la Matemática Moderna en España sin tener en cuenta la situación política y los cambios que se estaban produciendo en aquel momento en este país. A comienzos de la década de los cincuenta, se inicia en España una nueva etapa en la evolución del régimen franquista (1939-1975) marcada por la vuelta de los embajadores[8], el Acuerdo del Convenio de Cooperación y Amistad con EEUU y una cierta reactivación de la vida política[9]. En los años sesenta se moderniza la economía española aunque manteniendo los principios políticos del régimen en lo que se llamó la tecnocracia. Se produjo un fuerte desarrollo económico en el que tuvo mucho que ver el turismo (consecuencia de la devaluación de la peseta[10]) y la emigración de cientos de miles de españoles desde

[8] En 1946 la ONU rechaza el ingreso de España y recomienda la retirada de los embajadores a sus miembros como represalia por el apoyo de España a la causa nazi tras la derrota de Alemania en 1945.
[9] En 1953 España ingresa en la ONU y se establecen las bases militares estadounidenses en España. Es en este momento cuando se produce la mayor apertura internacional del régimen franquista.
[10] La peseta ha sido la moneda de curso legal en España hasta el año 2002.

las zonas más deprimidas de España hacia diferentes países de Europa y América lo que fue una importante fuente de divisas.

La estructura social cambió radicalmente, creándose nuevos grupos sociales como los tecnócratas, se produjo un notable crecimiento de la clase media urbana vinculada al sector servicio y a las profesiones liberales y un masivo éxodo rural. Como consecuencia mejoraron las condiciones de vida, hecho que impulsó un cambio en los valores socioculturales y una reivindicación de mayores libertades políticas, económicas y culturales con lo que aumentó la conflictividad social.

En el plano educativo, se nombra en 1951 a Joaquín Ruiz Jiménez como Ministro de Educación Nacional. Bajo su mandato se dicta la ley de reforma del Bachillerato, pero principalmente se le reconoce como el padre del plan quinquenal de escuelas públicas por el cual se impulsaba la construcción de centros escolares. También dio lugar a un proceso de cierta modernización de la enseñanza con la toma de contacto con organismos educativos internacionales. (Sierra, González y López, 2006)

El 6 de febrero de 1953 una Orden Ministerial firmada por Joaquín Ruiz Jiménez aprueba los cuestionarios[11] que regirían las actividades didácticas en la escuela primaria y que fueron publicados el 1 de febrero de 1953, constituyendo los primeros cuestionarios de la legislación española. La enseñanza primaria se dividía en tres periodos: cuatro cursos de Enseñanza Elemental (seis a doce años),

[11] En España se conoce bajo el nombre de "cuestionario" la publicación del Ministerio de Educación correspondiente en la que inicialmente se distribuían la relación de contenidos de las diferentes asignaturas distribuidos por cursos o ciclos. Posteriormente a la relación de contenidos se añadió sucesivamente las orientaciones metodológicas, los criterios de evaluación y en los últimos publicados se indican también las competencias.

dos cursos de Perfeccionamiento (diez a doce años) y tres cursos de Iniciación profesional (doce a quince años).

En 1964, con la ley de 29 de abril[12] se declara obligatoria la escolarización de los seis a los catorce años[13]. Esta medida que ya era reclamada unánimemente por la sociedad española, fue posible gracias a las acciones llevadas a cabo para mejorar la infraestructura escolar desde 1956, fecha en la que se había hecho cargo de la Dirección General de Enseñanza Primaria Joaquín Tena Artigas. Los siguientes cuestionarios no se publicarán hasta 1965 y, en ellos, ya se puede observar la influencia de la Matemática Moderna.

En la Enseñanza Media, a partir de los años sesenta se produce una gran expansión y una "democratización" de la misma en el sentido de una ruptura de su carácter minoritario tradicional. La ley de Extensión de la Enseñanza Media de 14 de abril de 1962 (BOE[14] de 16 de abril) arbitró los medios legales necesarios para multiplicar por todo el país los tipos de centros y las variedades de estudio más idóneos. Para lograr dicho fin surgieron nuevos tipos de instituciones como estudios nocturnos para trabajadores, secciones filiales y colegios libres municipales adoptados; también secciones delegadas de institutos y la puesta en marcha del bachillerato por radio y televisión, que pronto tuvo considerable audiencia (Lorenzo Vicente, 2003).

---

[12] En ese momento era ministro de Instrucción Pública Lora Tamayo.

[13] Hasta ese momento solo había sido obligatoria hasta los doce años.

[14] BOE: Boletín Oficial del Estado. Diario de publicaciones de la legislación aprobada por el gobierno español.

Sin embargo, con el tiempo, el tipo de estudios de Bachillerato Elemental se había diversificado[15] de tal manera, que se llegó a la necesidad de una unificación. La ley de 8 de abril de 1967 (BOE de 11 de abril) vino a poner remedio a esta situación al establecer "la unificación del primer ciclo de la Enseñanza Media como instrumento de democratización de la cultura y de promoción social". De este modo el artículo primero de la Ley establecía que el primer ciclo de la Enseñanza Media, que comprendía los estudios de Bachillerato Elemental[16], constaría de cuatro cursos, en la forma establecida en el Ley de Ordenación de Enseñanza Media de 26 de febrero de 1953, y sería único para todos los alumnos de este grado.

En el Bachillerato Elemental se debían estudiar los conocimientos fundamentales, sin referencia a conocimientos profesionales o de índole laboral. Se trataba de que todos los alumnos recibieran la misma educación. Las razones en las que se fundamentaba esta formación eran por un lado socioeconómicas, puesto que en una sociedad industrializada no bastaba la simple alfabetización, y por otro, por las tendencias que venían observándose en los países occidentales.

> …el bachillerato de grado elemental no es necesariamente propedéutico para el superior y ha de proponerse una cultura general de base no exenta de instrumentación manual, que proporciona la formación conveniente a una diferenciación posterior y permita durante ella una orientación segura para que aquélla alcance la adecuación conveniente a vocación y

[15] La ley de enseñanza media de 1953 había posibilitado la implantación de bachilleratos especiales, lo que había dado como resultado la existencia de diversos bachilleratos que, pretendiendo una finalidad común, seguía, sin embargo distintos itinerarios y distinta duración con el perjuicio que esto ocasionaba a los alumnos (Lorenzo Vicente, 2003).

[16] Los alumnos accedían al Bachillerato Elemental a los 10 años de edad con lo que se superponían algunos estudios de la Enseñanza Elemental con la Enseñanza Media; los alumnos debían decidir a los 10 años qué camino tomar, o bien una formación elemental que les fuera formando en una profesión, o bien, la Enseñanza Media como preparación para la Enseñanza Superior.

> aptitudes. (Decreto[17] 1106/1967 de 31 de mayo, para el establecimiento de un nuevo plan de estudios del Bachillerato Elemental)

Los alumnos que estuvieran en posesión del título de bachiller elemental podrían acceder al Bachillerato Superior (quinto y sexto, éste último dividido en Ciencias y Letras).

Pero, a pesar de estas reformas, el sistema educativo español estaba caduco y desde los poderes públicos y desde la misma sociedad española se sentía la necesidad de dotar al país de un nuevo ordenamiento legal de educación. Por esto se inician los estudios de una nueva Ley; en febrero de 1969 se publicó el informe *La Educación en España, bases para una política educativa*, conocido popularmente como *Libro Blanco de la Reforma Educativa.*

La *Ley General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa* (LGE) que fue promulgada el 4 de agosto de 1970 (BOE de 6 de agosto), representa un cambio revolucionario en el sistema educativo español. Estos cambios venían determinados por el anacronismo del sistema educativo anterior, y por la estructura de la Enseñanza Primaria, truncada a los diez años y mal sincronizada con el Bachillerato Elemental. La nueva estructura establecida por la LGE integra la antigua Enseñanza Primaria y el primer ciclo de la enseñanza secundaria, constituyendo un tronco común de estudios, la Educación General Básica (EGB) para los niños de 6 a 14 años. Éste fue el mayor logro de la ley, extender la enseñanza a toda la población española manteniendo la gratuidad lo que conllevó la creación de una nueva infraestructura de centros, nuevas dotaciones

[17] BOE de 22 de junio y en Colección Legislativa de Educación y Ciencia (1967) ref. 202, p. 610.

de profesorado y un presupuesto necesario para poder realizar estos cambios con éxito y dividido en diez anualidades.

El sistema educativo se estructuraba en los siguientes niveles:

1. Educación Preescolar, de 2 a 6 años, no obligatoria, con dos etapas (Jardín de Infancia y Escuela de Párvulos)
2. Educación General Básica (EGB), de 6 a 13 años, obligatoria y gratuita, con dos etapas (Primera de 6 a 10 años y Segunda Etapa de 11 a 13 años)
3. Bachillerato, de 14 a 17 años, de carácter unificado y polivalente (BUP)
4. Estudios universitarios, precedidos de un Curso de Orientación Universitaria, con tres ciclos (diplomado, licenciado y doctor)

Por tanto, desde el punto de vista legislativo, la introducción de la Matemática Moderna se va a llevar a cabo en un sistema educativo obsoleto y tradicional pero con cierta amplitud de miras que va a impulsar la promulgación de la LGE.

2 — La introducción de la Matemática Moderna en España

Dos años después del coloquio de Royaumont (1959), el Centro de Orientación Didáctica (COD) del Ministerio de Educación Nacional organizó en Madrid una Reunión de Catedráticos de Matemáticas de Enseñanza Media con el título *Nuevas Orientaciones en la Enseñanza de las Matemáticas*. En dicha reunión, el Catedrático de Geometría de la Universidad de Madrid D. Pedro Abellanas definió la Matemática Moderna como sigue:

> En la Matemática Moderna se definen los conceptos que se emplean … y se establecen proposiciones entre ellos. La Matemática Moderna se ocupa no sólo de definir los conceptos y establecer las proposiciones sino de limitar el campo de validez de unos y otras. (Abellanas, 1961, p. 1795)

e informó sobre la necesidad de modificar el currículo de matemáticas del Bachillerato y adaptarlo a la orientación de las matemáticas modernas:

> Al no ser la Matemática Moderna una moda de un grupo de investigadores, sino la tarea genuina que tienen que realizar las generaciones actuales de matemáticos, de ello se despende que toda la matemática que siga se apoyará sobre esta matemática moderna y no sobre los Elementos de Euclides, como aconteció hasta el siglo pasado, y ello implica la necesidad de formar a las nuevas generaciones en el espíritu de la matemática que va a ser vigente en los años venideros. (*Revista de Enseñanza Media*, *92-94*, p. 1796)

La ponencia encargada de *La enseñanza de la Matemática en el Bachillerato* recogió esta recomendación, estimando que debería procederse al estudio temático de la Matemática Moderna desde los primeros cursos, señalando una serie de tópicos que deberían ser tratados: Conjuntos; Operaciones fundamentales con conjuntos; Producto de Conjuntos; Relaciones binarias; Aplicaciones entre Conjuntos; Concepto de Función; Equivalencia; Simetrización de un Semigrupo; Grupos; Reversibilidad de las Operaciones; Espacio Vectorial.

Conscientes de que no se trataba de cambiar unos temas por otros, sino de una nueva estructuración de las Matemáticas en la Enseñanza Media, dicha Ponencia propuso que se realizase un trabajo experimental previo. De este modo, a comienzos de 1962 se constituyó en el seno del Centro de Orientación Didáctica, la Comisión para el Ensayo Didáctico sobre la Matemática Moderna en los Institutos Nacionales de Enseñanza Media presidida por D. Pedro Abellanas, y cuyo trabajo piloto se desarrollará en los Institutos Cervantes (Madrid) por el profesor José Ramón Pascual Ibarra; Milá y Fontanals (Barcelona) por el profesor Juan Casulleras

Regás y Padre Suárez (Granada) por el profesor Francisco Marcos de Lanuza (Rico y Sierra, 1994).

A partir de ese momento, a través de la *Revista de Enseñanza Media,* se observa cómo el interés se desplaza precisamente hacia la Matemática Moderna en el Bachillerato: reuniones, cursillos, etc., giran alrededor de esta tendencia. Este movimiento culminaría, una vez aprobada la Ley General de Educación de 1970, en las Nuevas Orientaciones Pedagógicas para la EGB y los Nuevos Cuestionarios para el Bachillerato (Rico y Sierra, 1991).

El editorial de la *Revista de Enseñanza Media* del número 99-102 (1962) está dedicado a *La Matemática Moderna en el Bachillerato*. Las razones que se apuntan para su introducción en el Bachillerato son esencialmente las mismas que habían sido expuestas en el Coloquio de Royaumont en 1959 y en el Seminario de Dubrovnik, en 1960, y defendidas ardorosamente por los pioneros de la reforma:

> La Matemática Moderna proporciona esquemas más sencillos para poder presentar las mismas materias que actualmente se enseñan en el Bachillerato.
>
> Con la Matemática Moderna se pueden organizar dichas materias de modo más racional, con mayor unidad, no sólo desde el punto de vista matemático, sino atendiendo también a las ciencias que emplean las matemáticas como instrumento.
>
> Dos misiones primordiales tiene la Matemática en la Enseñanza Media
>
> Desarrollar la capacidad del alumno para el razonamiento deductivo con precisión
>
> Proporcionarle la técnica de cálculo con vistas a su aplicación a los problemas de la vida ordinaria y de otras ciencias.
>
> Ambos fines pueden lograrse con más eficacia mediante la Matemática Moderna, por las siguientes razones.
>
> Para poder razonar con precisión, es necesario definir previamente los conceptos con perfecta claridad
>
> Los conceptos son mucho más concretos y exactos, por estar más elaborados que con la Matemática de la escuela de Alejandría

> La técnica de cálculo se puede fundamentar con mucha mayor sencillez, empleando las ideas actuales, que tal como se viene haciendo
>
> La organización nueva de la Matemática permite distinguir entre las partes esenciales y accesorias, ya que en ella los conceptos y los métodos están perfectamente estructurados. Gracias a ello, se puede dedicar mayor tiempo y cuidado a los conceptos fundamentales, y prescindir de otros secundarios. Esta reducción de materias estimamos que es básica y encierra la clave de los valores didácticos de la Matemática Moderna. Formación no es lo mismo que acumulación de conceptos. Centrar las materias en lo fundamental permite disponer de tiempo para asimilar bien lo fundamental, con lo que lo accesorio quedará adquirido como simple consecuencia o ejercicio. La parte puramente formal o de cálculo puede dominarse mejor apoyada sobre conceptos claros y con pocas reglas que sobre un gran número de reglas apoyadas en conceptos mal definidos.
>
> El alumno, con la Matemática Moderna, puede llegar a discurrir con más precisión y claridad si llega a comprender bien unos cuantos conceptos fundamentales de una teoría y ha dispuesto de suficiente tiempo para manejarla hasta llegar a su asimilación. La asimilación de conceptos exige tiempo. Si no se dispone de él, no llega a comprenderse el concepto y todo se ha perdido. Lo mismo ocurre con la parte algorítmica: o se llega a hacer comprender que toda ella descansa en un pequeño número de reglas y el alumno llega a manejarlas con soltura, o se ha perdido todo el fruto práctico.
>
> Ha de organizarse, por tanto, la enseñanza de la Matemática de forma que las materias que se exijan tengan todas ellas carácter fundamental. Las que no posean este carácter deben quedar relegadas a simples ejercicios para desarrollar con los alumnos, pero no como materia básica. Debe encaminarse, en consecuencia, la asimilación de las ideas esenciales y de los fundamentos de las principales reglas de cálculo, debiendo aspirarse a que la parte algorítmica sea conocida por todos los alumnos sin vacilación. (Revista de Enseñanza Media, 1962, pp. 387-388)

Después de presentar estas seis razones, el Editorial lanza un anatema (Rico y Sierra, 1994) contra todos aquellos que no acepten esta reforma:

> El camino, ciertamente, será largo y será obstaculizado, sin duda, por la inercia y el apego a la ley del mínimo esfuerzo en algunos o por la propensión a no desprenderse de viejas rutinas y prejuicios docentes, que es preciso desmontar poco a poco, hasta llegar al adecuado reajuste, tanto doctrinal como metodológico. (p. 388)

En cuanto a la difusión de la Matemática Moderna se señala que se llevará a cabo mediante una labor previa de información y adiestramiento didáctico del profesorado a través de una serie de cursillos. Su implantación se comenzará por el Bachillerato Superior, se continuará con el Bachillerato Elemental y, finalmente, se extenderá a la Enseñanza Primaria. El Editorial concluye diciendo:

> La matemática moderna es la matemática del futuro, y -mirando al futuro- hay que ir preparando nuestro sistema pedagógico. (p. 389)

El Ministerio de Educación Nacional editó unos Cuadernos Didácticos dedicados a desarrollar temas de Matemáticas desde la orientación del Programa de las Matemáticas Modernas. Se editaron dos series, la primera, en 1961 bajo la denominación general de *Apuntes*. Estos apuntes se pueden considerar el fruto de la experimentación en quinto de Bachillerato y fueron redactados por los profesores Casulleras y Marcos de Lanuza como notas de clase, es decir, son los temas que se impartieron durante aquel curso por la Comisión presidida por Pedro Abellanas (figura 2.1).

Estés *Apuntes* están divididos en quince capítulos en los que se desarrollan los siguientes temas:

Elementos de teoría de conjuntos
Correspondencias entre conjuntos
Relaciones binarias
Operaciones
El número natural
Combinatoria
El número entero
El número racional
Polinomios y fracciones algebraicas
La recta vectorial

Primera parte: El plano vectorial
Segunda parte: El plano afín
El cuerpo de los números complejos
El número real
Funciones elementales
Primera parte: Progresiones Segunda parte: Estudio de la función exponencial

Figura 2.1. Portada de la edición de 1961 de los *Apuntes* de Pedro Abellanas.

Todos estos temas se desarrollan bajo un lenguaje algebraico-conjuntista, así las rectas del plano son conjuntos de puntos; los números, clases de equivalencia; las operaciones, aplicaciones,… como se puede observar en el siguiente extracto de este mismo libro (figura 2.2).

La segunda serie, editada en 1962 constaba de 16 capítulos, se denominaba *Apuntes para 6º curso* y fue redactada por los profesores Casullera Regás y Marco y Calero.

Fig. 2.2 Definición de operación en
Apuntes de Matemática Moderna (1962, p. 5).

CAPÍTULO IV

OPERACIONES

1. - EJEMPLOS Y DEFINICION

Ejemplo 1. Si en el conjunto de los números naturales se hace corresponder a cada par de elementos su suma, tenemos una aplicación llamada adición que a cada par (a, b) de números naturales hace corresponder un nuevo número natural, es decir, la adición en N es una aplicación de

N x N en N

Al par (3, 5) → 8.

Ejemplo 2. También la multiplicación de números naturales establece una aplicación de N x N → N.

Ejemplo 3. Designemos por S el conjunto de los segmentos situados sobre una recta dada. La adición de segmentos establece una aplicación de S x S → S.

Definición: Se llama *operación o ley de composición* entre los elementos de un conjunto A, a toda aplicación de A x A en A.

Desde el año 63 hasta el 66 se continúan publicando en la *Revista de Enseñanza Media* una serie de artículos, algunos de ellos muy extensos, bajo el título de "*Lecciones de Matemática Moderna*" desarrollados por diversos autores, que inicia el profesor Javier Etayo.

El COD convoca reuniones de Catedráticos de Matemáticas de Bachillerato para estudiar los contenidos de la matemática moderan y su adecuación didáctica; la *Revista de Enseñanza Media*, en su número 127-129, informa sobre la celebrada en Granada en abril de 1963. También se celebran Cursillos para Profesores no oficiales de Matemáticas en Sevilla en marzo de 1963 "con el fin de poner en contacto a los profesores de matemática no cualificados en estas disciplinas con las modernas técnicas científicas y con las actuales corrientes metodológicas". En el año 64 tiene lugar en la Universidad Internacional Menéndez Pelayo de Santander, también convocada por el COD, un Cursillo de matemáticas para profesores Adjuntos de una quincena de duración.

La actividad durante estos años es un claro exponente de la preocupación e interés del Profesorado de Matemáticas por actualizar su formación; se percibe la importancia de los cambios y se invierte tiempo y esfuerzo en dominar los nuevos contenidos. Pero la renovación curricular se reduce a un cambio radical en los contenidos y a un inicio de operativización en los objetivos; los aspectos metodológicos se reducen muchas veces a anécdotas y la evaluación se sigue manteniendo con los mismos planteamientos (Rico y Sierra, 1994).

3 — La Matemática Moderna en la Enseñanza Primaria

Se pueden considerar dos momentos de la Matemática Moderna en la Enseñanza Primaria: uno en los años 70 y otro en los 80. La primera vez que se hace referencia a la Matemática Moderna es a través de la Ley General de Educación en 1970, así, el 2 de diciembre de 1970 se aprueban por Orden ministerial de Villar Palasí, las Orientaciones Pedagógicas para la Enseñanza General

Básica[18] que concretamente, en relación con las matemáticas, hace énfasis en que éste área de conocimiento tiene una función esencialmente formativa en el sentido de que permite:

> Ordenar conocimientos y crear estructuras formales que las expresen. (*Vida Escolar*, 1970-71, 124-6, p. 25)

Para facilitar la creación de estas estructuras mentales se introduce la Matemática Moderna desde la primera etapa (6-10 años de edad). Esto permite, por ejemplo, la construcción de los números como una propiedad de los conjuntos, facilita la comprensión de estos conceptos antes de introducir los mecanismos correspondientes a las operaciones y evita el aprendizaje memorístico. Se menciona que el aprendizaje del simbolismo debe ser posterior a la comprensión de los conceptos

En la segunda etapa (10-14 años) se insiste en los aspectos más formales y formativos de las matemáticas y se pretende que el alumno logre claridad, rigor y precisión en el pensamiento. Otros elementos que se mencionan son la interrelación con otras áreas y la utilización de recursos lúdicos en todos los niveles de EGB tanto para la aceptación de leyes y normas como para el desarrollo de la creatividad.

Los objetivos específicos planteados para las matemáticas eran los siguientes:

> Desarrollo de la intuición espacial, distancia, proporción, perspectiva, etc.
>
> Capacidad de representación gráfica y construcción plástica.
>
> Adquisición del vocabulario básico para una adecuada expresión matemática

---

[18] BOE de 8 de diciembre de 1970, aunque se publicaron en un folleto que no lleva más referencia que "Imprenta Nacional del Boletín Oficial del Estado". Posteriormente, se publicaron también en la revista *Vida Escolar*, 124-125, de diciembre-enero de 1970-71.

> Logro de los mecanismos del cálculo operatorio elemental, partiendo de situaciones cuantificables.
>
> Adquisición de los automatismos de razonamiento lógico (demostraciones matemáticas)
>
> Desarrollo de la agilidad mental en el cálculo
>
> Capacidad de crear estructuras formales.
>
> Capacidad de interpretar funciones y tablas.
>
> Capacidad de leer y expresar datos cuantitativos. (*Vida Escolar*, 1970-71, 124-125, p. 27)

Las orientaciones metodológicas expresadas en forma de sugerencias de posibles actividades están divididas en apartados relacionados con capacidades que el niño debe adquirir: observación y manipulación; reconocimiento y resolución de situaciones problemáticas; intuición espacial; traducción del pensamiento cuantitativo en frases matemáticas; mecanismos y automatismos; vocabulario; relación, análisis, síntesis, abstracción, razonamiento lógico; creatividad. Por poner un ejemplo de una actividad de cada uno de estos apartados tendremos:

> Observar y manipular objetos.
>
> Formular problemas tomados de la vida real
>
> Experimentar movimientos de planos con figuras adecuadas
>
> Hacer observaciones que puedan traducirse en datos numéricos y clasificarlos.
>
> Establecer e identificar las propiedades de las operaciones que faciliten el mecanismo del cálculo operatorio
>
> Hacer inventarios de palabras relativas al espacio
>
> Establecer y representar relaciones entre los elementos de un conjunto
>
> Expresar libre y personalmente, situaciones y conceptos matemáticos (en definiciones, composiciones, representaciones gráficas, etc.). (*Vida Escolar*, 1970-1971, 124-6, pp. 27-9)

La LGE pretendía una reforma ambiciosa de la educación matemática, pero el profesorado no estaba profesionalmente preparado para llevar a cabo esta reforma; los cursos de adaptación fueron insuficientes, su implantación fue apresurada. Muchos maestros estudiaron los nuevos contenidos que tenían que impartir casi simultáneamente a sus alumnos, con esfuerzo personal considerable, sin orientación adecuada y con gran celo profesional.

En cuanto a los contenidos, se concedió gran importancia al estudio de conjuntos y estructuras algebraicas, que se consideraron como un fin en sí mismos planificando aprendizajes puramente ficticios, en algunos casos realizando auténticos disparates pedagógicos. La intervención de especialistas y profesores universitarios en la elaboración de los programas de matemáticas de la EGB, sin preparación didáctica alguna, llevaron a unos programas irreales, como por ejemplo, la presentación en séptimo de EGB, de las estructuras matemáticas mediante definición axiomática, calcadas de los que a su vez habían copiado a Bourbaki. Se provocó artificialmente un separación entre "matemática moderna" y "matemática tradicional" que confundía a niños y profesores, produciéndose un abandono notable del cálculo y la casi desaparición de la geometría intuitiva escolar.

Por otra parte, el haberse hecho cargo con carácter general de la formación de los escolares entre 11 y 14 años el Profesorado de EGB trató, en una primera época, de mostrarse competitivo en relación con la formación que se esperaba que tuvieran los alumnos al llegar a los Institutos. La preocupación por el nivel de los escolares, el énfasis en las destrezas formales, es una constante del trabajo en los últimos niveles de la EGB en estos años. Los maestros tienen gran cuidado en su imagen ante los profesores de Enseñanza Media. El debate sobre la falta de nivel de estos alumnos impregna toda la década y da lugar a multitud de intentos de conexión entre la EGB y el BUP.

Las Orientaciones Pedagógicas se mantuvieron hasta el curso 1981-1982, aunque muy pronto se empezó a sentir la necesidad de una rectificación, que comenzó a manifestarse en las sucesivas disposiciones en las que se abordaron algunas modificaciones puesto que las Orientaciones pecaban de vagas en algunos sentidos y confusas en otros. Era necesario ir al fondo de la cuestión y elaborar unos verdaderos programas que marcasen objetivos claros de la acción docente; que fueran aplicables a la situación real de las escuelas y de la sociedad, que sin menoscabo de la libertad y la iniciativa del profesor, ofreciesen un marco adecuado para proporcionar una base cultural homogénea a todos los niños españoles en la nueva estructura del Estado de las Autonomías, y que recogiendo cuanto de positivo hubiera en todas las realizaciones anteriores supusieran un salto adelante en la Educación Preescolar y General Básica, fundamento indiscutible del sistema educativo.

A lo largo del curso 1976-1977 se empezó a trabajar en este proyecto. Las Instrucciones sobre Aplicación de las Orientaciones Pedagógicas a los primeros cursos de EGB y coordinación con los niveles de Preescolar, aprobadas por Resolución de la Dirección General de 21 de octubre de 1977, constituyen el punto de arranque de un trabajo que a lo largo de cuatro años movilizó a cientos de profesores y especialistas y que levantó críticas y sugerencias de todos los sectores interesados mediante consulta pública.

Finalmente, el 9 de enero de 1981, el ministro de Educación Juan Antonio Ortega y Díaz-Hambrona publica el Real Decreto (BOE del 17), que ordena la Educación General Básica en dos etapas (Primera y Segunda) y tres ciclos

Ciclo inicial que comprende el primero y el segundo curso de EGB.

Ciclo Medio que comprende los cursos tercer, cuarto y quinto de EGB.

Ciclo Superior que comprende los cursos sexto, séptimo y octavo de EGB.

También fijan las enseñanzas mínimas para el ciclo inicial obligatorias en todo el territorio español[19] y el tiempo mínimo dedicado a la enseñanza de las áreas educativas.

Por orden ministerial de 17 de enero de 1981 (BOE del 21 de enero) se desarrolla el Decreto anterior y se establecen[20] los Niveles Básicos de Referencia[21] para Preescolar y Ciclo Inicial obligatorios en toda España, excepto en los territorios autónomos[22] que tienen reconocidas competencias educativas, los cuales procedieron a elaborar sus propias Ordenes en desarrollo del citado Decreto: en Cataluña, por Orden de la Consejería de Educación de 11 de mayo de 1981 y en el País Vasco, por Orden de la Consejería de Educación del 17 de junio de 1981.

[19] En el área de Matemáticas son coincidentes casi en su totalidad con los establecidos en las Instrucciones sobre aplicación de las orientaciones didácticas.

[20] Los programas de las materias van a recibir el nombre de Programas Renovados con una estructura que pretende ser coherente entre las diversas áreas de enseñanza. En esta estructura se distinguen lo que son los bloques temáticos que se subdividen en temas de trabajo, en cada tema de trabajo se establecen los Niveles Básicos de Referencia, que vienen a ser como los objetivos que se han de alcanzar obligatoriamente (incluyen conocimientos, actitudes, valores, hábitos, destrezas y técnicas) y por último un conjunto de actividades que se proponen como idóneas para alcanzar cada uno de los objetivos propuestos a modo de sugerencia.

[21] Por Resolución de la Dirección General de Educación Básica de 11 de febrero de 1981 (Colección Legislativa del Ministerio de Educación, febrero de 1981, páginas 113-144) se dan normas y orientaciones metodológicas para la aplicación de los programas. En la Revista *Vida Escolar*, núm 208, septiembre-octubre de 1980 se encuentran las tres disposiciones citadas, así como gran cantidad de sugerencias y actividades para el desarrollo de la enseñanza. A estos nuevos programas se les conoció con el sobrenombre de Programas Renovados.

[22] Es en este momento en el que empiezan a cobrar relevancia la Autonomías, de forma se dota a las regiones autónomas históricas (País Vasco, Cataluña y posteriormente Galicia) de cierta competencias en materias de gestión sanitaria, educativa, etc.

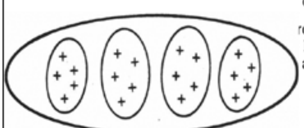
El desarrollo de los Niveles Básicos de Referencia se establece de forma diferenciada para cada una de las materias separando los contenidos de Preescolar y de los del Ciclo Inicial. En el área de matemáticas se inician con una introducción en la que se menciona el nivel evolutivo del niño en clara referencia a Piaget, se identifican las características más relevantes que determinan los contenidos a impartir y la metodología más adecuada para ello. Las teorías de Piaget, interpretadas de un modo sesgado e interesado, fueron utilizadas acríticamente, como fundamento del programa de las Matemáticas Modernas en nuestro país, sin que existiese una fundamentación sólida en alguna teoría del aprendizaje, ni una reflexión didáctica autóctona. Tratando de seguir una línea piagetiana, esta organización señala que el Ciclo Inicial (RD de 9 de enero de 1981) de seis a ocho años, se caracteriza porque durante el mismo se cierra y finaliza el periodo de transición del pensamiento prelógico a la etapa de las operaciones concretas. Esto implica adoptar a lo largo del ciclo una metodología claramente globalizadota. Los bloques temáticos indicados para Matemáticas son los siguientes: Conjuntos y correspondencias. Numeración y operaciones, Medida, Geometría y Topología. En esta introducción se hace referencia a algunos métodos de enseñanza de moda en el momento como los principios básicos del aprendizaje de las matemáticas según Dienes (principio dinámico, principio de constructividad y principio de variabilidad perceptiva) o la clasificación de ejercicios de Mialaret:

> Ejercicios de iniciación siempre que se vaya a introducir alguno nuevo.
>
> Ejercicios de aplicación de lo introducido. Son básicos y deben ser, en lo posible, individuales.

> Ejercicios de fijación o de entrenamiento. Corresponden a los anteriores variándose para evitar la monotonía.
>
> Ejercicios de control que pueden ser colectivos. Generalmente se toma uno de los básicos de cada niño y se valora. (*Vida Escolar,* 1980, 208, p. 42)

A continuación se establecían de forma detallada los contenidos del ciclo inicial. unificando los dos cursos de este ciclo, sin hacer por lo tanto distinción entre primero y segundo de EGB. Cada tema de trabajo se iniciaba con una sucinta explicación que justificaba la selección de los contenidos y el método de enseñanza más adecuado para a continuación especificar los objetivos (de cada tema de trabajo) y asociados a ellos sugerencias de actividades que permitían desarrollarlos a modo de ejemplo, pero en ningún caso obligatorias. Por ejemplo (figura 2.3), para la enseñanza de la multiplicación de números naturales se proponen las siguientes actividades a los niños

Figura 2.3. Actividades de los programas renovados de Educación Infantil sobre el concepto de operación, p. 64.

OBJETIVOS	ACTIVIDADES
3.3.1. Expresar mediante una multiplicación una suma de sumandos iguales.	- Dada una suma de sumandos iguales, siendo éstos superiores a dos y existiendo como máximo nueve sumandos, el alumno la escribirá en forma <le .producto. :Propuesta una multiplicación de dos factores, uno ,como máximo 2Q y el otro 'Como máximo 6, el niño lo escribirá como sl1ma de sumandos iguales.
3.3.2. Reconocer y utilizar - el signo "X".	- Vale la actividad del objetivo número 3.3.1.
3.3.3. Iniciar la auto matización de la operación de multiplicar por una cifra.	Propuestas al alumno cuatro operaciones de multiplicar en las que el multiplicando no exceda de dos cifras y el multiplicador de una, el alumno ha de resolver, al menos, tres de ellas sin error. Que el alumno construya, con material y numéricamente, su propia tabla de multiplicar.
	ropuestas cinco multiplicaciones en las que el ,primer factor sea su· perior a 10 e inferior a 100, y en las que el otro .factor sea 10, 100 6 1.000, el alumno l1a de ser capaz de resolverlas mentalmente. *Ejemplo:* 15 X 10= ; . 5 X 100 = 12 X 10= ; 7 X 100 =
3.3.4. Realizar multiplicaciones mentalmente por la unidad seguida de ceros.	

En dichas actividades se percibe claramente la dependencia del lenguaje conjuntista, aunque al mismo tiempo se insiste en la construcción de los conocimientos a partir de actividades manipulativas adecuadas al nivel cognitivo de los alumnos de esta edad.

También se publicó el Decreto que fija las Enseñanza Mínimas para el Ciclo Medio y las del Ciclo Superior, que fueron objeto de los correspondientes programas. Considerando que a partir de los ocho años y hasta los once, el pensamiento infantil entra en otro estadio de su desarrollo, el periodo de las operaciones concretas (en el que se consolidan las habilidades que surgen en el período anterior) y que esto ocurre al mismo tiempo que se agrupan y escolarizan los alumnos, se establece que los cursos correspondientes a esos años (3º, 4º y 5º) tienen entidad suficiente para constituir un nuevo ciclo, el ciclo Medio (RD de 12 de febrero de 1982). En este ciclo, se preconiza el paso de la metodología globalizadora a la interdisciplinar (sorprendentemente dejan de utilizarse argumentos piagetianos para esta orientación metodológica). Los bloques temáticos del Ciclo Medio son: Conjuntos y Relaciones, Conjuntos Numéricos, Magnitudes y Medida y finalmente Topología y Geometría.

> El tratamiento del tema correspondiente a los Conjuntos y Relaciones se realiza de la siguiente forma:
>
> Determinando los conjuntos por comprensión y extensión
>
> Aclarando los conceptos de pertenencia e inclusión de elemento y conjunto unitario e introduciendo los símbolos
>
> Introduciendo la noción de subconjunto a partir del conjunto referencial y deduciendo de aquí la idea de conjunto complementario en un conjunto dado
>
> Estudiando las operaciones unión e intersección, complementación y producto cartesiano, cuya apoyatura simbólica se irá introduciendo gradualmente, así como el manejo de diagramas de Venn y en árbol. Se comprobarán las propiedades asociativa y conmutativa en el caso de la unión e intersección.

> El conjunto vacío no redefinirá, sino que se introducirá con ejemplos a través de intersecciones de conjuntos disjuntos.
>
> En cuanto a las relaciones se estudiarán las correspondencias, las aplicaciones y de éstas las biyectivas.
>
> Asimismo se estudiarán clasificaciones bajo un punto de vista gráfico o mediante particiones del conjunto. También se estudiarán las relaciones de orden. (*Vida Escolar*, 1981, 210, p. 9)

Se indica en el programa que el tratamiento de estos conceptos se hará primero de forma manipulativa, luego oral, seguidamente gráfica y por último de forma simbólica apoyándose de juegos y material. El objetivo principal del tema es servir como cimientos para la construcción posterior de los diferentes conjuntos numéricos, para desarrollar el razonamiento lógico y para interpretar hechos geográficos y económicos.

El número natural surge a partir de la noción de conjuntos coordinables y se incluye no sólo su aspecto cardinal sino también el ordinal. En cuanto a las operaciones se indica la importancia de su comprensión pero también se hace énfasis en la automatización de los algoritmos. Se abarcan las cuatro operaciones básicas distinguiendo en relación con la división entre división entera y división exacta. Se inicia la potenciación, el trabajo con números decimales (sólo en su vertiente aditiva) y la introducción de las fracciones de forma intuitiva a partir de ejemplos y sin incluir todavía las operaciones. Aunque el énfasis se hace en el manejo de los símbolos matemáticos y en la automatización de los algoritmos como se ha indicado anteriormente, también se incluyen en las propuestas la resolución de algunos problemas de aplicación sencillos en los que intervienen las operaciones.

Los temas correspondientes a las magnitudes han sido tratados en la enseñanza primaria a lo largo de su historia como un tema central. En los Programas Renovados se plantea la dificultad de la distinción entre magnitud, cantidad de magnitud, unidad de medida y medida de una magnitud

> Una magnitud es un semigrupo abeliano y arquimediano, pero no pretendemos que el alumno llegue a captar esta estructura abstracta, son que el alumno maneje modelos concretos, y este manejo sea formativo y vaya ordenando su mente, capacitándola para un recto raciocinio.
>
> (…) La medida de una magnitud M es una correspondencia unívoca m, entre el conjunto M y un conjunto numérico. También se llama medida a la imagen de un elemento de M en esta correspondencia, que obviamente es un número.
>
> Para que la correspondencia unívoca m quede determinada se establece una unidad de medida, que es la cantidad de magnitud a la cual corresponde el número 1. (*Vida Escolar*, 1981, 210, p. 22)

En las actividades que se proponen a los alumnos se refleja claramente la preocupación por estos diferentes términos. Hemos de recordar que uno de los aspectos que impulsó la introducción de la Matemática Moderna fue la preocupación por la utilización precisa del lenguaje matemático (figura 2.4).

Figura 2.4. Actividades sobre medida en los Programas renovados de Ciclo Medio (p. 23).

OBJETIVOS	ACTIVIDADES SUGERIDAS
3.2.1. Reconocer la operación de medir como una correspondencia.	- Si recuerdas que la medida de una magnitud M es una correspondencia unívoca entre el conjunto M y un conjunto numérico, ¿qué elemento imagen tiene la medida unidad?
3.2.2. Realizar medidas de longitud. tomando distintas unidades.	- Utilizando la regla o una cinta métrica mide: El largo de la clase .... El ancho de la mesa del profesor .... La altura de la puerta .... El largo de la pizarra

Los conceptos geométricos que se tratan en el ciclo medio son: el plano, punto, recta, semiplano, semirrecta, segmento, etc intentando dar una definición de tipo analítico o constructiva. También se introducen conceptos como regiones angulares, ángulos rectas perpendiculares. Y se incluyen las simetrías y los movimientos mediante el uso de la regla y el compás. En cuanto a las formas geométricas planas se parte de la más básica: el triángulo, y a partir de ella se construyen el resto de los polígonos. También se estudian la circunferencia y el círculo. Las formas espaciales se estudian de forma descriptiva, analizando y describiendo algunas propiedades de la pirámide, el prisma y algunos cuerpos redondos. Se considera la geométrica como parte interdisciplinar con otras materias como las Ciencias Naturales, la Química, la Geografía, la Estadística y muy particularmente la Física.

Según la teoría piagetiana, desde los once años a los catorce se desarrolla progresivamente el pensamiento hipotético deductivo, por ello, interpretando administrativamente a Piaget, se establece para este periodo otro ciclo, el Ciclo Superior (6º, 7º y 8º de EGB) (RD de 12 de Noviembre de 1982). En este ciclo se consideran los siguientes bloques temáticos: Conjuntos Numéricos, Divisibilidad en N, Geometría Plana, Funciones, Polinomios, Proporcionalidad de magnitudes, Geometría del Espacio y Estadística Descriptiva.

Se introducen el conjunto de los números enteros con sus operaciones, lo que incluye la dificultad de la presencia de los números negativos, y el conjunto de los números raciones con sus operaciones, cuya dificultad radica en los números negativos fraccionarios. El objetivo principal es dar a conocer los distintos conjuntos numéricos y lograr el automatismo del cálculo con ellos, hasta la radicación con números racionales.

La divisibilidad se inicia en relación con la existencia de número inverso en el conjunto de los números naturales. Además de los criterios de divisibilidad , se intenta conseguir el automatismo del cálculo del MCD y mcm. y su aplicación a las operaciones con números racionales.

La Geometría se sigue trabajando bajo se vertiente intuitiva. En el Ciclo Superior se trata de reconocer y caracterizar las figuras geométricas fundamentales y las relaciones entres sus elementos. Se incluyen algunas definiciones constructivas y la demostración de algunos teoremas cuyo apoyo gráfico sirve para la iniciación en el razonamiento hipotético-deductivo y favorece la creatividad. Se hace énfasis en las relaciones que se pueden establecer entre la geometría y otras ramas del conocimiento como:

> Conexionar la proporcionalidad con las escalas y construcción de mapas, máquinas simples, temperatura y presión, los vectores con las fuerzas, etc.

En el apartado correspondiente a la medida se incluyen: medida de segmentos, medida de ángulos, operaciones con segmentos y ángulos, adición y multiplicación por un número racional positiva (sistemas sexagesimal y centesimal), medida de superficie, área de los polígonos.

El concepto de función debe expresa la idea de variación y obviar el aspecto estático relacionado con su fórmula. A partir de situaciones reales que pueden aparecer en los periódicos o en los libros de Ciencias Sociales se pueden trabajar gráficas relacionadas con movimientos bursátiles, gráficas de temperaturas, medias climáticas, de carestía de la vida o de dependencia de la edad de una persona y la frecuencia de enfermedad que dan sentido a las funciones lineales y parabólicas. Estos son los tipos de funciones que se trabajan en este ciclo dando una especial importancia a la tabla de funciones y a los gráficos. Las funciones lineales darán sentido al concepto de proporcionalidad y las cuadráticas serán el soporte de nociones como concavidad y convexidad. A pesar de las indicaciones anteriores en torno a este concepto, algunas actividades siguen manteniendo el lenguaje puramente conjuntista tanto en su aspecto verbal como en el simbólico (figura 2.5).

El estudio de los polinomios se limita a su reconocimiento, a la descripción de los elementos que lo forman (coeficientes, indeterminada, grado) y a conseguir los automatismos de las operaciones con ellos hasta llegar a la Regla de Ruffini. Este tema enlaza con el correspondiente a las ecuaciones.

Figura 2.5. Actividades sobre le concepto de función en los Programas Renovados de Ciclo Superior (p. 60).

4.1. FUNCIONES

OBJETIVOS	ACTIVIDADES SUGERIDAS
4.1.1. Adquirir el concepto de función. distinguiendo dominio y rango.	1. ¿Cuáles de las relaciones siguientes son funciones? Indica el conjunto dominio y el conjunto rango. a)(1,3) (-1, -3) (2,6) (3,9) (-2, -6). *b)* (4, 3) (5, -3) (5,4) (2, 5) (4, 5). *e)* (2, 1) (1, 1/2) (3, 3/2) (6, 3). *d)* (1,5) (2,10) (1,3) (3,15).
4.1.2 . Representar funciones lineales.	1. Representar funciones del tipo: y = ax e y = ax + b. y = 1/2x Y = -3 y = 2x -3 y Y= -x y = x = -x + 2 y y = -3x + 4 x = 1 = -2x 2. Utilizando las gráficas de las funciones anteriores, conociendo originales hallar sus imágenes y viceversa.

El tema de proporcionalidad relaciona las magnitudes con las funciones lineales y las operaciones con números racionales. Las magnitudes que se trabajan son: peso, masa, longitud, área, dinero, número de obreros, … También se establecen relaciones interdisciplinares con las ciencias sociales (aspectos económicos, comercio, etc.) con las ciencias de la naturaleza (coeficientes de proporcionalidad, en las fuerzas, las presiones, Ley de Boyle, etc.).

Al contrario que en épocas precedentes, la geometría del espacio aparece después de la geometría del plano. La razón de este cambio, reside en que en este bloque se trata de que el profesor enseñe a ver al alumno los cuerpos de tres dimensiones proyectados en el plano y a ver en el espacio planos, puntos y rectas, así como las relaciones entre ellos. Para la enseñanza de esta parte de la geometría se indica que:

> La geometría no debe ser enseñada asiladamente sino que debe relacionarse con todas las otras partes de la matemática y con otras asignaturas. Relacionar los husos esféricos con los husos horarios, el estudio de la esfera con el de la tierra, el volumen con la densidad y peso, los cuerpos geométricos con la estructura molecular y los sistemas de cristalización son algunas de las posibilidades que se pueden presentar en el estudio de este bloque temático. (*Vida Escolar*, 1981, 210, p. 71)

El bloque correspondiente a la Estadística se limita a tratar algunos aspectos de Estadística Descriptiva: confección e interpretación de tablas y gráficos, el estudio de algunas características fundamentales de una distribución, medidas de tendencia central y de dispersión. A pesar de ser conceptos elementales, los programas renovados insisten en algunas de las dificultades que entraña su comprensión:

> Hay libros enteros dedicados a explicar cómo se puede mentir con la Estadística. Estas mentiras provienen generalmente de la forma incorrecta de seleccionar la muestra, no haciendo uso de los procedimientos de muestreo de la deficiente utilización de las escalas en la construcción de gráficos y de la desafortunada elección de las medidas o valores que van a describir la muestra. (*Vida Escolar*, 1981, 210, p. 77)

Al igual que con otros temas, también se pone de manifiesto las relaciones interdisciplinares que pueden establecerse entre la Estadística y otras asignaturas o materias fundamentalmente relacionadas con las ciencias Sociales y de la Naturaleza.

Los programas correspondientes a este ciclo no entraron en vigor ya que su aplicación fue suspendida por el MEC al producirse el cambio de gobierno en las elecciones de Octubre de 1982.

Los Programas Renovados fueron fruto de un equilibrio entre profesores e inspectores de matemáticas de bachillerato, que velaban por la pureza de los contenidos, y de algunos inspectores de EGB que aportaban las consideraciones didácticas, carecían de base empírica y no contaron con especialistas de educación matemática. Casi desde el momento de su publicación fueron objeto de fuertes críticas. Una sección de las II Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (IIJAEM) celebradas en Sevilla en Abril de 1982, estuvo dedicada al análisis y crítica de esos programas, contando con la presencia de los técnicos del MEC que habían elaborado la parte correspondiente a Matemáticas. Las comunicaciones presentadas y los participantes en los debates consideraron la acción emprendida como absolutamente necesaria, puesto que explicitaba los objetivos mínimos a conseguir por todos los alumnos en la educación básica. No obstante, señalaron múltiples deficiencias en los citados Programas contradicción existente entre las ideas expresadas en las introducciones de los bloques y su desarrollo posterior, falta de jerarquización de los contenidos, falta de sentido en la incorporación formal de cuestiones sobre teoría de conjuntos, inexistencia de interdisciplinariedad, ausencia en los bloques temáticos de aplicaciones de las matemáticas y conexión con la realidad, contradiciendo las citas de la introducción, ausencia de orientaciones metodológicas en el desarrollo de los contenidos.

Ahora desde una cierta distancia, sorprende de estos Programas Renovados que fundados en la teoría de Piaget (epistemología genética), se tradujesen en un desarrollo curricular con el énfasis puesto en los objetivos a conseguir, y no en la metodología adecuada para el desarrollo de las habilidades cognitivas del niño.

4 — La Matemática Moderna en la enseñanza secundaria

Hay dos momentos diferenciados en relación a la Matemática Moderna en el Bachillerato: su introducción generalizada para toda España en los cuestionarios de 1967 y la consolidación en el plan del 75.

En relación a la primera de estas etapas, los cuestionarios del Bachillerato elemental (de primero a cuarto, 10-14 años) se publicaron en el BOE del 30 de septiembre de 1967 (OM de 4 de septiembre). Son unos cuestionarios donde aparecen por primera vez contenidos propios de la Matemática Moderna: conjuntos, correspondencias, aplicaciones, etc. e incluyen unas amplias orientaciones metodológicas.

Además, en el plan de 1967 se introducían una serie de orientaciones metodológicas. Tres eran las ideas fundamentales que presidieron la redacción de estos cuestionarios:

1. Todos los temas que figuran en ellos, su ordenación en los distintos cursos y su exposición adecuada a los niveles mentales de los alumnos han sido ampliamente experimentados durante varios años en numerosos centros oficiales y no oficiales de todo el país
2. Aquellos cambios que aparecen deseables, pero sobre los cuales no se ha adquirido todavía una experiencia suficiente, se han aplazado hasta una posible renovación ulterior
3. Suprimir los temas del cuestionario anterior que no son esenciales y aquellos otros que por su contenido o por el pretendido rigor con que tradicionalmente se exponían,

> resultaban inasequibles como la experiencia docente de muchos años ha demostrado. (BOMEC, 60, p. 498)

La distribución de las materias se hizo por cursos agrupando los temas alrededor de las estructuras algebraicas fundamentales y prescindiendo por lo tanto de la tradicional separación entre Aritmética y Geometría. Así, en primero la estructura dominante es la de grupo (números naturales y segmentos); en segundo, el grupo y el anillo (números enteros, segmentos orientados, movimientos, ángulos como giros); en tercero, aparece la estructura de cuerpo con los números racionales; finalmente en cuarto como ya están las estructuras necesarias se hace énfasis en la sedimentación y revisión de todo lo incluido en el ciclo y se introducen algunas nociones sobre polinomios.

Las orientaciones metodológicas se hacían para cada curso del Bachillerato elemental. La teoría de conjuntos, las aplicaciones y relaciones constituían nociones básicas sobre las que construir las Matemáticas. Así, por ejemplo, en segundo curso se decía que la introducción de las relaciones de equivalencia posibilitaría presentar los números enteros como clases de pares equivalentes de números naturales, sin dejar por ello de utilizar recursos intuitivos que ilustraran este proceso. En tercero se hace la distinción entre aplicación y función, reservando esta última para el caso de conjuntos numéricos, la proporcionalidad se considera, por tanto, una aplicación por ser una correspondencia entre magnitudes.

Los cuestionarios par 5º y 6º no llegaron a publicarse aunque sí lo hicieron dos textos piloto para quinto y sexto curso[23] (1967), que

[23] Estos libros fueron escritos por los profesores Pedro Abellanas Cebollero, Joaquín García Rúa, Alfredo Rodríguez Labajo, Juan Casullera Regas y Francisco Marcos de Lanuza.

pueden considerarse como los nuevos cuestionarios (figura 2.6) y cuyo desglose de temas era el del cuadro 2.1.

Prácticamente su contenido y desarrollo coincidían con los *Apuntes* publicados por el MEC pocos años antes y que ya se han mencionado en el segundo apartado de este capítulo. El lenguaje conjuntista de la Matemática Moderna está presente en todos los temas, así el concepto de función (figura 2.7).

Figura 2.6. Portadas de los textos piloto de Matemática Moderna para 5º y 6º curso de Bachillerato.

Cuadro 2.1 — Desglose de temas de los textos piloto para quinto y sexto curso (1967).

Texto piloto de 5º curso (14-15 años)	Texto piloto de 6º curso (15-16 años)
Teoría de conjuntos Correspondencias Relaciones binarias El número natural Combinatoria El anillo Z de los números enteros La divisibilidad en el anillo Z El cuerpo Q de los números racionales Estadística Polinomios División de polinomios en Q	El número real Producto escalar Funciones de variable real Derivada de una función Plano euclídeo Las cónicas Nociones de Estadística Aplicaciones de la derivada El número complejo

Fracciones algebraicas Sucesiones Número real El plano vectorial El plano afín Función de variable real La función exponencial y logarítmica Funciones trigonométricas	Cálculo integral

Figura 2.7. Definición del concepto de función en el texto piloto de 6º curso, 1969 (p. 38).

2. Concepto de función de variable real.

Cada subconjunto $C \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,define una correspondencia o función f del conjunto de los números reales ,en sí mismo. La forma de establecer tal correspondencia es, por tanto, la siguiente: para cada $x \in \mathbb{R}$ tiene como imágenes los números $y \in \mathbb{R}$ tales que $(x, y) \in C$.

Esta correspondencia se representa en la forma

$$x \to f(x) = y.$$

Al conjunto original de f se le suele llamar variable independiente, y al conjunto imagen de f se le llama variable dependiente.

El segundo periodo viene marcado por la implantación de la Ley General de Educación (LGE) que estableció un nuevo Bachillerato calificándolo como unificado y polivalente (BUP); unificado porque conducía a un título único y polivalente porque comprendía, además de las materias comunes y las optativas, una actividad técnico- profesional.

La duración el Bachillerato se desarrollaba en tres cursos (14-17 años) y se establecía el Curso de Orientación Universitaria (COU), como preparación a los estudios superiores. Sin embargo, estas normas para el Bachillerato tardaron cinco años en desarrollarse. En el BOE de 13 de Febrero de 1975 se publica el Decreto de 23 de Enero por el que se aprueba el Plan de estudios de Bachillerato y se regula el Curso de Orientación Universitaria. Más tarde, en el BOE de 18 de Abril de 1975 se desarrolla el decreto anterior estableciéndose los cuestionarios para las distintas materias del Bachillerato Unificado y Polivalente.

Los programas de BUP especificaban un listado de temas correspondientes a cada curso junto con unas breves indicaciones de la progresión y el nivel que se deben dar a cada uno de estos temas, las orientaciones metodológicas son por lo tanto más bien escasas y se fundamentan en la propia estructura de las matemáticas. Se consideraba formando parte del Área de Ciencias Matemáticas y de la Naturaleza y su objetivo principal era:

> El área de Ciencias Matemáticas y de la naturaleza tratará de capacitar al alumno para comprender los fenómenos naturales, científicos y técnicos de su entorno. Se resaltará la importancia del mecanismo lógico implícito en el razonamiento científico habituando al alumno a los métodos deductivo e inductivo y a la experimentación. (BOE, 18 de abril de 1975)

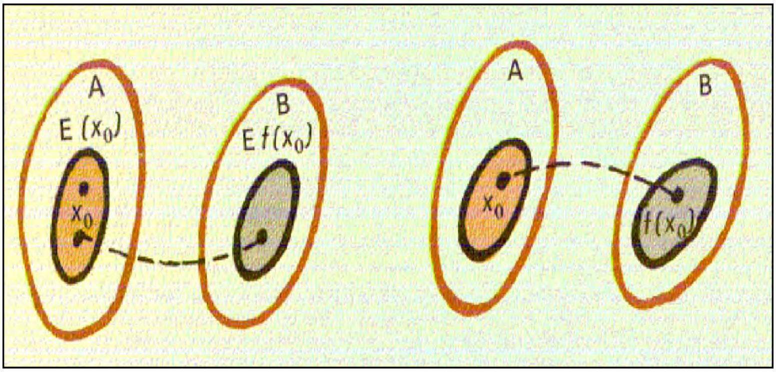
Las Matemáticas se dividen en tres asignaturas, una por curso, con un carácter eminentemente estructuralista. Los temas especificados por curso eran los del cuadro 2.2

En este momento, en España, surgen algunas editoriales potentes como consecuencia de la democratización de la enseñanza, el *babyboom* de los 60 y el mayor nivel de vida de las familias y por ello son numerosos los libros de texto que van a desarrollar este currículo y que van a presentar una matemática estructural y axiomática, pero a la vez proponen actividades para el alumno y las explicaciones se apoyan en ellas (Sierra, González y López, 2005). Se advierte un cierto cambio en estos autores sobre la enseñanza de las matemáticas ya que se empieza a considerar al alumno como sujeto que aprende, tratando de explicar este aprendizaje desde las teorías piagetianas. La idea predominante es la de presentar las matemáticas desde la corriente de la Matemática Moderna, con rigor pero al mismo tiempo viables para los alumnos. Sin embargo, a nuestro juicio, el rigor se mantiene a los largo de los textos, y hay una distancia entre los propósitos expresados por los autores y su concreción al presentar los conceptos. El lenguaje conjuntista sigue estando presente como se puede comprobar en la imagen de la figura 2.8.

Cuadro 2.2. Contenidos de Matemáticas por curso (1975).

PRIMERO	SEGUNDO	TERCERO
Combinatoria. Probabilidad Introducción al número real. Aproximación decimal. Radicales. Variable Estadística. Medidas de posición central y dispersión Cuerpo de los números complejos Anillo de polinomios. Divisibilidad. Cuerpo de fracciones Funciones polinómicas de variable real. Representación gráfica Resolución de ecuaciones, inecuaciones y sistemas Sucesiones. Progresiones. Interés compuesto y anualidades.	Límite de sucesiones. El número e. Cálculo de límites Función real de variable real. Límite. Continuidad Funciones exponencial y logarítmica. Representación gráfica y propiedades Funciones circulares. Representación gráfica y propiedades. Concepto de derivada. Función derivada. Primitivas de una función Vectores en el plano y en el espacio. Estructura de espacio vectorial El plano afín. Introducción del espacio afín. Geometría afín plana.	Producto escalar. El plano euclídeo. El plano métrico. Trigonometría plana. Estudio del número complejo en forma polar. Operaciones. Geometría métrica plana. Cónicas Calculo diferencial. Aplicaciones Cálculo integral. Aplicaciones Variable aleatoria. Distribuciones binomial y normal Distribuciones bidimensionales. Rectas de regresión. Correlación.

Figura 2.8. Diagrama de conjuntos en
Marcos y Martínez (1973, p. 58).



En general, en casi todos los textos de aquella época se siguió presentando la Matemática Moderna, aunque ya se empezó a percibir la necesidad de un cambio de orientación en la enseñanza de la Matemática que se plasmaría en la nueva ley educativa del año 90. No fue, sin embargo, tan brusco el cambio en la metodología, términos, notación, etc. utilizada tanto por maestros como por profesores de secundaria que se sentían muy influenciados por la formación y la veintena de años enseñanza los mismos conceptos de la misma forma. De esta forma, en la práctica, la influencia de la Matemática Moderna se ha sentido prácticamente hasta la actualidad.

Referencias

Lorenzo Vicente, J. A. (2003) *La enseñanza media en la España franquista (1936-1975)*. Madrid: Editorial Complutense.

Rico, L. y Sierra, M. (1991) La comunidad de educadores matemáticos. En A. Gutiérrez (ed.) *Área de conocimiento didáctica de la matemática*. Madrid: Síntesis.

Rico, L. y Sierra, M. (1994) Desarrollo de la Educación Matemática en España desde la guerra civil (1936) hasta la Ley General de Educación.

En J. Kilpatrick, L. Rico y M. Sierra, *Educación Matemática e Investigación.* Madrid: Síntesis.

Sierra, M., González Astudillo, M. T. y López, C. (2003) El concepto de continuidad en los manuales españoles de enseñanza secundaria de la segunda mitad del siglo XX. *Educación Matemática,* 15 (1), 21-50

Sierra, M., González Astudillo, M. T. y López, C. (2005) *Evolución histórica de la enseñanza de las Matemáticas a través de contenidos y edades.* (Memoria inédita)

Fuentes

Abellanas, P. (1961). La Matemática Moderna y la Enseñanza Media. *Revista de Enseñanza Media, 92-94*, 1775-1804.

Abellanas, P. y otros (1967). *Matemáticas Modernas. Texto piloto. 5º curso.* MEC: Madrid.

Abellanas, P. y otros (1967). *Matemáticas Modernas. Texto piloto. 6º curso.* MEC: Madrid.

BOE 11 de abril de 1967.

BOE 22 de junio de 1967.

BOE 30 de septiembre de 1967.

BOE 6 de agosto de 1970.

BOE 13 de febrero de 1975.

BOE 18 de abril de 1975.

BOE 21 de enero de 1981.

Casullera, J y Lanuza, M. (1962). *Matemática Moderna. Apuntes.* MEN: Madrid.

Marcos, C. y Martínez, J. (1973). *Matemáticas generales. COU.* SM: Valencia

Revista de Enseñanza Media (1962). La Matemática Moderna en el Bachillerato. *Revista de Enseñanza Media,* 99-102, marzo-abril 1962, 385-389.

Revista de Enseñanza Media (1962) nº 92-94.

Revista de Enseñanza Media (1963) nº 127-129.

Vida Escolar (1970-1971) nº 124-126.

Vida Escolar (1980) nº 208.

Vida Escolar (1981) nº 210.

Sobre a autora:

Maria Teresa González Astudillo
Facultad de Educación
Universidad de Salamanca
Pº Canalejas, 169. 37008 Salamanca, Espanha
maite@usal.es

Programas e livros didáticos modernos para o ensino de matemática no Brasil: de Euclides Roxo a Osvaldo Sangiorgi

Wagner Rodrigues Valente, Universidade Federal de São Paulo, Brasil

Durante todo o século XIX e primeiras décadas do século passado, o ensino de Matemática no Brasil, sobretudo o secundário, herdou práticas diretamente oriundas dos exames para ingresso aos cursos superiores. Essas práticas sedimentaram uma Matemática dividida em ramos distintos da Aritmética, da Álgebra e da Geometria. Expresso numa lista de *pontos*, o programa de ensino desses ramos matemáticos orientava a escrita de apostilas e livros didáticos de Matemática. Escritos dirigidos aos estudantes, que em grande parte freqüentavam cursos preparatórios, esses textos intentavam promover, rapidamente, a fixação dos pontos para as provas orais e escritas, que davam acesso ao ensino superior. A origem desses materiais remonta a processos constantes de reorganização e adaptação de obras clássicas de origem francesa: os antigos *tratados* ou *elementos* de Aritmética, de Álgebra e de Geometria.

No século XX, dois momentos fundamentais ocorreram com vistas à discussão dos programas de ensino. A tentativa de ruptura da organização segmentada da Matemática escolar é algo comum a ambos. A construção dos novos programas mostrou que os dois momentos apresentaram-se imbuídos do mesmo propósito de modernizar a Matemática escolar. Tanto as propostas da década de 1930 quanto aquelas de 1960 buscaram uma integração dos ramos distintos da Matemática, herdados de tempos anteriores. A modernização perseguida nessas duas épocas da história da educação matemática remete à apropriação feita no Brasil de dois movimentos que buscaram a internacionalização da matemática escolar.

A dinâmica de apropriação das propostas internacionais de reformas para o ensino de Matemática no Brasil mostrou uma "simbiose" de programas de ensino e elaboração de livros didáticos pelos protagonistas dessas ações. Euclides Roxo e Osvaldo Sangiorgi constituíram ícones de modernização. Assim, este texto tem como objetivo analisar a participação desses professores na elaboração de propostas para a transformação da Matemática escolar no Brasil.

1 — A matemática escolar no Brasil, 1830-1930

Desde a Independência do Brasil (1822), o debate educacional ganhou vigor com o tema da criação de uma universidade. Afinal, não havia mais sentido mandar para Portugal, sobretudo, filhos da elite brasileira, para obter sua formação acadêmica no país do qual ficamos independentes. Houve, assim, urgência por parte dos dirigentes em iniciar o debate com vistas à implantação de cursos superiores. A criação de uma universidade não foi adiante. No entanto, foram criados os Cursos Jurídicos para diplomar a classe dominante brasileira, cursos para onde acorriam os estudantes da ex-Colônia, na Universidade de Coimbra, em Portugal. A partir de 1827, passaram a existir dois no Brasil: um no nordeste, em Pernambuco; outro no sudeste, em São Paulo.

A criação dos cursos jurídicos promoveu o crescimento de classes preparatórias, instituições destinadas a suprir os estudantes do cabedal de conhecimentos exigidos nos exames para ingresso a esses cursos superiores. Espalharam-se, assim, pelo país cursos de retórica, filosofia, francês, latim e geometria — justamente matérias indicadas como necessárias à formação prévia que deveria apresentar o aspirante a bacharel em Direito (Valente, 1999).

Tempos mais tarde, a elite dirigente brasileira voltará suas atenções para o ensino secundário. Será em 1837, com a criação do Imperial Colégio de Pedro II, que esse ensino ganhará uma referência nacional. O ensino das primeiras letras pouco ou nada compareceu nas diretivas nacionais. As províncias – que posteriormente se transformariam nos Estados brasileiros — acabariam tendo esse nível escolar sob sua responsabilidade.

Apesar de ter o Colégio Pedro II como referência, o secundário passou mais de cem anos sem ganhar sistematização. Longa marcha foi percorrida para a implantação da seriação obrigatória. De 1837 até, praticamente, 1930, o ensino foi conduzido, depois da escola do ler, escrever e contar, pelos cursos preparatórios. Tais cursos funcionavam sob a regência dos programas de exames de acesso ao ensino superior. Sem a obrigatoriedade de cursar o ensino secundário por séries e, ainda, sem a necessidade de apresentar diploma desse ensino para ingresso nas faculdades, os estudantes tinham por tarefa somente passar nos exames vestibulares, para garantirem vaga no ensino universitário. Desse modo, pouquíssimos alunos optavam por se diplomarem no ensino secundário, para seguirem ao superior. Em um ou dois anos, obtendo aprovação nos diferentes exames, rumavam para os cursos de Medicina, Engenharia, Direito, dentre outros.

A Matemática escolar do século XIX e também a das primeiras décadas do século XX, a Matemática do ensino secundário, poderá ser investigada, assim, a partir dos exames preparatórios. Muito mais do que obras didáticas e mesmo programas, as apostilas dos cursos preparatórios e os pontos dos exames constituem o melhor indicativo – os melhores vestígios, traços de outros tempos — para o estudo do ensino de Matemática nessa época. A Matemática escolar apresentava-se fragmentada em ramos distintos da Aritmética, da Álgebra e da Geometria, cada um deles com os respectivos pontos para os exames escritos e orais. À hora dos exames, o sorteio decidia o que caberia a cada aluno explicar. Ao longo do século retrasado, pouquíssimas foram as alterações na forma e conteúdo dos exames.

Através de Lima (1869) será possível analisar a organização dos pontos para as provas. Trata-se de um tipo de material preparado especialmente para uso dos estudantes em tempos de avaliação para ingresso no ensino superior[24]. Mais adiante neste texto (figura 3.1), como exemplo, apresenta-se o "Ponto 1" desse livreto-apostila.

A Matemática escolar do tempo dos preparatórios pautava-se, assim, pelos pontos. Com a lista deles, o candidato se preparava para as provas escritas e orais. A preparação lançava mão de apostilas elaboradas a partir dos pontos. Saber cada um deles de cor era o modo de poder ingressar no ensino superior. Desse modo, cada faculdade selecionava os pontos a serem estudados dentro do conjunto das disciplinas. Um a um, os exames constituíam barreiras a serem ultrapassadas pelos candidatos. A cada exame realizado

[24] O texto de Jerônimo Pereira Lima, intitulado *Pontos de geometria para provas escritas nos exames da instrução pública da Corte*, constitui-se em obra rara pertencente ao acervo da Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro. O material com 45 páginas foi impresso em 1869, pela Tipografia de Pinheiro, Rio de Janeiro.

com sucesso, um certificado de aprovação. De posse de um conjunto de certificados dos vários exames, ganhar-se-ia o direito à matrícula no curso superior escolhido.

Figura 3.1. Página do livro *Pontos de geometria para provas escritas nos exames da instrução pública da Corte de Jerônimo Pereira Lima* (1869).

PONTO 1*

Volume, área, linha reta, linha quebrada, linha curva, superfície plana, superfície curva, circunferência, círculo, arco, raio, diâmetro, setor, segmento. Determinar a medida comum de dois arcos do mesmo círculo ou de círculos iguais e sua relação numérica. No mesmo círculo ou em círculos iguais, os ângulos centrais são proporcionais aos arcos que os medem.

Consta este ponto de definições, de um processo por aplicação prática e de um teorema.

SÃO AS DEFINIÇÕES

Volume é o espaço que ocupa um corpo.
Área é a porção de superfície plana limitada por linhas retas que se encontram duas a duas ou limitada por uma curva fechada.
Linha reta é a linha cuja direção marca o mais curto caminho entre dois pontos; entendendo-se que linha é a extensão considerada com uma só dimensão: o comprimento.
A linha reta é inextensível e inflexível.

PROCESSO POR APLICAÇÃO PRÁTICA

Determinar a medida comum de dois arcos do mesmo círculo ou de círculos iguais é achar um terceiro arco que aplicado nos dois, neles se contenha certo número de vezes exatamente.
Para se achar esse terceiro arco, o processo é o seguinte: (*segue a descrição pelo autor*)

TEOREMA

No mesmo círculo ou em círculos iguais, os ângulos centrais são proporcionais aos arcos que os medem (*segue a demonstração pelo autor*).

No que toca às primeiras décadas do século, o estudo da pesquisadora Vera Cristina Machado Santos, que analisa as práticas pedagógicas das disciplinas Aritmética, Álgebra e Geometria/Trigonometria, concluiu que:

> Na década de 1920, herdeira de todo o sistema de exames preparatórios, o peso relativo do aparelho docimológico foi muito grande. Independente da legislação que impunha a seriação escolar, foram os exames que definiram as disciplinas. A prática escolar se assentou nos exames que, apesar da existência centenária, quase nada mudaram. (Santos, 2003, pp. 159-160).

Por fim, então, pode-se dizer que, até a década de 1930, a Matemática escolar do ensino secundário brasileiro teve na lista de *pontos para exames preparatórios* a forma real de representar o programa de ensino de Matemática. Essa lista orientou a edição de livros e materiais didáticos presentes nos colégios e cursos preparatórios.

2 — Euclides Roxo e a primeira modernização do ensino de matemática no Brasil

Na história do Brasil, a chegada da década de 1930 marcou uma ruptura política, econômica e social. A revolução encabeçada por Getúlio Vargas levou ao poder a cisão com modelo econômico agrário-comercial, e instalou um projeto urbano-industrial para o país. Desde a Proclamação da República (1889) até essa época, o país viveu tempos que passaram para a história como "República Velha" ou "Primeira República". A revolução de 1930 trouxe a "República Nova". Com ela, a marca do nacionalismo varguista. Os novos tempos retiraram uma autonomia relativa que tinham as províncias, depois transformadas em estados, em prol de um centralismo político-administrativo. No âmbito educacional, houve a criação do Ministério da Educação e Saúde Pública, que teve como tarefa inicial organizar o ensino no país. Foi através da reforma que ficou conhecida como "Francisco Campos" que o Brasil ganhou pela primeira vez um sistema nacional de ensino; foi, ainda, através dessa reforma que surgiu um programa para uma nova disciplina escolar denominada "Matemática".

Criado em 1837, o Colégio Pedro II, nome do segundo imperador do Brasil, constituiu por mais de cem anos uma referência para o ensino secundário do país. Essa referência se deu por via de programas, livros e organização didático-pedagógica de seu funcionamento. Tão importante como modelo de ensino, os diretores que passaram pelo Colégio tinham, por assim dizer, *status* de Ministro da Educação. Esse cargo, na Instituição, foi exercido por dez anos (1925-1935) pelo professor de matemática Euclides Roxo. Roxo assumiu a direção num momento em que a legislação educacional passou a obrigar a seriação para o ensino secundário, sem mais aceitar que o ingresso ao ensino superior fosse feito por intermédio de cursos preparatórios aos exames vestibulares. Prática que vinha se arrastando desde, praticamente, o início do século XIX.

Euclides de Medeiros Guimarães Roxo nasceu em Aracaju, estado de Sergipe, no dia 10 de dezembro de 1890. Morreu no Rio de Janeiro em 21 de setembro de 1950.

Figura 3.2. Euclides Roxo (1890-1950).

Na direção do Colégio Pedro II, Roxo promoveu uma revolução no ensino de matemática. Em 1929 conduziu, junto com a Congregação dos Lentes do Pedro II, a aprovação de um decreto que criou a disciplina "Matemática", resultado da fusão das disciplinas Aritmética, Álgebra e Geometria.

Euclides Roxo nasceu, praticamente, com a República. Toda sua trajetória profissional alicerçou-se na República Velha. Roxo casou-se com uma filha do almirante Alexandrino de Alencar, Ministro da Marinha de quase todos os presidentes da Primeira República. Sua ligação com os homens do poder da velha oligarquia foi, portanto, estreita. Nada causou admiração, então, que Roxo tivesse se apressado em pedir demissão das funções que ocupava como Diretor do Externato do Colégio Pedro II, vinda a revolução que levou Getúlio Vargas à presidência. No entanto, ao que tudo indica, por ingerências do tio de sua mulher, Armando de Alencar, riograndense como Getúlio e Ministro do Supremo Tribunal Federal, Roxo foi rapidamente reconduzido à direção do Colégio.

Com a chegada de Vargas ao poder, Roxo foi chamado pelo ministro Francisco Campos para compor uma comissão que laborou os novos programas nacionais de ensino. Assim, Euclides Roxo levou para o âmbito nacional, suas idéias e experiências que tinham acabado de ser implantadas no Colégio Pedro II. As propostas resultaram do seu modo de apropriação do primeiro movimento de internacionalização da matemática escolar; utilizando sobretudo as idéias que Félix Klein levou para a criação da Comissão Internacional do Ensino de Matemática, em Roma, no ano de 1908. Com elas, Euclides Roxo deu sustentação à sua iniciativa de fusão dos ramos matemáticos, eliminando as disciplinas autônomas Aritmética, Álgebra e Geometria, para criar uma única disciplina escolar. A nova disciplina teve em sua constituição a tarefa de utilizar o conceito de *função* para promover a fusão das disciplinas autônomas[25].

No âmbito da Reforma Francisco Campos, o primeiro programa de ensino da Matemática foi publicado em 30 de junho de 1931 (Bicudo, 1942, p. 137). No preâmbulo que antecede os programas de ensino, num texto escrito por Euclides Roxo, constava:

A Matemática será sempre considerada como um conjunto harmônico cujas partes estão em viva e íntima correlação. A acentuação clara dos três pontos de vista – aritmético, algébrico e geométrico – não deve, por isso, estabelecer barreiras intransponíveis, que impeçam o estudante de perceber as conexões entre aquelas disciplinas (Bicudo, 1942, p. 157).

Em seguida, o texto descrevia como deveriam ser ministrados os conteúdos de Aritmética, Álgebra e Geometria de modo a que esses ramos fossem integrados no ensino, constituindo a disciplina Matemática. Essa integração seria feita com o estudo de *função*. No texto, Roxo explicou que

> a noção de função constituirá a idéia coordenadora do ensino. Introduzida, a princípio, intuitivamente, será depois desenvolvida sob feição mais rigorosa, até ser estudada, na última série, sob ponto de vista geral e abstrato. Antes mesmo de formular qualquer definição e de usar a notação especial, o professor não deixará, nas múltiplas ocasiões que se apresentarem, tanto em Álgebra como em Geometria, de chamar a atenção para a dependência de uma grandeza em relação à outra ou como é determinada uma quantidade por uma ou por várias outras. (Bicudo, 1942, p. 159)

Seguindo-se essas orientações pedagógicas, vêm os itens a serem abordados no ensino da nova disciplina escolar Matemática. Na

[25] Para um estudo mais detalhado da criação da disciplina matemática leia-se Valente (2004a, 2004b).

primeira série do curso secundário, por exemplo, com três horas semanais, deveriam ser ensinados:

1. Iniciação geometria

   Principais noções sobre as formas geométricas. Áreas do quadrado, retângulo, paralelogramo, triângulo e trapézio; circunferência e área do círculo. Volumes do paralelepípedo retângulo, do cubo, do prisma triangular, do cilindro e do cone circular (retos). Fórmulas.

2. Aritmética

   Prática das operações fundamentais. Cálculo abreviado. Exercício de cálculo mental. Noção de múltiplo e de divisor. Caracteres de divisibilidade. Decomposição em fatores primos: aplicação ao m.d.c e ao m.m.c. Frações ordinárias e decimais. Operações com as frações. Explicação objetiva pelo fracionamento de objetos ou d grandezas geométricas. Sistema métrico decimal. Prática das medidas de comprimento, superfície, volume e peso. Operações com os números complexos: unidades de tempo e de ângulo.

   Sistema inglês de pesos e medidas. Quadrado e raiz quadrada de números inteiros e decimais: aproximação no cálculo da raiz. Traçado de gráficos.

3. Álgebra

   Símbolos algébricos; fórmulas; noção de expoente. Números relativos ou qualificados. Operações. Explicação objetiva das regras dos sinais. Cálculo do valor numérico de monômios e polinômios. Redução de termos semelhantes; adição e substração. Multiplicação de monômios e polinômios em casos simples. Explicação objetiva pela consideração de áreas. Potências de monômios. Quadrado de um binômio. Primeira noção de equação com uma incógnita; resolução de problemas numéricos simples.

Antes desse programa, como se disse, em 1929, Euclides Roxo implantou no Colégio Pedro II a nova disciplina Matemática. Junto dessa novidade, Roxo fez publicar, no mesmo ano, uma obra didática totalmente inovadora: *Curso de Mathematica Elementar*. Em realidade, foi publicada para representar um guia para o ensino da nova proposta.

A pesquisa de Arlete Petry Werneck mostrou que programa de ensino e livro didático constituíram-se integradamente:

> O livro "Curso de Mathematica Elementar", de 1929, comporta todo o programa do Colégio Pedro II de 1929.

> Percebemos que nenhum item do programa ficou sem correspondente no livro. Apesar do livro não ter uma correspondência totalmente seqüenciada com o programa, a análise nos levou a concluir que um foi feito para o outro. (Werneck, 2003, p. 85)

Começando por geometria espacial volumétrica e encadeando, de modo integrado, o conteúdo matemático Roxo vai, passo-a-passo, de forma heurística, levando alunos a aprenderem utilizar o conceito de *função* como elemento unificador da aritmética, com a álgebra e a geometria. Através do processo intuitivo, o livro gradativamente vai conduzindo o aluno a abstrações em níveis cada vez maiores. Tudo em conformidade com as instruções metodológicas que este ajuntou aos programas de ensino publicados em 1931.

A publicação da obra foi seguida de intensos debates[26] que mobilizaram o professorado, sobretudo os autores-professores e suas editoras, no sentido da recusa ao modo como Roxo indicou devesse ser ensinada a nova disciplina. A relutância em fundir os diferentes ramos matemáticos ficou patente. E, como todo manual revolucionário, a proposta didática de Euclides Roxo não ultrapassou a segunda edição: o livro resultou num fracasso editorial. O próprio Euclides Roxo abandonou seu programa original ao interromper a escrita de sua coleção, no terceiro volume; se juntou a outros autores, numa nova coleção, que vinha se revelando um sucesso editorial, fruto de apropriações e ajustes que tornaram menos inovadora a proposta para ensino da Matemática, procurando trazê-la para mais perto de muitas das práticas pedagógicas já sedimentadas no cotidiano escolar.

---

[26] A dissertação de Rocha (2001) analisa todos os debates e polêmicas motivados pela nova proposta de organização do ensino de matemática.

Apesar da situação revolucionária do Brasil da década de 1930, que atribuía plenos poderes ao *staff* de Getúlio Vargas; da posição ocupada como diretor da instituição mais prestigiada nacionalmente como escola secundária, que ditava todas as referências para o ensino no Brasil; e das suas ações junto ao Ministério da Educação e Saúde Pública, participando como principal interlocutor do ensino de Matemática, na comissão reunida pelo ministro, no sentido de fazer valer suas propostas em termos oficiais, Euclides Roxo não conseguiu promover transformações radicais no ensino de Matemática brasileiro. É bem verdade que a partir dele instituiu-se a disciplina Matemática. Ela, porém, se estabeleceu como um amálgama da Aritmética, da Álgebra e da Geometria, não se constituindo num corpo integrado por meio do conceito de função, como originalmente foi pensada.

Euclides Roxo elaborou, praticamente sozinho, um novo programa de ensino para a Matemática. Junto com a oficialização do novo programa, através da Reforma Francisco Campos, escreveu livros didáticos que estavam *ipsis literis* em conformidade com o novo programa. Isso, no entanto, não foi suficiente para que a renovação tivesse ocorrido.

À primeira tentativa de modernização do ensino de Matemática no Brasil, o cotidiano escolar reagiu e sua resposta foi a não-adoção do livro inovador de Euclides Roxo. Novos livros e coleções foram escritos a partir da iniciativa de Roxo. Todos eles, no entanto, buscaram respeitar os limites das antigas disciplinas, que eram ministradas separadamente. Essa situação perdurou, praticamente, até o final da década de 1950, quando ao cotidiano escolar um novo ideário modernizador chegou, novamente buscando internacionalizar uma proposta para ensino da Matemática.

3 — Osvaldo Sangiorgi e a segunda modernização do ensino de matemática no Brasil

As primeiras Faculdades de Filosofia no Brasil foram criadas na década de 1930. Em número reduzidíssimo formavam, igualmente, muito poucos licenciados em Matemática até, pelo menos, a década de 1950. Para que se tenha uma idéia, em 1953, a mais conceituada Faculdade de Filosofia — a Faculdade de Filosofia Ciências e Letras da Universidade de São Paulo — formou apenas sete licenciados em Matemática. Àquela altura, o estado de São Paulo já contava com 155 estabelecimentos de ensino secundário (Bontempi Jr., 2006, p. 140).

Além de raríssimos professores licenciados de matemática — o que obrigou o governo a criar mecanismos de certificar mestres não-oriundos das faculdades de filosofia para dar conta da carência desses profissionais — havia rigorosos exames de qualificação profissional com vistas ao magistério oficial. Isso resultava num número ínfimo de professores efetivos na rede de ensino estatal[27]. Esses profissionais, professores aprovados nos exames e que ganhavam o direito de escolherem as escolas estaduais onde se fixariam como efetivos, tornavam-se referência para a discussão dos encaminhamentos didático-pedagógicos da Matemática escolar. Com bons salários e intensa procura para darem aulas e cursos particulares, não raro, esses professores eram assediados pelas editoras de obras didáticas para que colocassem no papel, as bem sucedidas experiências que a prática da profissão proporcionava.

[27] Dos anos 1940 até o final da década de 60, eram aprovados nos exames, anualmente, uma média de 25 professores de matemática (Lamparelli, 1984).

Osvaldo Sangiorgi era exemplo daqueles professores excelentes, disputados a peso de ouro pelas famílias abastadas paulistanas, para ministrar aulas particulares a seus filhos. Esse era um tempo em que o bom professor, reconhecido e propagandeado pelas conquistas de seus alunos, tinha *status* social de profissional liberal.

Sangiorgi nasceu no dia 9 de maio de 1921. Sua formação inclui a licenciatura em Ciências Matemáticas, em 1941, conforme consta em seu diploma, outorgado pela Faculdade de Filosofia Ciências e Letras, Seção de Educação, da Universidade de São Paulo.

Figura 3.3. Osvaldo Sangiorgi (1921-).

A partir da segunda metade da década de 1950, Osvaldo Sangiorgi transformou-se, através da Companhia Editora Nacional, em um autor de sucesso de livros didáticos de Matemática para o ginásio, para as primeiras quatro séries do ensino secundário. Em viagem com uma bolsa de estudos para os Estados Unidos, em 1960, promoveu uma mudança radical em seus textos didáticos. É possível acompanhar esse momento pelo próprio relato de Sangiorgi, publicado na revista *Atualidades Pedagógicas*, em seu número de set-dez de 1960. Nele, Sangiorgi descreveu a sua experiência, num texto intitulado "Curso de Verão", com subtítulo "esplêndida oportunidade para a renovação dos conhecimentos dos professores e atualização de programas e métodos de ensino". Com bolsa da *Pan American Union* e *National Science Foundation*, Sangiorgi realizou um estágio na Universidade de Kansas, EUA, de junho a agosto de 1960.

De volta ao Brasil, Sangiorgi logo começou a promover articulações entre professores, a mídia e a Secretaria de Educação do Estado de São Paulo, com vistas à modificação dos programas de Matemática, à semelhança do que viu nos Estados Unidos[28].

Posteriormente ao texto informativo de Sangiorgi, na revista *Atualidades Pedagógicas*, um verdadeiro bombardeio de notícias sobre as mudanças que sofreria a Matemática passou a ser tema na mídia impressa. Os jornais de São Paulo, sobretudo, acompanharam cada passo e iniciativa de Osvaldo Sangiorgi, em torno das mudanças no ensino de Matemática rumo à Matemática Moderna. Noticiaram cursos para professores, com dispensa de ponto, organizados pela Secretaria da Educação; a vinda de pesquisadores estrangeiros para palestras; a criação do GEEM – Grupo de Estudos do Ensino de Matemática, sob a coordenação de Osvaldo Sangiorgi; Congressos do Ensino de Matemática e a Matemática Moderna; entrevistas e depoimentos de Sangiorgi, dentre outras notícias sobre o ensino moderno de matemática.

Todo o cenário construído para a entrada da Matemática Moderna no ensino brasileiro teve o seu ápice no lançamento de uma coleção

[28] Desde 1959, por ocasião do Seminário de Royaumont, em Asnières-sur-Oise, França, promovido pela OECE – Organização Européia de Cooperação Econômica, os estadunidenses viram a oportunidade de atualizaram-se frente às discussões que estavam ocorrendo na Europa acerca das transformações do ensino de matemática. Havia, naquela altura, uma defasagem considerável entre o andamento do movimento reformador da matemática escolar nos EUA e na Europa (Guimarães, 2007, p. 21).

de livros didáticos. Foi em meados de 1963, para uso no ano letivo de 1964, quando eles já estariam nos ginásios.

O lançamento da Matemática Moderna, através dos livros didáticos para o ginásio, teve na imprensa, mesmo que indiretamente, um apoio fantástico. No dia 12 de julho de 1963, o jornal "Folha de S. Paulo", teve como manchetes principais a Matemática Moderna. A primeira, intitulada "O que é a Matemática Moderna na opinião do diretor do GEEM", apresentando uma longa entrevista com Sangiorgi, que não mencionou os seus livros, mas enunciou todas as vantagens e conveniências do ensino de matemática moderna, ancorada nos últimos avanços científicos; a segunda, "Verdadeira revolução vai sofrer o ensino da Matemática", foi desenvolvida com um texto que, logo à primeira frase, mencionou: "1964 vai ficar na história da cultura brasileira como o Ano 1 da Matemática Moderna". Efetivamente, 1964 foi o ano 1, do volume 1, dos novos livros didáticos de Matemática para o ginásio, livros de Matemática moderna, de modo pioneiro, escritos por Osvaldo Sangiorgi. Atente-se que esse foi também o ano que marcou a ruptura democrática: em marcha, o golpe militar que instalou no país uma ditadura dos quartéis, permanecendo no controle da vida social até a década de 1980.

Diferentemente do que presenciou nos Estados Unidos, onde os novos livros eram elaborados coletivamente, passando por classes experimentais, até ganharem versão final, Sangiorgi publicou seu curso moderno, obra assinada por um só autor, que não teve trajetória experimental.

A nova coleção de matemática moderna alterou por completo a organização do ensino de matemática para o ginásio – as quatro séries subseqüentes ao ensino primário. Sangiorgi, ao que tudo indica, traçou uma estratégia para não depender de portarias ou qualquer outro tipo legislação educacional, de modo a referenciar o novo programa nacionalmente. Aguardar por deliberações oficiais, por certo, iria se arrastar por um tempo imprevisível. O caminho utilizado por Osvaldo Sangiorgi, para fazer vingar uma nova programação para o ensino de matemática, foi mencionado logo ao princípio da obra, quando foi exposto o "Programa para um Curso Moderno de Matemática", onde os assuntos a ensinar

> estão explicados neste Volume 1, e fazem parte dos *vinte e quatro itens* que compõem os *Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática para os Ginásios*, com as respectivas *sugestões* para seu desenvolvimento, apresentadas pelo Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM), de São Paulo, em trabalho aprovado unanimemente pelo *IV Congresso Brasileiro do Ensino da Matemática* (Belém, Pará, julho de 1962), e readaptados no Curso de Treinamento Básico para Professores Secundários. (*Diretoria do Ensino Secundário do Ministério da Educação e Cultura*, realizado em Brasília, de 25 a 30 de novembro de 1963) (Sangiorgi, 1963)

Assim, através do GEEM, que àquela altura estava por demais divulgado pela mídia, conjugando as ações que desenvolvia no palco dos debates nacionais sobre o ensino de matemática (os congressos nacionais) e buscando uma aproximação com a Diretoria do Ensino Secundário, na oferta de cursos a professores, Sangiorgi deu *status* oficial a uma nova proposta de reorganização do ensino de matemática, organizando seus livros por ela.

A proposta, denominada "Assuntos Mínimos para um Moderno Programa de Matemática" incluía, nos seus 24 itens o seguinte temário para ser ensinado nas quatro séries subseqüentes ao ensino primário (ginásio):

Número e numeral. Sistemas de numeração. Bases.

Operação (operações inversas) com os números inteiros, propriedades estruturais.

Divisibilidade, múltiplos e divisores, números primos – fatoração completa.

Números fracionários; operações (operações inversas); propriedades estruturais.

Estudo intuitivo das principais figuras geométricas planas e espaciais.

Sistema de medida. Sistemas decimal e não-decimais.

Razões e proporções; aplicações.

Números racionais relativos; operações (operações inversas); propriedades estruturais.

Cálculo literal, polinômios com coeficientes racionais, operações fundamentais, propriedades.

Frações algébricas, operações fundamentais; propriedades.

Equações do 1º. Grau com uma incógnita, inequações do 1º. Grau com uma incógnita; inequações simultâneas.

Função: representação gráfica cartesiana de uma função.

Sistemas de equações do 1º. Grau com duas incógnitas; interpretação gráfica. Sistema de equações do 1º. Grau com três incógnitas.

Sistemas de inequações do 1º. Grau com duas incógnitas; interpretação gráfica.

Elementos fundamentais da Geometria plana: ponto, reta, semi-reta, segmento; plano,semiplano, ângulos.

Polígonos: generalidades. Estudo dos triângulos.

Perpendicularismo e paralelismo no plano; estudo dos quadriláteros.

Circunferência; propriedades; posições relativas de reta e circunferência e de circunferências.

Número real (racional e irracional); operações; propriedades estruturais; cálculo dos radicais.

Equações do 2º. Grau com uma incógnita; função trinômio do 2º. Grau; equações redutíveis às do 2º. Grau, sistemas redutíveis aos do 2º. Grau.

Segmentos proporcionais; semelhança de polígonos; seno, co-seno e tangente de um ângulo.

Relações métricas nos triângulos. Lei dos senos e lei dos co-senos.

Relações métricas no círculo; polígonos regulares.

Áreas dos polígonos; medida da circunferência e área do círculo.

Foi a primeira vez, ao que parece, que um livro didático de matemática não necessitou da chancela oficial da legislação educacional para referenciar a sua forma e o seu conteúdo.

Como bem destaca a pesquisadora Elisabete Búrigo, forma e conteúdo da obra didática de Osvaldo Sangiorgi procuravam ser justificadas a partir da correspondência apontada pelos estudos de Jean Piaget, entre as estruturas operatórias da inteligência e as 'estruturas-mãe' do edifício matemático projetado pelo grupo Bourbaki (Búrigo, 2008).

Assim, a transformação dos conteúdos matemáticos na obra de Sangiorgi buscará o caráter estrutural em todos os seus itens. A começar, por exemplo, pela apresentação dos *números naturais*. O estudo de Búrigo, ao comparar as obras do autor antes da matemática moderna e aquelas que escreveu desencadeando o Movimento, mostra que:

> Na versão "antiga" do livro para a primeira série ginasial, os números naturais são enunciados como aqueles que têm origem na contagem dos objetos de uma coleção ou dos indivíduos de um grupo. Na versão "moderna", o estudo dos números naturais é precedido de um capítulo que introduz a linguagem dos conjuntos e das operações com conjuntos. O conceito de número natural é enunciado então como "a ***propriedade comum*** *(idéia)*, associada a todos os conjuntos *eqüipotentes entre si*", enquanto os conjuntos eqüipotentes são definidos como aqueles entre os quais existe uma "correspondência biunívoca (ou *um* a *um*)". A preocupação em definir os números naturais – bem familiares aos alunos — a partir das relações entre conjuntos espelha o esforço de aproximação em relação aos critérios da matemática superior. Toda uma discussão é feita na versão "moderna" do livro sobre a estrutura de ordem definida entre os naturais a partir da relação "menor que ou igual a". Essa relação é ali explicitada como um caso particular de uma relação de ordem que pode ser estabelecida em outros conjuntos e, mais tarde, retomada como uma relação que pode ser estabelecida também entre os números racionais e entre os números reais. (Búrigo, 2008)

Também o tratamento da Geometria, em sua versão moderna, ganhou especial atenção de Osvaldo Sangiorgi, que soube conjugar tendências diferentes que se apresentavam nacional e internacionalmente. Em estudo sobre o tema, a pesquisadora Maria Célia Leme da Silva ponderou que:

> em relação ao ensino de geometria, podemos dizer que Sangiorgi não assume uma postura radical. Enquanto Dieudonné propõe uma ruptura com a geometria euclidiana e Castrucci admite que, no Brasil, seria um passo ousado realizar as mudanças propostas pelo MMM, Sangiorgi incorpora à sua obra os elementos característicos dos diferentes posicionamentos. Não abandona a geometria euclidiana, nem a dedutiva, mas acrescenta novos postulados, uma geometria exploratória. Também não se posiciona partidário da geometria desenvolvida pelas transformações geométricas, mas não deixa de reservar um espaço a tal abordagem. Enfim, sua apropriação vai no sentido de conjugar, reunir, e não na direção de posicionamentos polémicos. (Silva, 2008)

O sucesso da obra foi sendo confirmado pelas novas edições do primeiro volume: em 1965, mais de 250 mil novos livros são editados e assim, anualmente, o livro tem tiragens na casa dos 250 mil exemplares, até 1967, alcançando a sua 10ª edição, como atesta o "Mapa de Edições" da Editora Nacional. A cada volume para uso dos alunos, correspondia um volume para os professores melhor conduzirem suas aulas de matemática moderna: um *Guia para uso dos professores*[29].

A obra de Sangiorgi, autor que pela primeira vez elaborou um texto didático de matemática moderna para ser utilizado nos ginásios, espalhou-se pelo Brasil. Os arquivos da Cia. Editora Nacional contém cartas de diversos pontos do país, que pediam a biografia de seu autor. São cartas de professores de matemática, de normalistas[30] e, também, de alunos. Isso indica que a coleção de

[29] No que toca às edições do *Guias*, destinados aos professores, de acordo com os arquivos da Cia. Editora Nacional, o primeiro volume foi lançado em março de 1964, com tiragem de mais de cinco mil exemplares. Em 1965, já seriam 12 mil. Em média, até o início dos anos 70, anualmente foram publicados cinco mil exemplares de cada volume.

[30] A primeira escola normal foi criada no Brasil em 1830, sendo pioneira na América Latina para a formação de professores para o ensino primário. Designavam-se de *normalistas* os

Sangiorgi ganhou novos mercados, substituindo autores já conhecidos por professores e alunos. As cartas solicitavam uma proximidade maior do autor das obras que estavam sendo utilizadas no dia-a-dia escolar[31]. A Editora, sempre atenta, respondia aos pedidos enviando uma biografia sumária de Sangiorgi.

A coleção de Sangiorgi também ultrapassou fronteiras e seguiu para além-mar. Em dezembro de 1967, a *Folha Informativa dos Professores do 1º Grupo do Ensino Técnico Profissional*, periódico das escolas técnicas portuguesas, manifestou interesse em conhecer as transformações pelas quais a matemática escolar passava no Brasil (Biscaia, 1967). Assim, o redator do periódico informou que "os brasileiros tinham já o seu Programa de Matemática Moderna para os cursos ginasiais" (p. 1), descrevendo os vinte quatro itens desse programa. Na continuidade do artigo, no número seguinte da revista (Biscaia, 1968), em 1968, o autor mencionou que mais importante que o programa que, segundo ele, não apresentava novidades, era o tratamento dos temas. Assim, selecionou alguns deles e descreveu – apesar de não citar nominalmente Sangiorgi – como o *Guia para uso dos Professores* tratava os assuntos didática e pedagogicamente.

Na América do Sul, os textos de Sangiorgi também tiveram repercussão. Nos arquivos da Editora foram encontrados pedidos da coleção de matemática moderna para o ginásio de países como Uruguai e Argentina.

---

estudantes que freqüentavam essas escolas. Chamavam-se *normais* no sentido de estarem à norma, como escolas-modelo.

[31] Um exemplo dessas cartas foi a enviada por alunos da cidade de Andradas, MG, datada de 1º. de abril de 1967. O texto, endereçado à Cia. Editora Nacional, bastante singelo, dizia: "Somos alunos da 2ª. série ginasial do Ginásio Estadual de Andradas. O autor de nosso livro de matemática é o estimado Osvaldo Sangiorgi. Nada sabemos sobre ele, gostaríamos portanto de que nos enviassem seus dados biográficos para que o conheçamos melhor".

Assim, foi pelos livros didáticos pioneiros de matemática moderna de Osvaldo Sangiorgi que o Brasil adere ao chamado Movimento da Matemática Moderna. Obra de personagem carismático, a coleção de Sangiorgi venceu todos os obstáculos que normalmente seriam colocados a um manual inovador, completamente diferente daqueles aos quais o cotidiano escolar estava acostumado.

Osvaldo Sangiorgi agiu como exímio articulador entre todas as instâncias que influenciavam o processo educacional em seu tempo; tinha trânsito fácil na esfera pública; era reconhecido pela elite econômica como excelente professor; reconhecido também pelos seus pares, acadêmicos com quem estava sempre em contato em congressos nacionais e internacionais; tinha, além disso, acesso direto às lideranças do professorado através dos cursos promovidos pelo GEEM; possuía, ainda, por circunstâncias do contexto político-econômico dos anos 1960 e, sobretudo, por suas relações pessoais com editores de jornais, franco acesso à mídia impressa; usou a mídia televisiva para, de modo inédito, promover cursos pela TV; constituiu-se em autor didático em tempos em que as editoras brasileiras e, em particular, a Cia. Editora Nacional, transformar-se-iam em grandes empresas, a partir de São Paulo. A articulação dessas diferentes instâncias, feitas por um hábil personagem, preparou devidamente o cotidiano escolar para a aceitação da grande novidade didática do início dos anos 1960. A cultura escolar da época parece não ter tido forças para resistir à tentação do novo, da nova matemática, transformando Osvaldo Sangiorgi no "pai da Matemática Moderna"[32].

[32] Essa foi a referência feita em faixas colocadas na cidade de Registro, SP, em 1972, por ocasião da estada de Osvaldo Sangiorgi para dar cursos naquele município: "Seja bem-vindo Prof. Osvaldo Sangiorgi Pai da Matemática Moderna" (fotografia pertencente ao APOS).

Conclusões

Os professores Euclides Roxo e Osvaldo Sangiorgi constituíram-se em protagonistas de movimentos de modernização do ensino de matemática no Brasil. Momentos históricos diferentes separam esses dois professores. Essa distância de algumas décadas revela ingredientes diferentes nos contextos em que cada um deles agiu. Ambos estiveram presentes em situações revolucionárias. De um modo ou de outro, ficaram próximos dos regimes autoritários. Construíram espaços no interior desses regimes de maneira a elaborarem propostas de radicais transformações no ensino de matemática. Suas ações foram beneficiadas pelo caráter de neutralidade com que a matemática era vista na cultura escolar. Um saber que não representaria qualquer ameaça à ordem ditatorial estabelecida.

Roxo e Sangiorgi representaram verdadeiros *passadores culturais*. Professores de matemática que colocaram o Brasil, nos anos 1930 e 1960, respectivamente, no âmbito da discussão internacional sobre o ensino de matemática. O primeiro, traduzindo as resoluções emanadas da criação da Comissão Internacional do Ensino de Matemática, em Roma, 1908; o segundo, figurando com interlocutor das propostas que ocorreram desde o Seminário de Royamont (1959), apropriadas pelos estadunidenses, traduzidas em livros didáticos e cursos para professores.

Ambos agiram em termos de construção de um programa moderno de matemática para o ensino secundário brasileiro. Também foi tarefa dos dois escrever livros didáticos para a nova matemática que pretenderam disseminar.

Roxo, com *status* de assessor único do Ministro da Educação, organizou sozinho um currículo integrado dos ramos matemáticos, para unificar a Aritmética, a Álgebra e a Geometria numa única disciplina denominada 'Matemática'. Seu trabalho incorporou-se diretamente na primeira legislação que constituiu o sistema nacional de ensino brasileiro, que ficou conhecida como Reforma Francisco Campos. Para a nova matemática, Euclides Roxo escreveu o seu *Curso de Mathematica Elementar*. Obra didática notável, que mantém diálogo com a produção norte-americana e suas experiências de unificação da matemática escolar.

A nova proposta trazida por Euclides Roxo, em termos de uma nova metodologia para ensino das matemáticas, foi rechaçada pelo cotidiano escolar. Seus livros didáticos inovadores foram abandonados. Restaram outros compêndios de uma nova geração de autores, que passaram a apresentar o título de 'Matemática', mostrando em seu interior os ramos separados para o ensino de Aritmética, Álgebra e Geometria.

Sangiorgi, diferentemente de Roxo, agiu na construção do novo currículo mobilizando vários setores do meio político-econômico-educacional. Essa diferença marcou os resultados da ação de um e de outro. Homem de diálogo fácil, extrovertido, aglutinador, articulador, Sangiorgi mostrou-se como figura carismática e decisiva para a incorporação da matemática moderna no cotidiano das escolas brasileiras. Desde a construção oficiosa de um novo programa de matemática, até a elaboração dos seus livros didáticos, Sangiorgi durante quinze anos (1960-1975) colheu muitos frutos de seu trabalho. Os milhões de livros que vendeu são prova disso. Nem mesmo o refluxo do Movimento da Matemática Moderna abalou seriamente o seu sucesso editorial: continuou a defender a nova matemática em termos de sua necessidade para os novos tempos da informatização da sociedade. Escreveu novos livros que tiveram vida longa até o final dos anos 1980.

Referências

APOS – Arquivo Pessoal Osvaldo Sangiorgi. São Paulo: PUC-GHEMAT.

Arquivo da Companhia Editora Nacional. São Paulo: IBEP – Instituto Brasileiro de Edições Pedagógicas.

Bicudo, J. C. (1942). *O ensino secundário no Brasil e sua atual legislação.* São Paulo.

Biscaia, A. (1967). A Matemática Moderna no Brasil. F*olha Informativa os Professores do 1º Grupo do Ensino Técnico Profissional*, *15*, 1-4.

Biscaia, A. (1968). *A Matemática Moderna no Brasil (continuação). Folha Informativa os Professores do 1º Grupo do Ensino Técnico Profissional*, *16*, 11-12.

Bontempi Jr., B. (2006). Em defesa de 'legítimos interesses' – o ensino secundário no discurso educacional de O Estado de São Paulo (1946-1957). R*evista Brasileira de História da Educação, 12*, 122-159.

Búrigo, M. E. (2008). A modernização possível e necessária da matemática escolar segundo Osvaldo Sangiorgi. Em W. R. Valente (org.), *Osvaldo Sangiorgi: um professor moderno.* São Paulo: CNPq – Annablume.

Guimarães, H. M. (2007). Por uma matemática nova nas escolas secundárias – perspectivas e orientações curriculares da Matemática Moderna. Em J. M. Matos e W. R. Valente (orgs.), *A matemática moderna nas escolas do Brasil e de Portugal: primeiros estudos.* São Paulo: Da Vinci – Capes/Grices.

Lamparelli, L. C. (1984). *Um estudo sobre a qualidade do conhecimento específico dos candidatos ao cargo de professor efetivo de Matemática da Rede Estadual de Ensino Público do Estado de São Paulo*. Dissertação (Mestrado em Educação). São Paulo: FEUSP.

Rocha, J. L. (2001). *A matemática do curso secundário na Reforma Francisco Campos*. Dissertação (Mestrado em Matemática). Rio de Janeiro: Departamento de Matemática. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Santos, V. C. M. (2003). *A matemática escolar nos anos 1920: uma análise de suas disciplinas através das provas dos alunos do Ginásio da Capital do Estado de São Paulo*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP.

Silva, M. C. L. (2008). A geometria escolar moderna de Osvaldo Sangiorgi. Em W. R. Valente (org.), *Osvaldo Sangiorgi: um professor moderno.* São Paulo: CNPq-Annablume.

Sangiorgi, O. (1960). Cursos de Verão. *Atualidades Pedagógicas*, *Set./Dez.*, 7-12.

Sangiorgi, O. (1963). *Matemática – curso moderno – volume 1*. São Paulo: Cia. Editora Nacional.

Valente, W. R. (1999). *Uma história da matemática escolar no Brasil, 1730-1930*. São Paulo: Editora Annablume-Fapesp.

Valente, W. R. (org.). (2004a). Euclides Roxo e a modernização do ensino da matemática no Brasil. Brasília: Editora da UnB.

Valente, W. R. (2004b). *O nascimento da Matemática do Ginásio*. São Paulo: Annablume-Fapesp.

Werneck, A. P. T. (2003). *Euclides Roxo e a Reforma Francisco Campos: a gênese do primeiro programa de ensino de matemática brasileiro*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP.

Sobre o autor:

Wagner Rodrigues Valente
Universidade Federal de São Paulo
Estrada do Caminho Velho, 333 - Guarulhos-SP -
Bairro dos Pimentas
07252-312 - Sao Paulo, SP – Brasil
wagner.valente@unifesp.br

Matemática Moderna y neocolonialismo en Venezuela

Julio Mosquera, Universidad Nacional Abierta, Venezuela

En este trabajo se hace un balance de la implantación de la Matemática Moderna en la Educación Secundaria venezolana a finales de los años de 1960. Este balance se hace desde la perspectiva de la teoría de las decisiones culturales (Bonfil-Batalla, 1984). Desde esta perspectiva, considero el currículum y las propuestas curriculares como objetos culturales y las decisiones acerca de su adopción como decisiones culturales. Estos objetos son construidos y las decisiones son tomadas por seres humanos en contextos sociales determinados. Comprender los objetos y las decisiones demanda conocer esos contextos. Es necesario aclarar que este estudio se centra en el *currículo oficial,* el presentado en los programas de estudio oficiales (Posner, 2005). Desde la perspectiva descrita anteriormente, la adopción de la Matemática Moderna es caracterizada como una toma de decisión ajena sobre objetos culturales ajenos, es decir, como un acto cultural enajenado. En ella se consideran la situación económica del país, la relación con eventos políticos en América Latina, el estado de desarrollo de la comunidad matemática y la organización del sistema escolar.

La Matemática Moderna fue transplantada a Venezuela en la época del neocolonialismo, signado por una marcada dependencia económica, política e intelectual de los Estados Unidos. En el ámbito educativo se impuso el enfoque economicista, donde la educación era vista como factor predominante del desarrollo económico, el cual estuvo acompañado de la adopción de la planificación educativa al estilo estadounidense. Fue en la segunda mitad del siglo XX cuando se realizó en Venezuela la primera reforma educativa planificada. En cuanto al diseño curricular, éste se fundamento en el conductismo como teoría del aprendizaje y se adoptó la Taxonomía de los Objetivos Educacionales o de como guía para la elaboración de los objetivos.

En nuestro país hubo muy poca resistencia a la Matemática Moderna y no surgieron alternativas propias a esa propuesta. Algunos profesores de la Facultad de Ciencias de la UCV, como Raimundo Chela, manifestaron individualmente ideas contrarias al enfoque estructuralista inspirado en el estilo del grupo Bourbaki. El único libro, del que tenga información, bajo un enfoque diferente (School Mathematics Project, 1972) fue una traducción de un libro de un proyecto curricular de Inglaterra, éste tuvo muy poco impacto en nuestro país. Tan marcada es la dependencia de Venezuela en el diseño de políticas educativas que no es sino hasta después que surge el "back-to-basics" en los Estados Unidos, que se plantea una revisión de los programas de estudio de Matemática. Esta nueva reforma, realizada a mediados de los años de 1980 bajo el auspicio de la UNESCO, llevó a la modificación de los programas de Matemática de los nueve grados de la recién creada Educación Básica y dejó intactos, hasta 1991, los programas de esta asignatura para los dos años de la Educación Media Diversificada y Profesional.

El presente trabajo está organizado en cuatro partes. La primera parte está dedicada a una presentación de la situación económica y política de Venezuela a finales de los años de 1960. La segunda parte está dedicada a una breve descripción de la evolución de la evolución de la comunidad matemática venezolana. En la tercera parte entro en detalles acerca de la versión de la Matemática

Moderna que se implantó en Venezuela. Por último, presento unas conclusiones generales sobre la implantación de la Matemática Moderna y su papel en el proceso de neocolonización en Venezuela.

1 — Situación política y económica de Venezuela

La vida política, económica y cultural de la Venezuela del siglo XX está marcada por la explotación del petróleo. Dos dictaduras, la del General Gómez (desde 1903 a 1935) y la del General Pérez Jiménez (de 1952 a 1958), y regímenes pseudo-democráticos garantizaron la estabilidad política para el establecimiento y fortalecimiento de la explotación del petróleo por parte de las grandes empresas petroleras transnacionales. Los Estados Unidos, por medio de las empresas petroleras o por otros medios, influyeron enormemente sobre la política interna y la economía del país. Como veremos más adelante, esta influencia no se limitó al ámbito de la política y la economía.

Para Brito Figueroa (1978), en el siglo XX venezolano se destacan dos grandes períodos: la época de la penetración imperialista y la época del neocolonialismo. El segundo período está comprendido desde la cuarta década del siglo XX hasta nuestros días. ¿Qué entendemos por neocolonialismo? Éste es "(...) una etapa más sofisticada del imperialismo: (...) tiene la propiedad de hacer de los países colonizados participantes activos en el mantenimiento de la relación de dependencia" (Britto Gracia y Negrete, s.f., p. 25). En términos de la teoría de las decisiones culturales puede decirse que el neocolonialismo se caracteriza por la toma de decisiones ajenas, las cuales se asumen como propias o se es colaboracionista, sobre objetos culturales ajenos, que se anhelan como propios, y se profundiza el rechazo hacia los objetos culturales propios. En ese proceso se desarrollan " formas culturales concretas en función de los intereses de los monopolios norteamericanos cuya fuerza *aliena* ya hasta la producción intelectual y tiende a configurar una mentalidad que se aleja cada vez más de los específicamente nacional-venezolano y se aproxima a lo metropolitano-norteamericano..." (Brito Figueroa, 1978, p. 710). Los emblemas típicos de la urbanidad, el rascacielos, la autopista, la urbanización y el centro comercial hacen su aparición en nuestro país como parte del proceso neocolonizador (Almandoz, 2004). Proceso que Alamandoz (2004) califica de "americanización precipitada". Arturo Uslar Pietri (1972) se refiere a esa Venezuela que surge del boom petrolero como una "nación fingida". Es esa la época cuando se realiza la reforma educativa que llevó a la implantación de la Matemática Moderna.

La época del neocolonialismo se caracteriza, además, por el inicio de una cruzada "democrática" contra el comunismo. Nuestro país se convierte en uno de los centros de la ofensiva contra el comunismo dirigida desde los Estados Unidos. Esta ofensiva era una manifestación de la pugna que se libraba entre Estados Unidos y Europa por el control de los llamados "mercados marginales" (Barraclough, 1980). El triunfo de la revolución cubana, liderizada por Fidel Castro, en 1959 fue el detonante de esa ofensiva. Venezuela hacía pocos años había dejado atrás una dictadura y el nuevo gobierno electo por medio del voto universal secreto esperaba su juramentación. Para los Estados Unidos era vital fortalecer la naciente "democracia" venezolana como una manera de hacerle frente al avance de los movimientos de liberación en América Latina. Sobre todo cuando Acción Democrática (AD), el partido político más importante para el momento, se había comprometido a construir una Venezuela capitalista con un régimen democrático representativo similar al de los Estados Unidos. Una burguesía industrial recién desarrollada guiaría esa nueva Venezuela (Plaza, s.f.). Los crecientes ingresos provenientes del petróleo, los cuales alcanzaron su mayor nivel en 1957, sirvieron de soporte a la acelerada transformación capitalista. Este proceso de transformación se inicia con la primera dictadura a comienzos del siglo XX y continúa su rumbo con breves interrupciones y se consolida, en lo político, con la firma del llamado Pacto de Punto Fijo. Este Pacto fue suscrito en 1958 por los principales partidos de derecha de aquel momento: AD, COPEI y URD. El último de estos partidos desapareció y los dos primeros tiene una existencia precaria hoy en día.

En 1959, Fidel Castro visitó Caracas y participó en un acto político de masa al que asistieron unas 300.000 personas. Su visita estimuló a grupos de izquierda a organizar la lucha armada en contra del gobierno de AD. A lo anterior le servía de sustrato la seria situación económica que empezó a enfrentar el país en 1960, la cual era en buena parte una consecuencia de la estrecha dependencia de los Estados Unidos. La agitación política y la situación económica sirvieron de impulso a los movimientos de izquierda a organizar una guerrilla para enfrentar al gobierno. Los liceos y las universidades fueron centros de la actividad subversiva, escenario de violentas manifestaciones contra la democracia burguesa.

Una característica resaltante de este primer gobierno de AD, fue la persecución política de profesores y estudiantes. El propio Presidente Rómulo Betancourt declaró públicamente que “ 737 maestros y profesores comunistas y miristas [militantes del partido Movimiento de Izquierda Revolucionaria, MIR] han sido erradicados de la educación pública, y el proceso profiláctico no se detendrá en esa cifra ” (citado en Centro de Reflexión y Planificación Educativa, CERPE, 1979, pp. 24-25). Durante ese gobierno, unos 3.600 maestros y profesores fueron destituidos, trasladados o desmejorados por razones políticas (CERPE, 1979). Además, todo acto de manifestación pública por parte de los estudiantes era reprimida con toda la fuerza del Estado y de grupos paramilitares de AD.

A Betancourt le siguió Raúl Leoni, también de AD, en la Presidencia de la República. Más tarde, a Leoni le sustituye al frente del Gobierno el candidato socialcristiano Rafael Caldera. Una vez en la presidencia, Caldera lanza la política de pacificación que buscaba poner fin a diez años de lucha armada. En paralelo con esa política se reprimía violentamente toda manifestación estudiantil. Unao delos actos de represión má notorios del gobierno socialcristiano en el ámbito de la educación fue el allanamiento, a finales de 1969, de la Universidad Central de Venezuela (UCV). Las fuerzas militares y policiales tomaron por asalto las instalaciones de la universidad. Una vez allanada la universidad se procedió a cerrarla y a iniciar un proceso de transformación de la misma. Algunos asesores estadounidenses jugaron un papel directo e importante en el rediseño y creación de nuevas carreras en la UCV. Esta “asistencia académica” a un gobierno “democrático” que cerró por la fuerza una de las principales universidades del país era una pequeña muestra del tres apoyo abierto y directo de los Estados Unidos con que contaron los gobiernos de AD y COPEI.

Las actividades de asistencia no se limitaron a la UCV. Varias instituciones estadounidenses, gubernamentales y no-gubernamentales, empezaron a jugar un papel protagónico en diversos aspectos de la vida nacional. Los gobiernos de AD y COPEI permitía que las mismas actuaran con completa libertada en el país. En particular fue notoria la actividad de los programas promovidos por la Alianza para el Progreso, sus actividades eran parte de la lucha contra el comunismo y los movimientos de liberación en la América Latina. Esta organización era considerada por sectores progresistas como "una Alianza para frenar el proceso de liberación de los pueblos americanos" (Ché Guevara, 1964, citado en Britto Gracia y Negrete, s.f., p. 25).

La situación económica y política brevemente descrita en los párrafos anteriores nos muestran el marco en que se llevó a cabo la reforma educativa que facilitó el transplante de la Matemática Moderna a Venezuela. Como veremos a continuación, es ese contexto en el que surge también la comunidad matemática venezolana.

2 — La comunidad matemática venezolana

La comunidad matemática venezolana es muy joven. Por ejemplo, la formación de matemáticos profesionales se inicia en 1958. Di Prisco y Lara (1984) distinguen dos períodos en el proceso de institucionalización de las matemáticas en Venezuela. El primer período, que se inicia a finales de los años 1960 y se prolonga hasta finales de los 1970, calificado como romántico, tuvo como idea motor: "es posible entender bien las matemáticas" (Di Prisco y Lara, 1984, p. 268). En el segundo período, que se inicia a comienzos de los años 1980, en la comunidad matemática prevalecía la idea: "podemos producir matemáticas de alto nivel" (Di Prisco y Lara, 1984, p. 268). Es precisamente durante el primer período que se transplanta a nuestro país la Matemática Moderna.

La Escuela de Física y Matemática, de la Universidad Central de Venezuela (UCV), abre sus puertas en el año 1958. Este hecho marca el inicio de los estudios matemáticos en nuestro país (Orellana, 1980). Para algunos de los profesores estaba claro que el objetivo de esta escuela era formar investigadores en matemáticas (Di Prisco y Lara, 1984). Es en ella donde se reseña por primera vez en Venezuela materias como Álgebra Lineal, Topología General, Medida e Integral, Análisis Funcional y Geometría Diferencial (Orellana, 1980). Para la enseñanza de estas asignaturas fue necesario recurrir a la contratación de profesores extranjeros, principalmente argentinos, españoles y brasileños. En particular, fueron algunos profesores argentinos, como Ricabarra y Cotlar, los que tuvieron mayor influencia en los inicios de la investigación en matemáticas en Venezuela. En 1962 se graduó la primera promoción de Licenciados en Matemáticas integrada por dos egresados. En 1963 llegan los primeros profesores brasileños al país. Otras escuelas de matemáticas, como la de la Universidad de Oriente, contaban casi exclusivamente con profesores de Estados Unidos e Italia. En esta época, también era notable la escasez de recursos bibliográficos. Las bibliotecas no contaban con revistas académicas especializadas ni con libros profesionales de matemáticas.

El primer venezolano en doctorarse en Matemáticas fue el profesor Raimundo Chela, quien realizó sus estudios de doctorado en Inglaterra. El profesor Chela realizó estudios de pregrado en el Instituto Pedagógico Nacional. Una muestra de la debilidad de la comunidad matemática venezolana es que en la década de 1960, el Dr. Chela era el único profesor venezolano con doctorado en la Escuela de Física y Matemática de la UCV. A su regreso al país, en 1962, Chela fue designado como Jefe del Departamento de Matemáticas. Al asumir ese cargo y revisar los programas de estudio vigentes se sorprendió por su alto nivel y consideró que eran inadecuados para la formación de licenciados en Matemáticas, los mismos eran más bien adecuados para una formación de postgrado (Planchart, 2000). Argumentaba Chela que esta situación no favorecía la graduación de nuevos matemáticos que se integraran a diversas actividades como la investigación, la docencia en educación secundaria, las aplicaciones de las matemáticas a la industria y el periodismo científico entre otras (Planchart, 2000). El Dr. Chela nunca estuvo a favor del estilo Bourbaki en la enseñanza de las matemáticas en la universidad, por el contrario proponía que las estructuras no se ocultaran sino que se enseñaran cuando fuera necesario, que se hiciera énfasis en las aplicaciones de las matemáticas a las diversas ciencias, que los cursos de matemáticas se denominara con el nombre de cálculo seguido de vectorial, diferencial, etc. según fuera el caso, y que el primer curso de álgebra se enseñara a finales del segundo año de la universidad (Planchart, 2000).

El Departamento de Matemáticas del Instituto Venezolano de Investigaciones Científicas (IVIC) fue fundado en 1969. Su primer

Director fue el Dr. Luis Baéz Duarte. El Dr. Duarte realizó sus estudios de Doctorado en el California Institute of Technology. La creación de este Departamento tuvo un impacto en el trabajo de investigación que se realizaba en la Escuelas de Física y Matemáticas de la Universidad Central de Venezuela.

La influencia extranjera marcó profundamente el comienzo de los estudios profesionales de matemáticas en Venezuela. " [S]e creo un "cuadro de valores" importado y hasta deformado en varios de sus elementos, pues ni en los países de alto desarrollo matemático existían exactamente los mismos componentes que se impusieron en Venezuela" (p. 47). La evolución del currículo de la Escuela de Física y Matemáticas de la UCV muestra esa influencia, " de una concepción realizada por personal contratado u ordinario procedente de España y Francia, se pasó a planes inspirados por personal contratado proveniente de Argentina y luego a otro, nuevamente de cierta modalidad francesa, pues el caso de la Universidad de Vincennes es muy especial " (p. 54). Hubo una fuerte influencia de profesores españoles liderizados por A. Palacio Gros, quienes predominaron entre 1955 y 1965. Luego fueron reemplazados por matemáticos estadounidenses y europeos, en especial provenientes de Francia, Bélgica y otra generación de España. Esta nuevo grupo de profesores extranjeros promovió varias reformas curriculares en la Escuela de Física y Matemáticas de la UCV. En 1964 se implantó una reforma en dicha escuela que marcó el inicio de la enseñanza de la Matemática Moderna en la universidad y de la caída de la influencia española. Al punto que todos los manuales escritos por autores españoles fueron desechados y se comienzan a utilizar libros de otras latitudes, incluso sin traducción al español. Por ejemplo, los únicos libros disponibles en la UCV para estudiar Topología General eran los de Bourbaki, en francés, y de Kelley, en ingles, respectivamente (Orellana, 1980).

Los estudios de postgrado en matemáticas se inician en 1970. La Universidad de Carabobo, en Valencia, ofreció una maestría conjuntamente con la University of Oklahoma, Estados Unidos, y la Universidad de Madrid, España. Poco tiempo después comenzaron a ofrecer un doctorado. Seis años más tarde fue creado el Programa de Postgrado en Matemática en la Universidad Central de Venezuela.

La actividad de reuniones profesionales es también relativamente reciente. El Primer Congreso Venezolano de Matemáticas se realizó en la ciudad de Mérida en 1976. Entre los temas que se trataron en ese congreso se incluyó la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria y secundaria (Di Prisco y Lara, 1984). Se llegaron a realizar dos congresos más, uno en Cumaná en 1979 y otro en Maracaibo en 1981 respectivamente. Este último congreso sirvió de escenario para la fundación de la Sociedad venezolana de Matemáticas (SVM). La SVM fue la primera organización académica profesional de matemáticos. Esta sociedad tuvo una vida muy corta.

Años más tarde surgió la Asociación Matemática Venezolana (AMV). La AMV aglutina a un número considerable de matemáticos de todas las universidades del país. Esta asociación organiza un encuentro académico anual y mantiene un boletín. El primer número del Boletín apareció en 1994. Este boletín es publicado en forma impresa y en formato electrónico. Tanto en las reuniones como en el boletín hay secciones dedicadas a la enseñanza de las matemáticas.

Para finales de la década de 1970-1980, "podemos decir que la 'matemática venezolana' todavía no ha encontrado su propio camino y aquel que ha recorrido y que por tanto condiciona en lo inmediato el que falta, está lleno de errores, de conflictos, de inseguridades y de algunos factores que *la atan a patrones foráneos*" (énfasis nuestro) (Orellana, 1980, p. 63).

A diferencia de otros países, no fueron los matemáticos los principales promotores de la Matemática Moderna en Venezuela. Una razón que explica esta situación es que prácticamente no había matemáticos profesionales en nuestro país para esa época. Más bien fueron los profesores de Matemáticas egresados del Instituto Pedagógico Nacional, más tarde Instituto Pedagógico de Caracas, y profesores que vinieron de otros países, especialmente de Chile, los que jugaron un papel muy importante en la implantación de la Matemática Moderna. El Instituto Pedagógico de Caracas y el Instituto Pedagógico Experimental de Barquisimeto, una ciudad ubicada a unos 400 kilómetros al oeste de Caracas, fueron los centros de diseminación del nuevo enfoque en la enseñanza de las matemáticas en la Educación Secundaria.

3 — La Matemática Moderna llega a Venezuela

La modernización de la enseñanza de las matemáticas en Venezuela a través de los programas de estudio oficiales se inició en 1955. En estos programas fueron introducidos por primera vez los conjuntos, la interpretación de las operaciones en términos de los mismos, se hacía énfasis en las aplicaciones y se proponía una integración mayor entre la geometría y la aritmética, y la geometría y el álgebra. Esta reforma, tal vez por su provisionalidad, tuvo muy poco impacto en la producción de libros de texto. Los autores que dominaban el mercado produjeron versiones adaptadas a los nuevos programas de sus libros. Los programas de 1955 sufrieron modificaciones en 1957 y 1961 respectivamente. En estas modificaciones fueron eliminado el tema de conjuntos, movido el tema de funciones a un año superior (ver tabla 4.1) y reducidos considerablemente todos los contenidos de geometría. Fue a mediados de los años 1960 cuando se inicia la planificación de la educación y se introduce el ensayo como mecanismo de reforma de los programas de estudio. Desde esta nueva perspectiva, marcada por la planificación y el ensayo, fueron elaborados nuevos programas de estudio los cuales se ensayaron en varios planteles antes de su implantación en el ámbito nacional. Los primeros programas de estudio de ensayo de Matemáticas fueron diseñados bajo la influencia del movimiento de la Matemática Moderna. El enfoque estructuralista le servio de base a estos programas. Todos estos cambios suceden entre los últimos años de la Dictadura del General Marcos Pérez Jiménez y los primeros años de la Democracia del Pacto de Punto Fijo. Como veremos más adelante no hubo una ruptura significativa entre el pensamiento educativo de la dictadura y él de los partidos políticos de la democracia "puntofijista". Más bien hubo una profundización de la dependencia de los Estados Unidos en cuanto a la concepción de la educación y a prácticas educativas.

Según Rodríguez (1971), cinco hechos fundamentales influyeron en la reforma educativa que llevó a la implantación de la Matemática Moderna en Venezuela. Estos hechos son:

1. *La Evaluación de la Enseñanza de la Matemática en los liceos oficiales de Venezuela*, investigación pedagógica realizada por el Departamento de Matemáticas y Física del Instituto Pedagógico de Caracas en el año 1960.
2. La Primera Conferencia Interamericana sobre Educación Matemática, que se realizó en Bogotá (Colombia) del 4 al 9 de Diciembre de 1961.
3. Los cursos sobre Nuevas Tendencias en la Enseñanza de la Matemática iniciados por el Instituto Pedagógico de Caracas en el año 1963.
4. La labor realizada por la Oficina de Planeamiento Educativo del Ministerio de Educación (EDUPLAN) en los Institutos de experimentación y ensayo.
5. La actualización de programas realizada por la Dirección de Educación Secundaria Superior y Especial del Ministerio de Educación (DESSE). (Rodríguez, 1971, pp. 53-54)

Como vemos, Rodríguez (1971) marca el inicio de los hechos que llevan a la reforma de la educación matemática en el año 1960. En desacuerdo con esa opinión, señalo que los esfuerzos de modernización se inician prácticamente un década antes. Por otro lado, esa caracterización que hace Rodríguez de los hechos oculta la fuerte influencia extranjera en dicha reforma. De esta forma hace ver que la reforma fue producto de decisiones culturales autónomas tomadas por los actores políticos del "puntofijismo". En otras palabras, descontextualiza la reforma al no enmarcarla dentro de un proceso más amplio de transformación de la educación venezolana según los dictámenes de agencias estadounidenses. En otras palabras, pareciera tener la intención de ocultar que la Matemática Moderna llega a Venezuela por la vía de los Estados Unidos. Si bien es cierto que el principal mecanismo de divulgación fueron las conferencias interamericanas de educación matemática, no es menos cierto que las decisiones importantes sobre políticas y prácticas educativas se tomaban en otras instancias como las reuniones de Ministros de Educación, las promovidas por la Alianza para el Progreso, etc. Además, estas reformas curriculares fueron una parte de una escalada en la intervención de los sistemas educativos latinoamericanos.

El proceso de implantación de la Matemática Moderna en Venezuela se desarrolló básicamente en tres frentes: a) la formación de profesores en ejercicio, b) la elaboración de manuales para profesores y c) de libros de texto, y la reforma de los programas de estudio oficiales. A continuación presentamos algunos detalles de lo ocurrido en cada uno de estos ámbitos. Dado que en Venezuela el sistema educativo se rige por un currículo nacional obligatorio ponemos mayor énfasis en la manera como se llevó a cabo la reforma en este ámbito.

4 — Formación de profesores de matemáticas

La formación de profesores de matemáticas para la educación secundaria se inicia en Venezuela con la creación del Instituto Pedagógico Nacional en 1936, el cual fue producto del trabajo de la primera misión pedagógica chilena que vino al país. Sin embargo, los programas de estudio de los cursos de Matemáticas que se ofrecían en este instituto fueron diseñados siguiendo patrones españoles. Tanto los libros de texto como profesores españoles tuvieron una enorme influencia en la formación matemática de los primeros profesores de esta especialidad en Venezuela. La primera promoción de profesores egresó de ese instituto en junio de 1943, más de dos décadas antes que la primera promoción de Licenciados en Matemáticas.

El 6 de noviembre de 1959, fue creado el Instituto Pedagógico Experimental de Barquisimeto (IPEB). Algunos egresados de los institutos pedagógicos se incorporaron como profesores o como estudiantes en la Escuela de Física y Matemáticas de la UCV. Recordemos que los dos institutos pedagógicos, el de Caracas y el de Barquisimeto, no tenían rango universitario. Por muchos años los pedagógicos fueron las únicas instituciones formadoras de docentes de especialidad para la educación secundaria. Tenemos así que, para el momento de ser trasplantada la matemática moderna a Venezuela teníamos ya una tradición de tres décadas en la formación de profesores de matemáticas en instituciones postsecundarias y apenas comenzaban a graduarse unos pocos licenciados en matemáticas.

El Instituto Pedagógico de Caracas, antiguo Instituto Pedagógico Nacional, y el Instituto Pedagógico Experimental de Barquisimeto fueron los centros académicos de mayor actividad en la promoción de la matemática moderna en Venezuela. En estos institutos se realizaron un número de cursos para la formación de profesores de matemáticas en ejercicio en los nuevos contenidos de matemáticas. En 1963 se ofreció el Primer Curso Nacional Sobre Enseñanza de la Matemática en el IP de Caracas, el cual fue patrocinado por la Oficina de Planeamiento Educativo del Ministerio de Educación (EDUPLAN), la Dirección de Educación Secundaria, Superior y Especial del mismo ministerio y el Departamento de Matemáticas y Física del pedagógico. En el año 1964 se ofreció el Segundo Curso y, en 1965, no se pudo realizar el Tercero por falta de financiamiento. En 1966, la Fundación Shell, de la empresa petrolera del mismo nombre, ofrece un aporte financiero para continuar con estas actividades de formación por un plazo de cuatro años. Se realiza entonces en ese mismo año un curso sobre Nuevas Tendencias en la Enseñanza de la Física y de la Matemática con el financiamiento de la Fundación Shell y el patrocinio del IP de Caracas y del Ministerio de Educación (Rodríguez, 1971).

Como ya señalamos arriba, la actividad fuera de Caracas se centraba en el IPE de Barquisimeto, donde se dictó, con financiamiento de la Fundación Shell, el Curso de Perfeccionamiento en Matemática para Profesores de Enseñanza Media del 27 de julio al 1 de agosto de 1967. A este curso asistieron 70 profesores provenientes de diversas ciudades del país. Los asistentes recibieron cursos de Aálisis, Lógica, Geometría, Álgebra y Didáctica de la Matemática, y recibieron publicaciones escritas por Mialaret, Stone, Diedounné y Santaló entre otros. También tuvieron oportunidad de revisar los nuevos programas de Matemática para los Liceos de Ensayo. En el año siguiente se sumó a este esfuerzo de formación de los profesores de Enseñanza Secundaria, la Universidad del Zulia en la ciudad de Maracaibo, ubicada al occidente de Venezuela cerca de la frontera con Colombia.

Los cursos de formación de profesores de matemáticas en ejercicio estaban en general acompañados de un libro escrito especialmente para dichos cursos. El profesor Morales Vergara, del Instituto Pedagógico Experimental de Barquisimeto fue uno de los autores más prolíficos (Morales Vergara, 1966, 1967, 1968a, 1968b, 1969, s.f.). Los Institutos Pedagógicos también fueron los principales centros de producción de manuales para la formación de profesores en ejercicio. Por ejemplo, Raimundo Chela (1957) escribió el primer manual de álgebra para profesores en formación en el Instituto Pedagógico de Caracas. Este además fue el primer libro de álgebra moderna escrito por un autor venezolano.

En el IPE de Barquisimeto se publicó la primera revista venezolana de educación matemática, llamada *Matemática Elemental*. Los fundadores de esta revista fueron los profesores Manuel Morales Vergara, Hugo Niño y Ramón Cova. *Matemática Elemental* sirvió de instrumento de divulgación de la Matemática Moderna entre profesores. En sus páginas aparecieron artículos de Santaló, Servais y Picard entre otros, y fueron publicados documentos sobre proyectos curriculares, como la Universidad de Ilinois, y recomendaciones de diversas conferencias, tales como la Segunda Conferencia Interamericana de Educación Matemática.

5 — Programas de estudio oficiales

Los primeros programas donde aparecen contenidos de la llamada Matemática Moderna, específicamente los conjuntos, datan de 1955. Estos programas sufrieron un leve reforma en 1961 donde esos contenidos fueron eliminados. Siete años después aparecen los primeros programas de ensayo elaborados completamente bajo el enfoque de la Matemática Moderna. Luego, en 1961, fueron publicados los primeros programas oficiales para el Ciclo Básico Común, de la Educación Secundaria, donde se adopta oficialmente la matemática moderna. La implantación de esta reforma educativa culmina en 1973 con la entrada en vigencia de los programas de estudio de Matemática para el Segundo Año del Ciclo Diversificado. A continuación mostraremos algunos detalles de cada uno de estos programas de estudio.

En 1955 fueron aprobados unos Programas Provisionales de Educación Secundaria. Estos programas en parte eran una respuesta a las modificaciones que se introdujeron en la organización de ese nivel de nuestro sistema educativo. Por ejemplo, el Ciclo Básico del Bachillerato fue reducido a tres años. Según el Ministerio de Educación Nacional había tres razones adicionales para modificar los programas de estudio de Matemáticas, las cuales eran:

> Necesidad de organizar la enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria sobre la base de un desarrollo lógico gradual;
>
> Importancia que las Matemáticas tienen en casi todas las otras Ciencias y que las hacen instrumento indispensable en diversas asignaturas del Bachillerato;
>
> Conveniencia de no separar mucho en la Educación Secundaria el Álgebra y la Aritmética de la Geometría, ni tampoco la Geometría del espacio y la del plano. (Ministerio de Educación, 1955, p. 16)

En lo que respecta a los contenidos, en estos programas se introduce por primera vez el tema de conjuntos como parte de la Aritmética. En el primer bloque de contenidos de Matemáticas para el Primer Año se estipulan los contenidos siguientes: "1.-Conjuntos. Correspondencia entre conjuntos. Número cardinal de un conjunto. La sucesión de los números naturales. Igualdad y desigualdad de números naturales" (Ministerio de Educación, 1955, p. 18). A estos contenidos se le agregan los sistemas de numeración, sistemas de base diferente de diez, la interpretación de la adición y de la sustracción por medio de conjuntos, se amplia el estudio de los polinomios, las operaciones con polinomios y otros. Es notable la incorporación de nuevos temas de geometría, 19 de un total de 23 temas son de esta rama de las matemáticas. En el programa anterior, vigente desde 1944, sólo había dos temas de geometría para ese mismo año de la educación secundaria. De este modo, el curso de matemática del Primer Año de este nivel educativo dejó de ser un curso de aritmética, y se incluyen ahora más temas de geometría y se insiste en estudiar su relación con la aritmética. En cuanto a la organización, estos programas de estudio se caracterizaban por ser sólo una lista de contenidos agrupados por temas. Los contenidos del curso de Matemáticas estaban organizados según la clasificación tradicional de las matemáticas en aritmética, álgebra, geometría y trigonometría. No incluían bibliografía recomendad y estaban acompañados de muy pocas orientaciones para el docente.

En 1957 aparecen publicados unos nuevos programas, los cuales son una versión recortada de los de 1955. En estos nuevos programas son eliminados todos los temas relacionados con los conjuntos y se recortan considerablemente los temas de geometría. En términos generales se mantienen la misma organización y características fundamentales de los programas anteriores.

Los programas de 1957 sufrieron una modificación en 1961. El Ministerio de Educación (1961) argumenta sobre la necesidad de reformar integralmente los programas anteriores. Mientras se reforman dichos programas "se ha optado por reducir los antiguos programas a los contenidos esenciales de cada asignatura" (Ministerio de Educación, 1961, p. 3) dado que los mismos están exageradamente recargados y, por tanto, no pueden ser vistos en el año escolar. En cuanto a la organización, tenemos que se mantiene la agrupación de los contenidos en bloques según la división clásica de las matemáticas en: Aritmética, Geometría, Álgebra y Trigonometría. Estos programas, al igual que los anteriores, son una mera lista de contenidos sin orientaciones para el docente. Tampoco incluye bibliografía recomendada.

Los programas de 1955, y sus sucesivas reformas de 1957 y 1961 respectivamente fueron los precedentes de la modernización de la enseñanza de la Matemática por la vía de los cambios de los programas de estudio oficiales. Desde el punto de vista oficial, la reforma de los programas de estudio que lleva a la implantación de la Matemática Moderna se inicia con la creación de la Comisión de Planes y Programas (CPP), mediante la Resolución No. 4.430 del 25 de mayo de 1965. Esta comisión estaba adscrita a la Oficina de Planeamiento Integral de la Educación y estaba integrada por una Comisión Central y doce Subcomisiones de Trabajo, entre las cuales había una de Matemática. En la elaboración de los planes de trabajo de la CPP jugó un papel muy importante el Dr. Calixto Suárez G., experto de la UNESCO. Cinco de los integrantes de la CPP viajaron, en el mismo año de su fundación, a Francia, Suiza, Inglaterra y España. Estos dos hechos corroboran la hipótesis de la influencia extranjera en el diseño y ejecución de la reforma educativa de la década de 1960.

La CPP elaboró la estructura básica de los primeros programas en 1965. En ese mismo año se realizó un Seminario de Supervisores Regionales de Educación para discutir esa estructura. Los programas experimentales para el Primer Año del Ciclo Básico fueron elaborados en 1966 tomando en cuenta las observaciones recogidas en ese seminario. El ensayo de esos programas se realizó en dos liceos. En el año 1967, la CPP actualizó la primera versión de los programas experimentales que se ensayaron en esos liceos y elaboró nuevos programas para el Segundo Año del Ciclo Básico. En ese año también se extendió el ensayo a dos instituciones educativas más.

En 1967 apareció publicado el documento titulado *Distribución del Contenido de los Programas de Matemáticas de Educación Secundaria*, el cual regiría la enseñanza de esta asignatura en los tres años del Ciclo Básico en la Zona 1 del Ministerio de Educación. En este documento buscaba ".. despertar inquietudes y toma de conciencia del verdadero tipo de educación matemática que esté de acuerdo con las necesidades de nuestra época" (citado en la sección de Noticias del número 3 de la revista *Matemática Elemental,* 1967, p. 55). Esta planificación de los contenidos de Matemática para el Ciclo Básico profundizaba la introducción de la Matemática Moderna en nuestras escuelas.

Con la aparición de los programas de ensayo, basados en la Taxonomía de Bloom, se rompe con el esquema clásico de los programas como un alista de contenidos. Tenemos entonces que los nuevos programas de estudio, donde se introdujo la Matemática Moderna, fueron diseñados sobre la base de objetivos expresados en términos de conductas observables. El contenido de estos programas estaban organizados en cuatro columnas, cada una identificada con los títulos siguientes: 1) Objetivos específicos, 2) Contenido, 3) Actividades y 4) Recomendaciones.

La adopción de la Matemática Moderna llevó a una completa reforma de la enseñanza de la Matemática, en lo que respecta a los contenidos propuestos en los programas de estudio oficiales. Tomaremos como el ejemplo el tema de las funciones para mostrar la magnitud de esa reforma. En la tabla 4.1 se muestra la manera como se ha tratado el tema de funciones desde 1955 hasta 1969.

Tabla 4.1. Evolución la enseñanza del concepto de función en los programas de estudio.

1955	1957	1961	1969-1973
Primer Ciclo Primer Año	Primer Ciclo Primer Año	Primer Ciclo Primer Año	Ciclo Básico Común Primer Año Unidad 1 17.-Comprender el concepto de producto cartesiano. (...) 22.-Comprender la idea de correspondencia 23.-Comprender la idea de aplicación o función. 24.-Conocer la aplicación biyectiva.
Segundo Año 6.-Concepto de función. Representación cartesiana. Construcción aproximada de los gráficos cartesianos de algunas funciones sencillas. Estudio gráfico de algunas leyes tomadas de la Física, la Química, la Geometría, etc., que se rijan por funciones lineales, cuadráticas, etc. La variación proporcional. La variación inversamente proporcional.	Segundo Año	Segundo Año	Segundo Año 11. Analizar funciones reales 11.1. Dada una función real construir el conjunto de pares (a, f(a)). 11.2. Representar gráficamente las funciones de la actividad anterior. 11.3. Analizar gráficos de funciones reales, establecer conclusiones. Ejemplo: $f(x) = ax + b$, dando a y b valores notables. $f(x) = \|x\|$. 14. Conocer la función cuadrática.
Tercer Año	Tercer Año Tema No. 2.- a) Sistema de coordenadas rectangulares. Notación. Representación gráfica de funciones de primer grado.	Tercer Año	Tercer Año 9. mantener la noción de aplicación. 10. Comprender el concepto de inyección. 11. Comprender el concepto de sobreyección.
Tercer Año	Tercer Año Tema No. 2.- a) Sistema de coordenadas rectangulares. Notación. Representación gráfica de funciones de primer grado.	Tercer Año	Tercer Año 9. mantener la noción de aplicación. 10. Comprender el concepto de inyección. 11. Comprender el concepto de sobreyección.

1955	1957	1961	1969-1973
Segundo Ciclo Primer Año	Segundo Ciclo Primer Año	Segundo Ciclo Primer Año Tema No. 1.- a) (...). Definición de las funciones trigonométricas en el triángulo rectángulo. Funciones trigonométricas de ángulos complementarios. (...) Dada una función trigonométrica de un ángulo, calcular las restantes. Ejercicios. Tema No. 2.- a) El círculo trigonométrico. Definición general de las funciones trigonométricas para ángulos cualesquiera. Signo de las funciones. Máximo y mínimo. Representación geométrica de las funciones trigonométricas directas. b) Periodicidad de las funciones trigonométricas. Relación entre las funciones trigonométricas de ángulos simétricos. Relación entre las funciones trigonométricas de ángulos suplementarios, de ángulos que difieren en 180 y ángulos de la forma 2π-x). (...)	Ciclo Diversificado Primer Año Unidad II 10.- Recordar que existe una biyección entre el conjunto RxR y el conjunto de los puntos del plano. 11.- Resolver ejercicios sobre funciones reales. 12.- Analizar la función exponencial. (…) 14.- Definir la función logarítmica 15.-Estudiar las propiedades de la función logarítmica. 16.- Construir la gráfica de la función logarítmica Unidad III 23.-Definir las funciones trigonométricas en el círculo trigonométrico. 24.-Aplicar las propiedades de las funciones seno y coseno y establecer relaciones. 25.-Definir las funciones: tangente, cotangente, secante y cosecante. (...) 27.-Definir las funciones trigonométricas como funciones de variable real. (...) 29.-Aplicar las funciones trigonométricas a la resolución de problemas.

Fuente: Programas de estudio oficiales.

Otro aspecto de la reforma es la importancia que se la da a las estructuras matemáticas. Al punto que en uno de los programas de ensayo se llega a declarar que: " obedeciendo a las nuevas tendencias en la enseñanza de la asignatura conduciendo al conocimiento en un forma integral de manera que las "estructuras mentales" de los alumnos estén asociadas a la "estructuras del pensamiento matemático" (Instituto Experimental de Formación Docente, 1968, p. 1). Desde este enfoque estructural el álgebra cobra una importancia que no tenía en los programas anteriores y desplaza a la geometría en importancia. Aunque, como vimos anteriormente, en el caso de Venezuela, para el momento de la implantación de la Matemática Moderna el número de contenidos de geometría habían sido reducido considerablemente. Tomando como referencia la caracterización de la educación matemática en Brasil hecha por Fiorentini (1995), podríamos decir que en Venezuela se pasó prácticamente de manera directa del formalismo clásico al formalismo moderno.

Como señaláramos anteriormente, la reforma de la Matemática Moderna en Venezuela se realiza comparte del proceso más general de neocolonización. Caracterizamos este proceso, en términos de la teoría de las decisiones culturales (Bonfil-Batalla, 1984), como de toma de decisiones culturales ajenas tomadas sobre objetos culturales también ajenos. La adopción de este enfoque respondía más a las necesidades de la Metrópoli que a la realidad venezolana. Es obvio que no todos los actores que participaron en la reforma compartan esa opinión. Por ejemplo, Orellana (1980) se defiende de los críticos de la reforma curricular afirmando que los nuevos programas "se realizaron en Venezuela y no como copia de modelos extranjeros" (p. 117). Otros opinan diferente. En un estudio comparativo de la enseñanza de la Matemática en EUA, Francia y Venezuela, Calderín de Guédez y Andonegui (1978) concluyen que los programas venezolanos se parecen a los franceses en su rigidez, de marcada influencia europea y que siguen una secuencia en función de la lógica de los contenidos. Estos autores resaltan la necesidad de una reforma curricular orientada por nuestras verdaderas necesidades, actuales y futuras, y diseñada sobre la base de una filosofía propia y coherente (Calderín de Guédez y Andonegui, 1978). A pesar de estos comentarios no se llego en nuestro país a posturas radicales como la de Álvarez Rojas (1974) en Argentina. Para este autor, "las matemáticas modernas" fueron implantadas con el fin de "esterilizar la capacidad de las masas para comprender los procesos (tanto naturales como sociales)" (p. 64) y estuvieron al servicio de la profundización las desigualdades dentro de y entre los países latinoamericanos. En otras palabras, como instrumento al servicio del neocolonialismo.

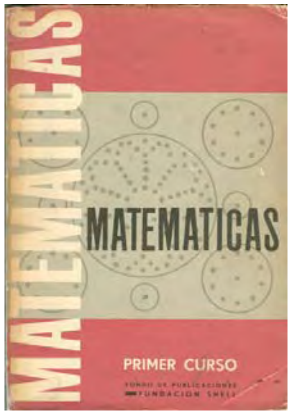
6 — Los libros de texto

Al igual que en otros países, los libros de textos fueron uno de los principales medios para llevar adelante la reforma de la Matemática Moderna. Esta estrategia era novedosa en Venezuela. Junto con la elaboración de los programas de estudio de ensayo comienzan a aparecer algunos libros bajo el enfoque de la Matemática Moderna con la idea de promoverla principalmente entre los profesores. En el caso venezolano era necesario esperar hasta la aprobación de los nuevos programas dado que tenemos un currículo nacional obligatorio y los libros tenían que ser aprobados por el Ministerio de Educación para poder ser usado en las escuelas.

Antes de la reforma de la Matemática Moderna, el mercado de los libros de texto estaba dominado por los libros de texto de Boris Bossio Vivas y de Nestor Alvarado D. y José A. Antonini A. respectivamente, todos ellos profesores egresados del Instituto Pedagógico Nacional. Con la matemática moderno surgen nuevos libros y se aumenta considerablemente la oferta. Podemos decir que esta época marca el inicio de la industria de los libros de texto en Venezuela. Recordemos que la reforma coincide con los esfuerzos de masificación de la educación que comienza a mediados de los años 1950, después del derrocamiento del Dictador general Marcos Pérez Jiménez. Esta masificación ocasionó un aumento considerable de la demanda de libros de texto, dado que en nuestro país cada estudiante tiene que comprar individualmente sus libros de texto. La expansión del mercado editorial no fue exclusiva de las matemáticas escolares. Este crecimiento no fue vista con buenos ojos por algunos grupos de intelectuales, quienes lo caracterizaron como "meramente mercantil", producto de "Grupos de profesores mercenarios [que] se dedican a la producción descontrolada con el solo fin de obtener beneficio personal" (Hernández Montoya, 1975, p. 39).

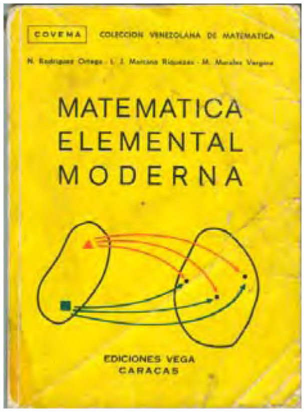
El movimiento de la Matemática Moderna en Venezuela, al igual que en otros países, se apoyo en la producción de libros de texto. Como señalamos anteriormente, los libros de textos tienen que estar adaptados a los programas d estudio oficiales para contar con la aprobación del Ministerio de Educación y Deportes. Sin embargo, los primeros libros de matemáticas escritos bajo el enfoque de la Matemática Moderna surgieron antes de que éste fuera incorporado al currículo oficial. Tal es el caso de libro de Quinto de Anzola y otros (1965) (figura 4.1). Este libro fue publicado por la Fundación Shell, lo cual muestra el interés de las transnacionales en promover la reforma curricular en Venezuela. Este libro fue incorporado, años más tarde, en la lista de textos recomendados en los programas de estudio para el Primer Año del Ciclo Básico Común (Dirección de Planeamiento, 1970). Según Rodriguez (1965), "la tarea emprendida ha transcendido más allá de los linderos del país, colocándose al lado de las más promisorias en América del Sur, y no es aventurado afirmar que, en un futuro no muy lejano, ella puede ser factor importante para el cambio de orientación en la enseñanza de las Matemáticas que requiere América Latina" (p. 5).

Figura 4. 1. Primer libro venezolano bajo la influencia de la Matemática Moderna de 1965 (Angola y outros, 1965).



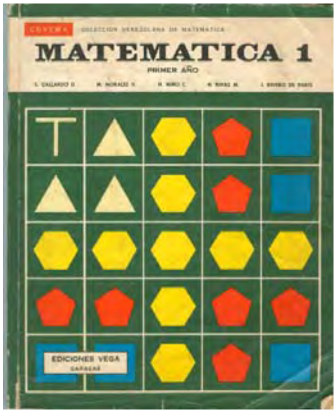
El libro Matemáticas, publicado por la Fundación Shell, no estaba dirigido a estudiantes de un año en particular de la educación secundaria. El primer libro escrito especialmente para estudiantes del Primer Año de educación secundaria fue el de Gallardo Duthill y otros (1967). En la figura 4.1 aparece la portada de la primera edición, la cual fue financiada por el Instituto Pedagógico Experimental de Barquisimeto, y en la figura 4.2 se muestra la portada de la 4ta edición del mismo libro en su versión comercial. Estos primeros libros de matemática moderna marcan el inicio de la industria de los libros de texto en Venezuela. Hasta estos años los libros de Boris Bossio y de Alvarado y Antonini habían monopolizado ese mercado. Los libros de estos autores se caracterizaban por tener portadas unicolor y aspecto formal. Los nuevos libros escritos bajo la influencia de la Matemática Moderna introdujeron las portadas a colores con ilustraciones, así como internamente. Las portadas de los nuevos libros eran muy llamativas de colores intensos como amarillo o naranja. Ver la portada en la Figura 4.3 del libro de Rodríguez.

Figura 4.2. Primer libro de texto de Matemática Moderna para el Primer Año de Bachillerato de 1967 (Duthill e outros, 1967).



Aparecieron muy pocas alternativas a la versión anglo-francesa de la Matemática Moderna en Venezuela. En cuanto a los libros de texto sólo tengo información del libro del *School Mathematics Project* (1972) de Inglaterra, cuya versión en español fue presentada por Miguel Parra León y el prólogo fue escrito por Ignacio L. Iribarren T. Para el momento de la publicación de ese libro, Miguel Parra León era el Presidente de la Academia de Ciencias Física, Matemáticas y Naturales de Caracas, y el profesor Ignacio L. Iribarren T. se desempeñaba como Jefe del Departamento de Matemáticas de la Universidad Simón Bolívar, también en Caracas. Este libro no se adaptaba a ningunos de los programas de estudio de Matemáticas vigentes para ninguno de los años de la Educación Secundaria. Tampoco contó con la aprobación del Ministerio de Educación en ese momento. Por tanto, su adopción en las escuelas debió ser bastante limitada.

Figura 4.3. Uno de los primeros libros de texto con el título de Matemática Moderna (Rodríguez, 1967).



A mediados de los años de 1980 se produjo una reforma del sistema educativo que llevó a la implantación de una Escuela Básica de nueve grados. En esta nueva escuela se integraban los seis años de la Educación Primaria y los tres años del Ciclo Básico Común de la Educación Secundaria. Los nuevos programas de estudio de Matemática fueron diseñados bajo la influencia del movimiento estadounidense conocido como el "back-to-basics". En la elaboración de estos programas jugó un papel muy relevante el Centro Nacional para el Mejoramiento de la Enseñanza de la Ciencia (CENAMEC). El personal de esta institución se inspiró en varios trabajos del NCTM, en especial en la *Agenda for action.* Esta reforma dejó intactos los programas de estudio de Matemática para la Educación Media Diversificada y Profesional (EMDP) puestos en práctica desde 1972. Dichos programas fueron simplificados a principios de los años 1990, permaneciendo el predominio del álgebra desde un enfoque estructuralista en los mismos.

La situación antes descrita permitió que muchos de los libros de texto escritos para los programas del primero y segundo año de la EMDP, escritos en la época de la Matemática Moderna, todavía sigan siendo utilizados en las escuelas secundarias venezolanas. Muy poco ha progresado el mercado editorial en ese sentido. La falta de articulación entre los diferentes niveles del sistema educativo ha favorecido el surgimiento de problemarios con muy poco contenido teórico.

Conclusiones

En términos generales, el transplante de la Matemática Moderna a Venezuela fue parte de un proceso más amplio de profundización del control estadounidense de la economía y de otros ámbitos de la vida nacional. Describimos este proceso como parte del neocolonialismo. La reforma curricular que llevó a la implantación de la Matemática Moderna formaba parte de la estrategia más amplia de la lucha contra el comunismo y los movimientos de liberación en América Latina. Esta reforma llegó de la mano de la planificación educativa y de los estudios del currículo, ambos sustentados sobre la concepción economicista de la educación. Las corporaciones petroleras y de otros ramos, como la Shell y Ford, contribuyeron a la implantación de la Matemática Moderna en Venezuela través de fundaciones. Kilpatrick (1996) señala que este proceso de transplante de la Matemática Moderna a otros países fue un error.

En cuanto a la reforma en si podemos decir que los libros de texto y los manuales para profesores en ejercicio jugaron un papel muy importante en la diseminación e implantación de la matemática moderna en Venezuela. Incluso, muchos de esos libros y manuales aparecieron antes que la matemática moderno se implantara oficialmente. Se puso mucho énfasis en enseñarle a los profesores en ejercicio la nueva matemática y no se atendió el problema de las maneras de enseñar esta asignatura en el aula. Los profesores de los Institutos Pedagógicos fueron los principales promotores de la Matemática Moderna, dad ala debilidad de la comunidad matemática venezolana. Se le dio muy poca importancia a las aplicaciones de las matemáticas a situaciones reales. Esta actitud es muestra del interés en mantener a las matemáticas abstraídas de la realidad local, para reforzar su universalidad, y liberarla de la influencia de la cultura. Las dos épocas de la comunidad matemática moderna, distinguidas por Di Prisco y Lara (1984), se caracterizan por la actividad de los matemáticos sin conexión con la realidad del país. Ellos respondían a los intereses de la academia, en especial los intereses de la Metrópoli.

Referencias

Almandoz,A. (2004). La americanización venezolana en ensayos y novela de los años 1960 y 1970. *Anales, 4*(1), 183-200.

Álvarez Rojas, F. (1974). El formalismo lógico en la reforma educativa. *Revista de Pedagogía, 5*, 64-72.

Antonorsi Blanco, M. (1985). *Planificación y política económica.* Caracas: Universidad Nacional Abierta.

Bampi, L. (s.f.). *Currículo como tecnología de governo de cidadãs y cidadãos.* Disponible en: www.anped.org.br/23/textos/1207t.PDF

Blaug, M. (1980). *La reforma de la educación en América Latina*. Caracas: CINTERPLAN.

Britto Gracia, L. y Negrete, P. (s.f.). *Ciencia, técnica y dependencia.* (Segunda edición). Caracas: Rocinante.

Burroughs, G. E. R. (1968). *Propuestas de investigación pedagógicas en Venezuela.* Material mimeografiado. Propuesta ME-Fundación Ford, Caracas.

Burroughs, G. E. R. (1974). *Education in Venezuela.* Londres: Archon.

Calderín de Guédez, T. y Andonegui, J. (1978). *Estudio comparado de la enseñanza de la matemática en EE.UU., Francia y Venezuela.* Trabajo mimeografiado. Instituto de Estudios Superiores de Administración, Caracas.

Chela, R. (1957). *Curso de álgebra. Colección manuales de enseñanza. Caracas*: Instituto Pedagógico.

Comisión de Planes y programas (1969). Boletín de la Oficina de Planificación Integral de la Educación. *Educación, 33*(132), 187-206.

Departamento de Investigaciones Educacionales. (1968). *El programa nacional de investigación educativa.* Caracas: Oficina de Planeamiento Integral de la Educación-Ministerio de Educación.

Di Prisco, A. y Lara, L. (1984). Comentarios sobre la investigación matemática en Venezuela. En H. M. C. Vessuri (comp.) *Ciencia académica en la Venezuela moderna: Historia reciente y perspectivas de las disciplinas científicas* (pp. 237-278). Caracas: Acta Científica Venezolana.

Dirección de Planeamiento (1972). ¿Por qué el Ciclo Diversificado? *Educación, 33*(145-146), 21-34.

Equipo de Formación, Información y Publicación. (1975). *La clase obrera frente a la educación.* Caracas: El Autor.

Fiorentini, D. (1995). Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. *Zetetiké, 3*(4), 1-37.

Gallardo Duthil, S., Morales Vergara, M., Niño caro, H. A., Rivas Mijares, H. y Rivero de París, J. (1967). *Matemáticas 1.* Barquisimeto: Instituto Pedagógico Experimental.

Giménez Romero, J. (1974). *Curso propedeútico de matemática.* Caracas: Vega.

Hernández Montoya, R. (1975). *La enseñanza de la literatura y otras historias.* Caracas: Universidad Central de Venezuela.

Kilpatrick, J. (1996). *Five lessons from the new math era.* Trabajo presentado en el Simposio Reflecting on Sputnik: Linking the past, present and future of educational reform. Disponible en: http://www.nationalacademies.org/sputnik/kilpatin.htm

Learner de Almea, R. (1965). Hacia la reforma integral de la educación por medio del planeamiento. Función de los ensayos piloto. *Educación, 26*, 3-17.

Meza Flores, M. (1975). Análisis de las variables educación matemática y producciones económicas en seis países latinoamericanos en el período 1960-1970. Santiago de Chile: Universidad Técnica del Estado.

Ministerio de Educación-Fundación Ford. (s.f.). *Programa de Investigaciones sobre educación en Venezuela.* Material mimeografiado, Caracas.

Morales Vergara, M. (1966). *Álgebra lineal.* Barquisimeto: Ministerio de Educación- Instituto Pedagógico Experimental.

Morales Vergara, M. (1968). *Anillos. Generalidades.* Barquisimeto: Instituto Pedagógico Experimental-Instituto de Mejoramiento Profesional del Magisterio.

Morales Vergara, M. (1968). *Grupos y sub-grupos. Cuadernos de álgebra 2.* Barquisimeto: Instituto Pedagógico Experimental-Instituto de Mejoramiento Profesional del Magisterio.

Morales Vergara, M. (s.f.). *Estructuras algebraicas. Elementos. Fascículo I.* Barquisimeto: Instituto Pedagógico Experimental.

Morales Vergara, M. Y García Suárez, L. (1967). *Complementos y ejercicios de álgebra* (Curso de perfeccionamiento de Matemática). Barquisimeto: Instituto Pedagógico Experimental-Instituto de Mejoramiento Profesional del Magisterio.

Oficina Central de Planificación y Presupuesto. (1975). *V Plan de la Nación. Sector educativo 1976-80.* Caracas: El Autor.

Orellana, M. (1980): *Dos décadas de la matemática en Venezuela.* Caracas: Universidad Nacional Abierta.

Planchart., E. (2000). Raimundo Chela. *Boletín de la Asociación Venezolana de Matemática, 8*(1-2), 53-57.

Posner, G. (2005). *Análisis de currículo* (Tercera Edición) (M. A. Martínez Sarmiento, Trad.). Bogotá: Mc Graw Hill. (original 2004)

Quinto de Anzola, E., Echegaray de Scharfenberg, L., Amestoy de Sánchez, M., Marcano Coello, G., M. de Tomassic, C., Martin, F., Colina Heredia, A. y Colmenares R., P. (1965). *Matemáticas. Primer Curso.* Caracas: Fundación Shell.

Rodríguez Gómez, A. (1995). Enseñanza de la matemática en Venezuela: ¿Un cuenco de mendigo?. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 2*(2), 73-79.

Rodríguez, J. A. (1965). Prólogo. En Quinto de Anzola, E., Echegaray de Scharfenberg, L., Amestoy de Sánchez, M., Marcano Coello, G., M. de Tomassic, C., Martin, F., Colina Heredia, A. y Colmenares R., P. *Matemáticas. Primer Curso.* Caracas: Fundación Shell.

Rodríguez, J. A. (1971). Contribución del Instituto Pedagógico al desarrollo de la enseñanza de la Matemática en la Educación Media. *Educación,* No. 140-141, 53-56.

Rodríguez, N. (1988). *Criterios para el análisis del diseño curricular. Cuadernos de educación, No. 134*. Caracas: Laboratorio Educativo.

Sánchez, A. (s.f.). *Visión retrospectiva de la educación matemática en el contexto venezolano.* Disponible en: http://servidor-opsu.tach.ula.ve/profeso/sanch_alf/ponencias/vision_restrospec.pdf

School Mathematics Project (1972). *Nuevo curso de matemáticas. Libro 1.* (J. Chabás Bergón, Trad.). Madrid: Científico-Médica. (Original 1965)

Uslar Pietri, A. (1972). *De una a otra Venezuela.* Caracas: Monte Ávila.

Sobre o autor:

Julio Mosquera
Universidad Nacional Abierta
Av. Los Calvani No. 18; San Bernardino — Caracas 1010, Venezuela
jmosque@una.edu.ve

Elementos sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática Moderna em Portugal no final dos anos 70

José Manuel Matos[33], Universidade Nova de Lisboa, Portugal

Nos meios de comunicação social portugueses é comum encontrar a opinião de que nos dias de hoje a qualidade das aprendizagens dos alunos é muito inferior à de outros tempos. A ilação mais ou menos implícita nessas análises é a de que, no que se refere à escola, a relação entre os professores, os alunos e o saber se alterou profundamente. Em comparação com os tempos da ditadura de Salazar[34], dizem, a escola é hoje muito mais anárquica, os programas menos exigentes, os professores menos sabedores e os alunos menos disciplinados. Não me recordo, no entanto, de ver qualquer uma destas opiniões sustentada em investigações históricas. Existem muitos trabalhos que documentam uma das grandes diferenças entre a escola actual e a escola de meados do século XX, consequências da explosão escolar a partir da década de 50 e até à década de 80 do século passado gradualmente levou para a escola estratos sociais que nunca antes a ela tinham tido acesso (S. Grácio, 1986, por exemplo). Mas existem poucos estudos que analisem mais profundamente a realidade escolar dessa época e sustentem, ou contradigam, aquelas opiniões correntes. Faltam aqui essencialmente trabalhos históricos quase antropológicos na tradição do que costuma designar de história cultural que estudem

[33] Desejo agradecer a Wagner Valente, Maria Emília Catela e Mária Santos que leram versões preliminares deste trabalho. Desejo ainda agradecer a Maria Almeida que ajudou a esclarecer a teia dos livros de texto da época em análise. As eventuais lacunas são da minha responsabilidade.

[34] Que decorreu entre os anos 30 do século passado e terminou em 1974.

profundamente as práticas escolares do passado, ou, no dizer de Dominique Julia (2001), a *cultura escolar*.

É uma primeira abordagem ao estudo desta cultura escolar do final dos anos 70 do século passado que pretendo trabalhar neste texto, especialmente a que se relaciona com as condições de ensino e aprendizagem da Matemática. Delimitando ainda mais, pretendo aqui estudar estas condições tal como elas aparecem num conjunto coerente de relatórios técnicos provenientes do *Projecto de Avaliação do Ensino Secundário Unificado* publicados pelo Gabinete de Estudos e Planeamento do Ministério da Educação e Investigação Científica português entre 1977 e 1981. Explica esta restrição, para além do meu interesse pessoal, a necessidade de delimitação do campo de estudo, bem como o lugar central atribuído a esta disciplina no imaginário escolar de então e de agora.

1 — O contexto social e educativo

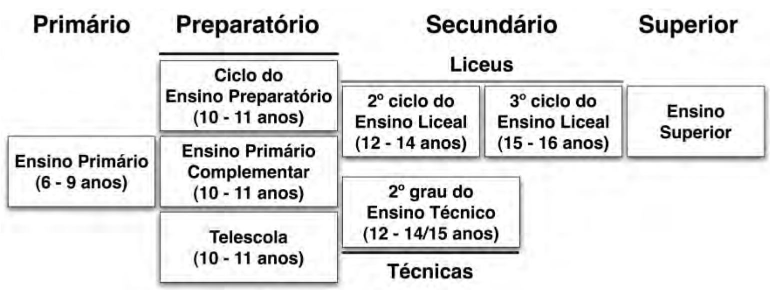
Lentamente, desde meados dos anos 50, com a entrada na esfera do poder de um grupo de personalidades do regime salazarista adeptas de um reforço da industrialização do país, algo vai mudando na educação. Muito vigiados (e limitados) pelos elementos mais conservadores do regime, vão gradualmente abrindo o caminho para um conjunto de alterações fundamentais na educação: o alargamento da escolaridade básica obrigatória[35], a unificação curricular para todos os alunos dos primeiros dois anos após os quatro do ensino primário, a adopção da co-educação terminando com a separação entre os dois sexos na escola, a reforma do ensino universitário e em particular da formação de professores (Rosas,

[35] Existiram alargamentos sucessivos da escolaridade básica que passou de 3 anos até 1956 para 6 anos em 1964 (Carvalho, 1996).

1994; Teodoro, 1999). Estas mudanças, que demoram muitos anos a ver a luz do dia, são levadas a cabo por diversos Ministros da Educação que nem sempre coincidiam nas suas visões educativas.

Cabe aqui referir que a estrutura educativa portuguesa era (e ainda é) o exemplo de um sistema educativo centralizado. Nas vésperas do 25 de Abril de 1974, os alunos entravam para a escola com 6 anos de idade e percorriam 4 anos de Ensino Primário seguidos de 2 anos do Ensino Preparatório — onde concorriam diversos sub-sistemas —, após o que deveriam optar entre prosseguir os estudos nos Liceus ou nas Escolas Técnicas. Esta separação era legitimada pela distinção cara ao regime entre o *homo sapiens*, o destinado aos Liceus associado à elite, e o *homo faber*, destinado às Técnicas subvalorizado socialmente e associado ao trabalho operário especializado.

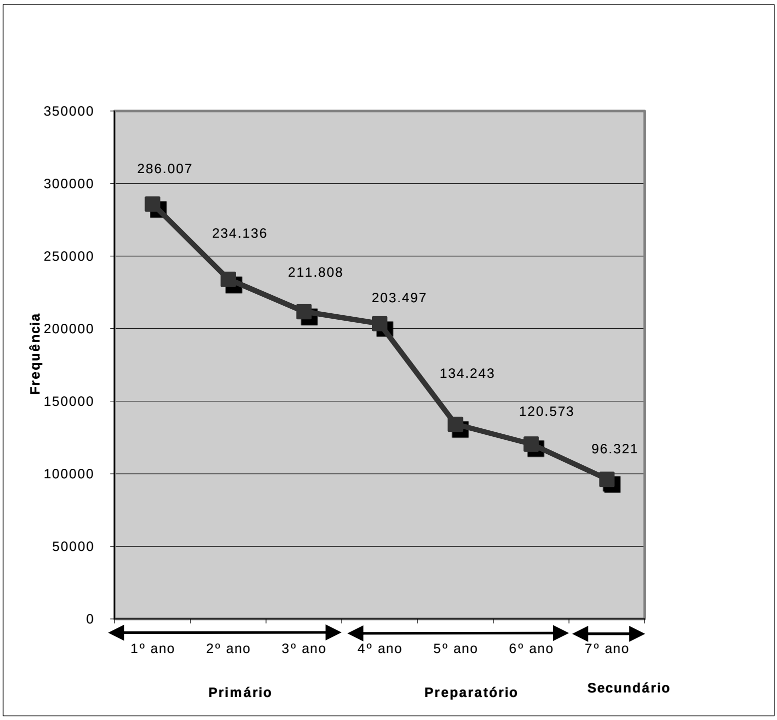
Figura 5.1. Estrutura simplificada do sistema educativo português em 1974.



A figura 5.1 apresenta a estrutura simplificada do sistema educativo português em 1974. Desde há alguns anos que a intenção de aproximar o Ensino Liceal do Técnico é referida em diversos documentos oficiais e decorriam diversas experiências nesse sentido (que não estão todas reflectidas no diagrama).

Apesar do crescimento sustentado desde os anos 50 (S. Grácio, 1986), o sistema educativo português continuava a ser muito selectivo. A figura 5.2 mostra a distribuição da população escolar portuguesa nos primeiros sete anos de escolaridade no ano de 1975/76 (Catela, 1978b, p. 4). Embora a quase totalidade das crianças abrangidas frequentasse o 1º ano de escolaridade, constata-se que o abandono escolar tomava proporções muito grandes nos anos seguintes.

Figura 5.2. Frequência dos sete primeiros anos de escolaridade em 1975/76 (Catela, 1978b, p. 4).



Com a revolução portuguesa de Abril de 1974 que acabou com o regime ditatorial, as mudanças que estavam a ser preparadas são aceleradas e são ainda introduzidas outras novas. No que interessa a este trabalho, a alteração fundamental foi a eliminação gradual a partir de 1975/76 da distinção entre Liceus e Escolas Técnicas, criando-se assim o Ensino Unificado igualando as oportunidades de ensino para todos os alunos. A fusão progressiva entre os dois tipos de escolas começa com um despacho do Ministro da Educação de 1/8/1975 que determina a unificação dos dois sub-sistemas escolares no que viria a constituir o 7º ano de escolaridade, e logo no ano lectivo seguinte, 1975/76, este regime funciona na quase totalidade das escolas secundárias nacionais (Freitas, 1979). Nas palavras do seu inspirador, Rui Grácio, então Secretário de Estado da Orientação Pedagógica, a medida de unificação pretendeu adiar para os quinze anos a escolha do rumo escolar, romper com a dualidade ensino liceal-ensino técnico, que exprimia e reforçava a dualidade trabalho intelectual-trabalho manual, e a dualidade dominante-dominado, e romper com a separação entre a escola e a comunidade, e a educação formal e a não formal (R. Grácio, 1985)[36].

2 — O Projecto de Avaliação do Ensino Secundário Unificado

Em Maio de 1976, já com o primeiro ano de implementação da reforma quase a terminar, o Secretário de Estado da Orientação Pedagógica encarregou o Gabinete de Estudos e Planeamento (GEP) do Ministério da Educação e Investigação Científica de elaborar os estudos necessários para avaliar a implementação do 7º ano. O GEP reagiu rapidamente, e apesar do adiantamento do ano escolar, consegue realizar um primeiro estudo coordenado por Cândido Varela de Freitas, responsável pelo grupo de avaliação,

[36] Uma discussão mais aprofundada desta medida, bem como das subsequentes pode ser encontrada em S. Grácio (1986) e em Teodoro (1999).

centrado no modo como decorreu a implementação do novo regime. O grupo de avaliação possuía alguma experiência de investigação nesta área, pois tinha colaborado com a OCDE[37], na avaliação de outras experiências educativas portuguesas que estavam a decorrer (Costa e Haglund, 1981; Coutinho, 1981; Freitas, 1979; Mendonça, 1980).

Esta primeira avaliação vai ser posteriormente aprofundada acompanhando a unificação dos dois anos de escolaridade seguintes (o 8º e o 9º anos). A carência em investigadores portugueses experientes tinha levado o Ministério da Educação a estabelecer um acordo de cooperação com a Suécia e, em Março de 1976 no âmbito dessa cooperação, uma delegação do Ministério da Educação visitou esse país. Na sequência desta visita, foi organizado em Novembro de 1976 um seminário de avaliação em Lisboa orientado por peritos suecos durante o qual foi exposto pelo Coordenador do Grupo de Avaliação do 7º ano de escolaridade do GEP o trabalho já efectuado e os projectos para o ano lectivo seguinte. Posteriormente, numa reunião no Porto com o Grupo de Avaliação, na qual participaram Luísa Cortesão, sua Coordenadora, Ingemar Fägerlind da Universidade de Estocolmo e Ann-Margret Fris do Ministério da Educação sueco, foram produzidos dois projectos que iriam dar conteúdo à colaboração luso-sueca, um para a formação de formadores educativos e outro, o que nos interessa, de avaliação da implementação da reforma nos 7º e 8º anos de escolaridade. Assim, a partir de Janeiro de 1977, começa a desenhar-se um grande projecto de avaliação deste processo de

[37] O modelo de avaliação para o 1977/77 baseou-se num documento de trabalho de Frances Link, perita da OCDE (Costa e Haglund, 1981, p. 4).

unificação dos dois ciclos, o *Projecto de Avaliação do Ensino Secundário Unificado* (Costa e Haglund, 1981; Coutinho, 1981; Pedro, 1980).

O Projecto vai acompanhar a generalização do ensino unificado até ao 9º ano de escolaridade, estuda os anos de 1976 até 1981 e publica um total de 16 relatórios, 15 dos quais se referem a investigações empíricas recolhendo dados junto de alunos, professores, encarregados de educação, membros de Conselhos Directivos e empresas. São usadas diversas metodologias, nomeadamente questionários, testes, entrevistas, entre outros, e, em paralelo com análises de amostras de grande dimensão, são estudadas algumas escolas em particular[38]. Mercê desta bateria de estudos, possuímos hoje elementos sobre as escolas portuguesas no final dos anos 70, abrangendo múltiplas dimensões do fenómeno educativo.

Como referi, a avaliação do Ensino Unificado inicia-se em 1975/76 (Freitas, 1979) com um estudo abrangente procurando conhecer problemas na sua implementação. No segundo ano de estudo começou a pensar-se na necessidade de avaliar a adequação dos currículos ao nível etário dos alunos, bem como o seu grau de apreensão dos novos currículos. Nesta segunda fase a disciplina de Matemática foi objecto de estudos específicos (foi, aliás, a única disciplina merecedora de um estudo aprofundado), essencialmente devido a ser, nas palavras dos investigadores, uma disciplina "fácil de manusear, tanto no que diz respeito à hierarquização de objectivos de conteúdo como à elaboração dos testes" (Catela e Kilborn, 1979, p. 2). Deste modo, dos 16 estudos produzidos, cinco

[38] Uma síntese quase completa dos trabalhos, bem como um historial do Projecto, pode ser encontrada em Costa e Haglund (1981, pp. 1-10).

aqui listados por ordem de publicação referem-se especificamente ao ensino e à aprendizagem da Matemática entre 1975 e 1979:

GEP 2 — Catela, M. E. (1978a). Ensino Secundário Unificado. A aprendizagem da Matemática. 7º e 8º anos. I - Testagem. Lisboa: GEP.

GEP 4 — Catela, M. E. e Kilborn, W. (1979). Ensino Secundário Unificado. A aprendizagem da Matemática em 1977/78. 7º e 8º anos. Lisboa: GEP.

GEP 10 — Catela, M. E. (1980). Ensino Secundário Unificado. A aprendizagem da Matemática em perspectiva: 9º ano de 1978/79 e sua relação com os 7º e 8º anos de 1977/78. Lisboa: GEP.

GEP 11 — Leal, L. C. e Fägerlind, I. (1981). Ensino Secundário Unificado. A aprendizagem da Matemática — Influência da escola e da família — 7º, 8º e 9º anos de escolaridade de 1977 a 1979. Lisboa: GEP.

GEP 15 — Leal, L. C. e Kilborn, W. (1981). Ensino Secundário Unificado. A aprendizagem da Matemática — A capacidade em cálculo básico matemático. Lisboa: GEP.

No âmbito do acordo luso-sueco, Wiggo Kilborn, "consultor e orientador das actividades inerentes ao estudo do curriculum de matemática do Ensino Unificado Português" (Catela e Kilborn, 1979, p. 3) e Ingemar Fägerlin participaram na implementação destes trabalhos centrados na matemática e trabalharam em colaboração com Maria Emília Catela, professora de Ciências e Leonor Cunha Leal, professora de Matemática, ambas trabalhando a tempo inteiro neste Projecto.

Outros relatórios deste Projecto, embora não centrados na Matemática, contêm também dados sobre esta disciplina. Tratando-se dos primeiros trabalhos de grande dimensão sobre a aprendizagem da Matemática realizados em Portugal, alguns foram já comentados num trabalho anterior (Ponte, Matos e Abrantes, 1998) cujo capítulo 3 procura sintetizar o que a investigação sabia sobre as aprendizagens de Matemática dos alunos portugueses. Aí se pode encontrar uma análise das opções metodológicas de investigação, bem como dos resultados desses trabalhos.

A Matemática foi pois objecto de investigações intensivas incidindo sobre as suas condições de ensino e aprendizagem e estes trabalhos assumem hoje importância acrescida, pois decorria então a grande alteração curricular que ficou conhecida como a reforma da Matemática Moderna. A análise daqueles estudos permite-nos agora conhecer alguns elementos sobre o modo como decorria a implementação desta reforma nas escolas portuguesas, nomeadamente sobre o funcionamento das aulas de Matemática, algumas dimensões do currículo de Matemática e, finalmente, alguns elementos sobre a aprendizagem da Matemática, em particular dos temas típicos de Matemática Moderna.

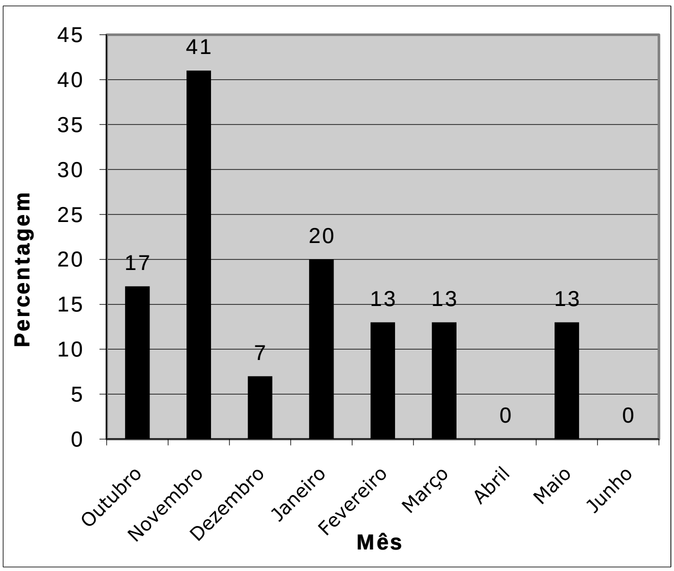
3 — O funcionamento das aulas de Matemática

Embora não contendo descrições de aulas de Matemática, importantes para a reconstituição da cultura escolar (Julia, 2001) a elas associada, o *Projecto de Avaliação* permite obter alguns elementos parcelares sobre o modo como estas funcionaram durante o final dos anos 70 do século passado. A partir das respostas a um inquérito enviado aos Conselhos Directivos de todas as escolas oficiais e particulares onde se leccionou o 7º ano em 1975/76 (Freitas, 1979), constata-se que as aulas de Matemática começaram tardiamente em numerosas escolas (responderam 307 escolas, 83% do total). A figura 5.3 apresenta a percentagem de escolas com turmas a começar aulas do 7º ano de Matemática em cada mês em 1975/76[39]. Por exemplo, apenas em 17% das escolas (!) houve turmas que começaram as aulas de Matemática no arranque do ano

[39] A soma das percentagens é superior a 100, pois uma escola pode ter turmas a começar as aulas em meses diferentes.

lectivo em Outubro de 1975. 20% das escolas que responderam tiveram turmas a começar aulas de Matemática em Janeiro, no início do 2º período lectivo, e 13% apenas no 3º período. O panorama é similar noutras disciplinas. Não existem dados sobre o número de turmas que não tiveram aulas de Matemática o ano inteiro, embora existam relatos que dão conta desta ocorrência.

Figura 5.3. Percentagem de escolas com turmas a começar aulas de 7º ano de Matemática em cada mês em 1975/76[40].



Em 1976/77 este problema foi de novo investigado (Mendonça, 1980), desta vez a partir de uma amostra de 29 escolas da região do Nordeste interior (distritos de Bragança, Guarda e Vila Real) e de 48 do distrito de Lisboa (cerca de 80% das escolas com o 7º ano). Os Conselhos Directivos que responderam indicaram de novo atraso no começo das aulas de Matemática e de outras disciplinas do 7º ano de escolaridade, embora aparentemente se tenha

[40] N = 307 que corresponde ao número de escolas que respondeu ao questionário. A soma das percentagens ultrapassa 100%, pois há escolas com turmas a começar as aulas de Matemática em meses distintos (Freitas, 1979).

verificado uma pequena melhoria[41]. As falhas das colocações de professores são apontadas pelos Conselhos Directivos como um dos mais sérios obstáculos ao cumprimento dos objectivos educativos. Em Outubro, no distrito de Lisboa, 56% das escolas tinham iniciado as aulas de Matemática (31% em Novembro). No Nordeste o panorama é ainda pior, tendo apenas 14% das escolas iniciado as aulas em Outubro (31% em Novembro e 24% em Dezembro). Note-se que em 7% das escolas da amostra do distrito de Lisboa e em 21% das do Nordeste não houve aulas de Matemática do 7º ano durante todo o ano lectivo (p. 18).

Em 1977/78, num inquérito aos Conselhos Directivos de todas as escolas onde se leccionou o 7º, 8º e 9º anos (Godinho, 1980), verifica-se que, enquanto que no Nordeste a maioria (66%) considerou que a colocação de professores tinha tido uma influência negativa no cumprimento dos objectivos do 7º ano (19% considerou-a positiva), em Lisboa a colocação de professores teve uma influência mais positiva (55%) do que negativa (26%) (pp. 35-6). Quanto às aulas de Matemática do 7º, 8º e 9º anos (Figura 5.4), embora os Conselhos Directivos que responderam indiquem que todas já começaram no 2º período lectivo (a partir de Janeiro), nota-se que uma percentagem significativa de turmas ainda não tem um ano de aulas completo (cerca de dois quintos dos alunos em Lisboa e quatro quintos no Nordeste). As aulas no Nordeste começam pois mais tarde[42]. Outro relatório (Leal e Fägerlind,

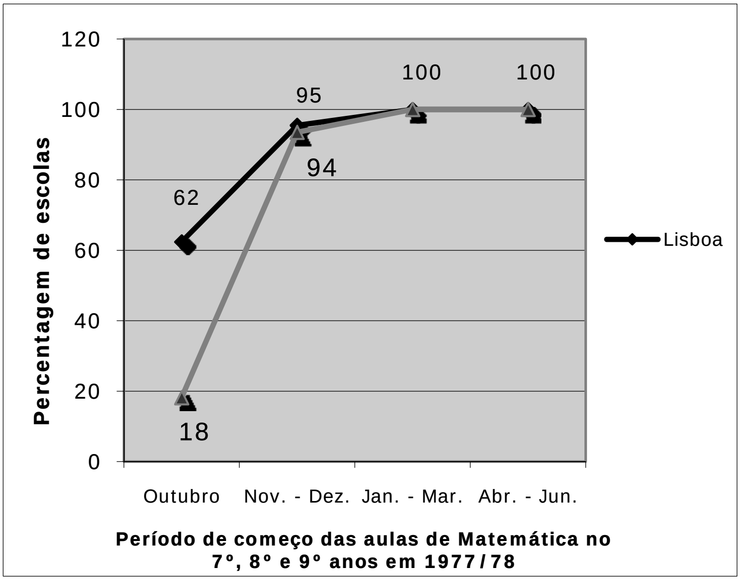
---

[41] A comparação com os dados do estudo anterior não é imediata, pois em 1975/76 apresentam-se dados de *turmas*, enquanto que no estudo de 1976/77 os dados se referem a *escolas*.

[42] O gráfico da figura 4 é construído agregando os dados dos três anos de escolaridade das escolas que responderam (Godinho,1980, pp. 39, 83 e 134).

1981), no entanto, refere aulas de Matemática que apenas começaram em Janeiro.

Figura 5.4. Percentagem de escolas que começaram as aulas de Matemática do 7º, 8º e 9º anos em 1977/78 (Godinho, 1980).



Em 1978/79 a situação tinha melhorado significativamente. Um estudo que inquiriu uma amostra de Conselhos Directivos do distrito de Lisboa e do Nordeste (Coutinho, 1981) revela que cerca de 90% das aulas de Matemática tinha começado em Outubro. Leal e Fägerlind (1981), no entanto, voltam a referir turmas em que as aulas de Matemática apenas começaram em Fevereiro desse ano lectivo.

A razão para este atraso prende-se, em primeiro lugar, com a enorme carência de professores profissionalizados que motivava, no caso da Matemática, o recurso a profissionais de outras áreas, por exemplo Engenharia, a alunos de universidades, e mesmo a alunos recém-saídos das próprias escolas secundárias. Mas, em simultâneo, o sistema de colocação deste profissionais é muito complexo e centralizado. Por exemplo, no ano lectivo de 1975/76, as colocações só foram efectuadas pelos serviços centrais do Ministério em Janeiro e Maio (Freitas, 1979, p. 13).

Os resultados da política de limitação do acesso dos docentes à formação profissional conduzida durante o ministério de Pires de Lima (1947 a 1955), e que os Ministros posteriores não conseguiram resolver, são agora patentes. Apesar de as consequências desta política para a falta de professores de Matemática terem sido antevistas com muita antecedência (Lima, 1963), no ano lectivo de 75/76 a maioria das escolas que responderam (163 em 307) consideraram o corpo docente de Matemática insuficiente na data da abertura das escolas (Freitas, 1979, pp. 16, 18). Verifica-se que apenas 23,8% de todos os professores que leccionaram 7º ano nas escolas inquiridas tinham habilitação pedagógica (p. 17) e 2/3 tinham menos de 31 anos (p. 21). Quanto aos professores de Matemática apenas 43% possuíam uma licenciatura (não necessariamente para a docência de Matemática). Em suma, faltam muitos professores, e, dentre os que há, poucos têm as competências científicas e pedagógicas necessárias.

4 — A introdução dos programas de Matemática Moderna nas escolas portuguesas

Em Portugal, a introdução das Matemáticas Modernas no terreno das escolas teve um percurso muito mais pausado do que noutros países (Matos, 1989). A partir dos anos 60 do século passado, foi-se percorrendo lentamente o caminho das experiências pedagógicas, desde 1963 no 3º Ciclo Liceal e de 1968 nos Cursos Industriais das Escolas Técnicas, estes últimos aproveitando a unificação do 1º ciclo dos liceus com o 1º ciclo das Escolas Técnicas. Se a datação destas primeiras experiências não destoa do ritmo a que a reforma ia ocorrendo noutros países, já a decisão de alterar definitivamente os programas, essencial no centralizado sistema de ensino português, tardava.

É provável que a resistência a quaisquer mudanças no sistema educativo por parte da tendência mais conservadora do regime contribuísse para esta situação. Já em 1957 o Ministro Leite Pinto, pertencente à ala industrialista do regime, parece aludir ao poder deste sector quando duvida que exista um ministro "com força bastante para fazer uma reforma" que integre a matemática contemporânea, leia-se, já então, a Matemática Moderna, no núcleo central do ensino secundário (Folha e Grácio, 1958, p. 215). É provável que o Decreto-Lei nº 47.587 de 10/3/1967 feito aprovar pelo Ministro Galvão Teles e que possibilita a realização de experiências pedagógicas, sem restringir de algum modo o seu âmbito, tenha sido um modo eficaz de fugir a esse controlo. De facto é com base nesse decreto que toda a inovação educativa se vai processar, levando a que programas experimentais, métodos inovadores, manuais escolares, projectos de formação de professores, etc., fossem aprovados dependendo apenas da concordância do Ministro da Educação Nacional e não já do Conselho de Ministros. Antes do 25 de Abril, a própria generalização da reforma da Matemática Moderna nos liceus e a consequente aprovação de livros únicos, e depois do 25 de Abril, a aprovação de alterações profundas ao sistema educativo, como a sucessiva expansão do ensino unificado, são feitas com base naquele Decreto-Lei. Se isso permitiu uma grande latitude inovações pedagógicas, impediu, no entanto, que decisões acerca de alterações importantes no sistema de ensino fossem consensualizadas pelo conjunto dos decisores políticos. Chega-se pois a 1974 com um sistema educativo formalmente centralizado, baseado em legislação do final dos anos 40, cuja centralização é contrariada por diversos sub-sistemas, todos eles "experimentais" por vezes há alguns anos e frequentemente de aplicação limitada.

Façamos agora um ponto de situação relativamente aos programas[43] em vigor no momento da Revolução de Abril de 1974. A Telescola emitia desde 1965 aulas de Matemática Moderna. O Ciclo Preparatório do Ensino Secundário possuía, desde o início do seu funcionamento em 1968, um programa[44] seguindo os preceitos da Matemática Moderna, aparentemente elaborado por Sebastião e Silva (Matos, 2005) e que tinha sofrido em 1974 poucas alterações (Matos, 1989). Em contrapartida o Ensino Primário Complementar que funcionava paralelamente ao anterior (ver figura 5.1) tinha programas de Matemática Clássica aprovados em 1967[45]. No Curso Geral dos liceus já funcionavam turmas com um programa de Matemática Moderna[46] enquanto que no Curso Complementar se estava em transição da Matemática Clássica para a Moderna[47] ao

[43] Designo por *programa* um texto publicado por uma entidade oficial referindo, entre outros temas, conteúdos a ensinar, e que constitui uma norma obrigatória. Gimeno (1998) designa-os de *currículo prescrito*. No sistema de ensino português estes programas fixam os assuntos de leccionação obrigatória.
[44] Os programas são aprovados pela Portaria nº 23.601 de 9/9/1968 (Diário do Governo, I, nº 213, 2º Suplemento).
[45] Portaria nº 22.966 de 17/10/1967 corrigida em 7/12/1967.
[46] Programas aprovados a partir de uma versão experimental de 1972 e existe uma publicação específica para o ano de 1974/75 (Ministério da Educação e Cultura, 1974).
[47] Programas publicados no Diário do Governo nº 149, IIª Série, de 27/6/1973.

fim de 10 anos de experiência. Nas Escolas Técnicas existiam experiências com programas de Matemática Moderna em muitas escolas. Decorriam ainda diversos projectos, sendo a expansão da escolaridade obrigatória para 8 anos o mais importante e que possuía programas de Matemática Moderna[48]. De qualquer modo, numa altura em que em outros países se começava a questionar a reforma (Matos, 1989), ainda ela não estava generalizada em todos os programas portugueses de Matemática.

A situação no ensino da Matemática era dispersa e espelhava o que ocorria em todo o sistema educativo. Na parte que interessa a este estudo, após a decisão de unificar os Cursos Gerais dos Liceus e das Técnicas em 1975, são aprovados programas de Matemática Moderna[49] elaborados por Leonor Filipe, Alfredo Osório dos Anjos, Francelino Gomes (Catela e Kilborn, 1979), os dois primeiros professores de liceu e o último professor de uma escola técnica. Estes novos programas têm conteúdos muito próximos dos do Curso Geral dos Liceus que virá a ser extinto com a implementação do Ensino Unificado. Podemos conhecê-los na sua versão para 1974/75 (mantêm-se inalterados até 1976/77) através do opúsculo *Matemática. Programa para o ano lectivo 1974-1975. Ensino liceal* (Ministério da Educação e Cultura, 1974).

Em 1977[50], aparentemente como resposta a dificuldades na sua implementação, são publicados novos programas de Matemática (Direcção-Geral do Ensino Secundário (1977a, 1977b, 1977c). Numa tentativa de minorar os efeitos dos incumprimentos generalizados, repetem-se no 9º ano tópicos do programa do 8º ano

---

[48] Os programas experimentais de Matemática estão publicados em Ministério da Educação Nacional (1972).
[49] Semelhantes aos publicados em Ministério da Educação e Cultura (1974).
[50] E existem indicações de tal já tinha acontecido em 1976 (Matos, 1989).

e incluem-se *Programas Mínimos*, isto é, uma listagem dos tópicos que todas as escolas deveriam leccionar. A mensagem implícita era a de que os tópicos que não figuravam nestes *Mínimos* seriam "opcionais" e os *Programas Mínimos* passaram, de facto, a *Máximos*. Em 1980, mesmo estes *Mínimos* são restringidos (Direcção-Geral do Ensino Secundário, 1980a, 1980b, 1980c) e quase todos eles previam explicitamente a revisão de temáticas de anos anteriores, sugerindo, de algum modo, que a sua leccionação não teria sido bem conseguida.

O quadro 5.1 apresenta os tópicos dos programas de Matemática de 1977, os que estiveram em vigor durante o período analisado. Fora do âmbito deste trabalho estão as alterações que os programas foram sofrendo ao longo dos anos 80, todas elas motivadas pelo seu incumprimento sucessivo.

Quadro 5.1. Programas de Matemática de 1977
por ano de escolaridade.

Ano[51]	Programas Matemática de 1977[52]
1º ano do curso geral dos liceus. 7º ano do ensino unificado. (Antigo 3º ano do 2º ciclo dos liceus)	1) Questões de linguagem. 2) Números racionais relativos e suas operações. 3) Equações do 1º grau e resolução de problemas. 4) Relações binárias. 5) Aplicações ou funções. 6) Transformações geométricas. 7) Igualdade de triângulos.

[51] Especificam-se as três denominações que cada ano de escolaridade tomou ao longo do período analisado.
[52] Retirados de Direcção-Geral do Ensino Secundário (1977a, 1977b, 1977c).

2º ano do curso geral dos liceus. 8º ano do ensino unificado. (Antigo 4º ano do 2º ciclo dos liceus)	1) Problemas – Equações e sistemas de equações. 2) Conjunto dos números reais (inclui o Teorema de Pitágoras). 3) Homotetias do plano. 4) Semelhanças do plano.
3º ano do curso geral dos liceus. 9º ano do ensino unificado. (Antigo 5º ano do 2º ciclo dos liceus)	1) Relações de ordem em R (inclui inequações). 2) Geometria do plano. 3) Extensão do conceito de potência. 4) Radicais. 5) Problemas e equações do 2º grau 6) Semelhanças do plano (do programa do 8º ano). 7) Trigonometria (do programa do 8º ano). 8) Geometria do espaço.

Embora esteja por fazer um estudo sobre o modo como o ideário da Matemática Moderna fez o seu percurso desde o princípio dos anos 60 até 1974, sabemos, a partir do estudo de artigos de professores de Matemática portugueses (Matos, 2006), que no final dos anos 50 as propostas da Matemática Moderna eram legitimadas, quer pela sua fundamentação psicológica, quer pela sua aproximação ao desenvolvimento da matemática enquanto ciência. A coincidência entre as três estruturas-mãe bourbakistas e as estruturas operatórias da inteligência piagetianas reforçavam, em sua opinião, a justeza das novas ideias. Esperava-se pois que os novos programas fossem psicologicamente mais simples e matematicamente mais sólidos do que os anteriores.

Aparentemente, o que aconteceu foi o contrário. A redução sucessiva dos programas, bem como a admissão da possibilidade de "Programas Mínimos" revela ou resistências generalizadas à aplicação dos novos programas, ou a impossibilidade prática da sua execução. A consequência foi que partes inteiras dos programas deixassem de ser leccionadas nas escolas portuguesas. A principal vítima foi a Geometria, sistematicamente deixada para o final do ano lectivo e esquecida quando já não havia tempo[53]. Mas, talvez mais importante, a adopção de uma terminologia estranha a alunos (Matos, 2005), e em especial aos professores, tornaria mais difícil o ensino e a aprendizagem. Só em 1989 no 3º ciclo (7º a 9º anos de escolaridade) e em 1995 no Ensino Secundário (10º a 12º anos) os novos programas vão cortar com as propostas curriculares da Matemática Moderna.

5 — Apreciação do currículo de Matemática

O *Projecto* apreciou o currículo de Matemática de três pontos de vista distintos e, para os abordar, é útil recordar a distinção de Gimeno (1998) entre diversas dimensões curriculares, no nosso caso, entre o *currículo prescrito*, que designei até agora de *programa*, o *currículo apresentado aos professores* por via dos livros de texto, e, por último o *currículo avaliado*. O estudo o *currículo modelado* pelos professores, bem como do quotidiano das aulas, que Gimeno designa por *currículo em acção*, decisivos para a compreensão da cultura escolar de Julia (2001), está por fazer em detalhe e os trabalhos aqui analisados não os aprofundam para além os elementos apresentados anteriormente na secção 3.

[53] Durante boa parte dos anos 90, os meus alunos, futuros professores de Matemática, não tinham tido contacto com a Geometria do 3º ciclo do Ensino Secundário. O panorama era semelhante noutras escolas do ensino superior.

Quanto ao *currículo prescrito*, os relatórios são, em geral, muito críticos dos novos programas:

Ao analisar os currículos para os 7º, 8º e 9º anos de escolaridade verifica-se que são currículos típicos da primeira geração da Matemática Moderna; revelam, além disso, o interesse em ensinar matemática pura que venha a fazer dos alunos bons matemáticos. (Catela e Kilborn, 1979, p. 41)

Os relatórios referem por diversas vezes os maus resultados das novas abordagens no estrangeiro, apoiando-se em elementos publicados noutros países. Nota-se aqui a influência marcante das opiniões dos especialistas suecos Wiggo Kilborn e Ingemar Fägerlin. Num tom simultaneamente pedagógico e crítico, os relatórios explicam que noutros países "que possuíam ensino unificado" (Catela e Kilborn, 1979, p. 41) o entusiasmo inicial foi sendo substituído por um desencanto motivado pelas dificuldades de aprendizagem, pela desmotivação, e pelas grandes limitações dos alunos na resolução mesmo de problemas simples. Estas opiniões vão sendo suportadas por referências ao ICME 3 realizado recentemente (em 1976) e a estudos internacionais.

Até que ponto é necessário Matemática Moderna, quer em Portugal quer noutro país, para que uma criança tenha uma educação ou uma profissão no futuro. A resposta a esta pergunta é também uma das principais razões de muitos países terem retirado a Matemática Moderna do seu currículo, recorrendo a outras alternativas mais de acordo com as capacidades e necessidades das crianças (Catela e Kilborn, 1979, p. 42).

Os relatórios questionavam ainda as falhas dos alunos em "capacidades básicas e mínimas" que vão ser objecto de um estudo específico (Catela e Kilborn, 1979).

O *currículo apresentado aos professores* através dos livros de texto foi também apreciado pelo *Projecto*. A limitação dos livros autorizados para cada ano de escolaridade integrada na Reforma Pires de Lima de 1948, o chamado "regime de Livro Único", tinha circunscrito consideravelmente a diversidade de edição de livros escolares. Assim, no início da generalização da Matemática Moderna apenas estaria disponível uma colecção de livros de texto seguindo o programa de Matemática Moderna (Costa e Anjos, s/ data, 1974; Costa, Anjos e Lopes, 1974) cujas primeiras edições são anteriores ao 25 de Abril de 1974 e publicadas ainda em regime de Livro Único. Embora o regime de livro único tenha progressivamente vindo a cair em desuso[54], só partir de 1976, aparentemente, passa a estar também disponível para este ciclo a colecção de livros *Eu e a Matemática* (Domingos, Correia e Fernandes, 1976, 1977, 1978). No entanto, os relatórios não a mencionam, e tratam os livros da primeira colecção como se se tratassem de livros únicos de facto, levando-me a supor que, nesta época, a difusão desta segunda colecção fosse limitada.

Sabemos que existiram dificuldades no uso e no acesso aos livros de texto. Por exemplo, embora no ano lectivo de 1975/76 tenham sido publicados novos programas (Ministério da Educação e Investigação Científica, 1975), estes não foram imediatamente acompanhados por novos manuais. O *Projecto* documenta ainda que

[54] Em especial a partir da caducidade dos últimos concursos, em 1973 (comunicação oral de Mária Almeida, 28/5/2007).

em 1977/78 alguns problemas no acesso ao livro único. Este esgotou a sua primeira edição e a nova edição só ficou disponível em Janeiro ou Fevereiro de 1978. Em geral, os alunos estudados só adquiriram o livro em Dezembro, já no final do 1º período lectivo (Catela e Kilborn, 1979).

Estes livros são apreciados nalguns relatórios do Projecto de Avaliação que lhes tecem fortes críticas (Catela e Kilborn, 1979). Consideram, em primeiro lugar que os livro são quase réplicas do programa, o que pode colocar problemas a alunos e professores. Apontam que o programa usa conceitos e sequências muito distintas das usuais na formação de professores, pelo que a estrutura "pura" e lógica dos livros não facilita a sua compreensão pelos professores que desconhecem o significado e os pressupostos em que esses conceitos e sequências se baseiam e não os podem ensinar de modo adequado[55]. A estrutura dos livros é igualmente questionada. Aponta-se que o aluno é frequentemente obrigado a seguir cinco ou mais páginas de texto antes de ter a oportunidade de resolver questões que lhe mostrem se compreendeu o assunto.

Um segundo aspecto é referido. Para os autores do relatório, os livros portugueses, contrariamente aos de outros países, não permitem uma aprendizagem individualizada, pois não contêm testes de diagnóstico permitindo a verificação frequente dos conhecimentos dos alunos. Por outro lado, existem muito poucos exercícios no final de cada rubrica que permitam ao aluno aferir da compreensão de cada uma antes de passar à seguinte.

---

[55] A formulação do relatório é firme mas cautelosa: "Directamente a partir do estudo feito não se pode dizer que este seja efectivamente o problema de Portugal, mas seria estranho se não o fosse, pois tem sido um problema pelo qual têm passado outros países" (Catela e Kilborn, 1979, p. 43).

Aponta-se ainda a estrutura linear dos livros. Os alunos só têm um único contacto com cada tópico, não existindo pois formas de compensar posteriormente aprendizagens mais apressadas.

Por exemplo, os alunos só têm contacto com o teorema de Pitágoras uma única vez e de uma só vez, em lugar de fazê-lo em pequenos passos de modo a passar de um passo ao seguinte unicamente quando digeriram o primeiro. (Catela e Kilborn, 1979, p. 45).

Uma última dimensão curricular, as aprendizagens de Matemática, foi estudada pelo *Projecto*, e enquadrada-se no que Gimeno (1998) designa por *currículo avaliado*. Para estudar estas aprendizagens, estrutura-se um esquema de testagem longitudinal que decorreu nos anos lectivos 1977/78 e 1978/79. O plano de testes seguinte foi elaborado em Dezembro de 1977 e compreendia três testes. Pretendia-se, para cada questão, "englobar três níveis diferentes de dificuldade" (Catela e Kilborn, 1979, p. 2). Assim, cada questão tinha três alíneas e era esperado que 75% dos alunos respondessem correctamente à primeira, 50% à segunda e 25% à terceira.

Os primeiros dois testes, M-I com conteúdos do 7º ano e M-II com conteúdos do 8º, foram elaborados por Maria Emília Catela, Wiggo Kilborn e os autores dos programas de Matemática do ensino unificado: Leonor Filipe, Alfredo Osório e Francelino Gomes (Catela e Kilborn, 1979, p. 5 e Anexo 1). Os testes foram ensaiados previamente noutras escolas e em outros anos de escolaridade. Assim, o teste destinado ao 7º ano foi testado em turmas do 8º e o do 8º em turmas do 9º. Os resultados dos alunos foram muito fracos. No entanto decidiu-se apenas corrigir alguns pequenos aspectos do teste M-II dando origem ao teste M-II/2. O terceiro teste, M-III, com conteúdos do 9º ano, foi aparentemente elaborado pela mesma equipa, e, depois de testado em alunos do 10º ano e de serem alterados alguns pormenores, deu origem ao teste M-III/2[56] (Catela, 1980).

O tipo de questões apresentadas nos testes pode ser observado através da questão 2 do teste M-I com temas do programa do 7º ano apresentado a alunos do 7º e do 8º anos:

2. Calcula o valor de cada uma das expressões:

2.1. $\dfrac{1-3x}{x-2}$ para $x=-3$.

2.2. $\dfrac{2-xy}{x+y}$ para $\begin{matrix} x=2 \\ y=-1 \end{matrix}$.

2.3. x^3-3x^2 para $x=-\dfrac{1}{2}$.

Para esta questão, a média das respostas foi de 3,9% entre os alunos do 7º ano e de 18,7% entre os do 8º (Catela e Kilborn, 1979, p. 25) muito longe portanto da percentagem de 50% esperada para cada um dos dois anos.

Estes projectos possuem algumas falhas metodológicas, essencialmente relacionadas com as amostras e os instrumentos escolhidos, que limitam o seu âmbito e que, em conjunto com os resultados, foram objecto de análise noutro trabalho (Ponte, Matos e Abrantes, 1998). Globalmente pode afirmar-se que os resultados são francamente baixos. Cada teste tinha cinco grupos, quase todos com três questões de complexidade crescente em cada grupo.

[56] A informação sobre esta testagem é muito escassa. Diz-se que o teste inicial era "um pouco difícil" (p. 35), mas não se explica as razões. Ficamos ainda por saber quais os alunos do 10º ano, em particular de que opções, envolvidos na testagem.

Quase todas as questões privilegiavam saberes de tipo algorítmico ou algébrico, nos quais a maior complexidade corresponde a substituir inteiros por fracções, ou adições e subtracções por multiplicações e divisões, ou incorporar potências. Esperava-se que 75% dos alunos respondessem à primeira questão, 50% à segunda e 25% à terceira. Era, pois, de esperar que os alunos obtivessem em média um resultado de 50% em cada grupo do teste. Os desempenhos são muito inferiores aos esperados, mesmo para os conteúdos do 7º ano testados no 8º. Em média, os alunos do 7º ano obtêm uma classificação de 13%, e os do 8º obtêm 24% nos conteúdos do 7º e 25% nos do 8º. Globalmente os alunos do 9º ano obtêm uma cotação de 29% quando seria expectável 50% (Catela, 1980, p. 42).

Descriminando por tópicos, verifica-se que os alunos do 7º ano têm resultados particularmente baixos (cerca de 5%) nas questões envolvendo expressões algébricas e a resolução de equações e os do 8º na resolução de equações do 2º grau. Os resultados mais altos aparecem nas expressões numéricas do 7º ano (27%), nas operações com polinómios (39%) e na resolução de sistemas de equações (36%) do 8º, mesmo assim, longe da média de 50% esperada pelos autores dos programas. Não parece haver grande diferença entre os resultados do grupo do distrito de Lisboa e o do Nordeste, aparecendo o primeiro com melhores resultados no teste do 7º ano e o segundo no teste de conteúdos do 8º. Quanto ao 9º ano, os resultados são igualmente muito baixos. A semelhança de triângulos (10%), as equações do 2º grau (15%) e as potências (29%) são os temas que mais problemas causam aos alunos. Estes resultados são globalmente consistentes com os que outros autores referiram como consequência da introdução da Matemática Moderna noutros países (Kline, 1976).

Porquê estes resultados? Num outro relatório, Catela (1980) procura reflectir-se sobre os fracos resultados dos alunos, atribuindo-os à excessiva dificuldade dos testes utilizados.

> É de notar que estes testes foram construídos pelos autores dos programas que são também professores. O nível dos testes M-I e M-II (1ª versão) revela, por isso, a noção que os professores têm do nível das suas turmas e que afinal mostrou ser um grau de exigência superior àquele que corresponde aos conhecimentos dos alunos. (p. 24)

Procurando explicações para este desajuste, a autora conclui:

> Uma das razões da grande expectativa por parte dos autores [dos programas] (e talvez dos professores em geral) pode ser o facto de a Matemática Moderna, cujos conceitos orientam os actuais programas, ser considerada mais simples para os alunos do que a matemática convencional. Na verdade, quando a Matemática Moderna foi introduzida nos programas secundários de vários países não foi feita nenhuma investigação de como os alunos em causa aceitariam em termos de aprendizagem; partiu-se imediatamente do princípio de que a Matemática Moderna era efectivamente mais simples. Contudo, a experiência tem mostrado o contrário. (Catela, 1980, pp. 24-5)

O *Projecto de Avaliação* inclui ainda um outro estudo que não se relaciona directamente com a introdução do Ensino Unificado, tendo entre os seus objectivos a avaliação da capacidade de cálculo básico em Matemática de alunos do ensino secundário unificado feita através de um teste focado em diversas variações das quatro operações aritméticas aplicado em 1978/79 (Leal e Kilborn, 1981). Este estudo vem na sequência do movimento internacional conhecido como "back to basics", avaliando os "conhecimentos básicos elementares para o cálculo matemático, conhecimentos esses fornecidos aos alunos até ao final do 4º ano de escolaridade"

(p. 24), movimento que aparenta ser do especial agrado de alguns técnicos suecos.

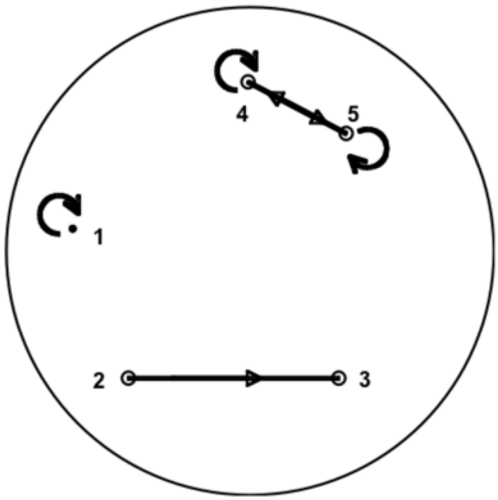
Os resultados deste último trabalho, também já estudados em Ponte, Matos e Abrantes (1998), mostram falhas importantes dos alunos do 4º ano na subtracção, multiplicação e divisão. Verifica-se ainda uma diminuição das respostas certas nos alunos do 6º ano. Os alunos repetentes do 7º apresentam em geral os resultados mais baixos. Quando comparados com estudos semelhantes na Suécia e na Noruega, os resultados destes alunos portugueses são superiores na subtracção e semelhantes no que diz respeito à multiplicação e à divisão de números inteiros.

6 — A aprendizagem da Matemática Moderna

De especial importância para este estudo seriam as questões envolvendo tópicos de Matemática Moderna e que não figuravam nos programas anteriores. Infelizmente, os testes apenas contêm uma pergunta, a pergunta 5 do teste M-I sobre relações binárias e condições e que tem três itens que, esperavam os investigadores, possuíam complexidade crescente:

> 5.1. Dados os conjuntos:
>
> $A = \{0, 1, 3\}$ e $B = \{-1, 1, 2\}$ e a condição $x+y < 1$, indica os pares ordenados da relação definida de A para B.
>
> 5.2. Considera a relação binária definida no conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ e representada pelo diagrama. Indica os pares que faltam para a relação ser reflexiva.

5.3. Representa em extensão as classes em que fica dividido o conjunto {11, 18, 21, 28, 37, 31} pela relação definida pela condição "se tem o mesmo algarismo das unidades que y"[57].



A impressão do relatório de que disponho torna difícil discriminar o número de respostas correctas por turma para cada item da resposta 5 do teste M-I. Mais fácil é, no entanto, ler a percentagem média de respostas correctas por turma para a totalidade da resposta 5. Sabemos assim, por exemplo, que a turma 3 do 7º ano na escola A, que tem todos os numerais legíveis, obteve as seguintes percentagens de respostas correctas para este teste: 5.1 – 0%, 5.2 – 0%, 5.3 – 6,7%. A percentagem média de respostas correctas para a questão 5 nesta turma foi pois calculada pelos autores do relatório em 2,2% que corresponde à média das três percentagens (Catela e Kilborn, 1979, p. 21). Para efeito deste artigo, estas percentagens médias foram agrupadas em intervalos de 10% e os dados obtidos estão apresentados no quadro 5.2 abaixo.

[57] As respostas correctas esperadas eram: no item 5.1, (0, -1) e (1, -1); no 5.2, (2, 2), (3, 3); no 5.3, 11, 21, 31, depois 18, 28, e finalmente 37.

Quadro 5.2. Número de turmas por percentagem média de respostas correctas à questão 5 do teste M-I por ano de escolaridade.

	Número de turmas com a percentagem média de respostas correctas	
Percentagem de respostas correctas	n	%
7º ano		
0 a 10 %	16	64
10 a 20 %	4	16
20 a 30 %	3	12
30 a 40 %	2	8
40 a 50 %	0	0
Total	25	
8º ano		
0 a 10 %	12	55
10 a 20 %	8	36
20 a 30 %	1	5
30 a 40 %	1	5
40 a 50 %	0	0
Total	22	

Como se pode observar, as respostas a esta questão sobre relações binárias são muito fracas. De acordo com as expectativas dos autores do teste, a média destas percentagens de médias deveria ser de 50%. Ela é, no entanto, de 8,8% para o 7º ano e de 9,7% para o 8º, isto é, a percentagem mais baixa de respostas correctas do teste[58].

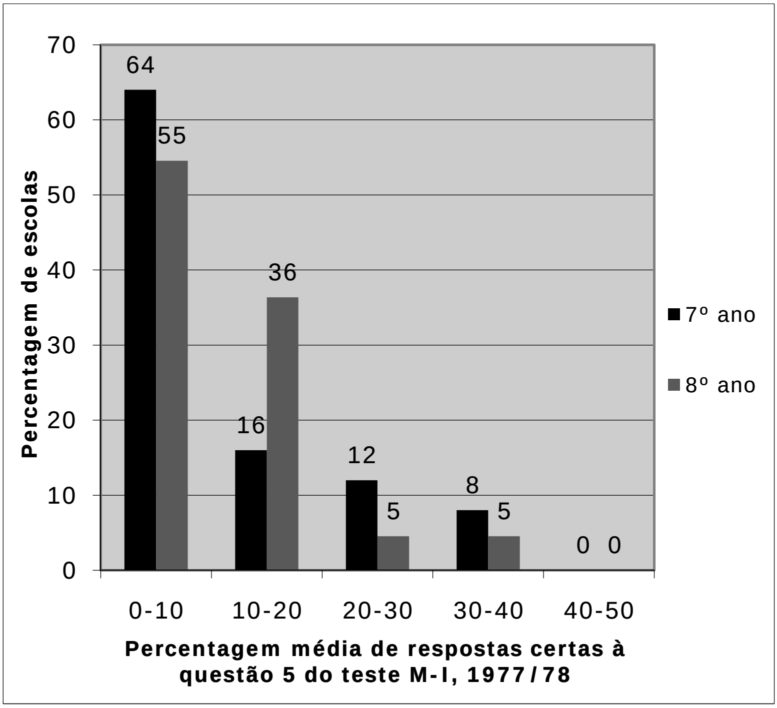
A agregação das respostas correctas aos três itens apenas nos dá uma visão parcelar. Observando os mapas desagregados (Catela e

[58] O Quadro XIV (Catela e Kilborn, 1979, p. 25) indica 16,7% e 14,4% para o total 7º ano e o 8º, respectivamente. Penso que se trata de um erro pois não são consistentes com os dados desagregados. As percentagens que aqui indico são as calculadas a partir dos Quadros XI e XII que descriminam as percentagens de respostas por turma. O Quadro XIV apresenta ainda outras inconsistências que aqui não são relevantes.

Kilborn, 1979, pp. 21 e 22), detectam-se muitas turmas em que poucos ou nenhuns alunos (0 ou 1) responderam correctamente, bem como algumas (poucas) turmas com resultados um pouco melhores, mesmo assim muito longo dos imaginados pelos autores dos testes. Na região do Nordeste, em particular, as turmas estudadas apresentam um alto número de percentagens respostas nulas (33 em 57, contra 28 em 84 na região de Lisboa). Os melhores resultados (acima dos 30% de médias de respostas correctas) são obtidos em três turmas de escolas da cidade de Lisboa, a Preparatória Manuel da Maia e a Industrial Marquês de Pombal. A segunda tem resultados muito baixos nas restantes turmas, mas a primeira apresenta dos melhores resultados no 7º ano, que, no entanto decrescem no 8º. O histograma da figura 5.5 permite-nos visualizar melhor os dados do quadro 5.2.

Quais as explicações para tão fracos resultados? Poder-se-ia pensar que a formulação do item 5.1 não é a mais adequada o que explicaria os baixos desempenhos neste item. No entanto, recorde-se que o teste M-I foi elaborado com a cooperação dos autores dos programas e que existiu uma pré-testagem. Será também de rejeitar a hipótese de os alunos terem dificuldades computacionais nestes itens. Estas verificaram-se claramente nos itens relacionados com álgebra ou números fraccionários, mas nesta questão 5 a resposta apenas exige uma correcta interpretação do que é perguntado.

Figura 5.5. Percentagem de turmas por percentagem média de respostas correctas à questão 5 do teste M-I por ano de escolaridade, 1977/78 (Catela e Kilborn, 1979).



O fraco desempenho dos alunos na questão das relações binárias parece poder ser atribuído antes a dois factores: falhas no processo de ensino e dificuldade intrínseca. Dito de outro modo, é muito provável que, não tendo contactado relações binárias durante a sua formação inicial, os professores tendessem a não leccionar esta temática ou a leccioná-la de um modo desadequado. Os resultados menos maus das três turmas que referi seriam pois consequência de professores mais actualizados. Mas isto conduz-nos ao segundo factor, a dificuldade intrínseca. O facto de nem estes professores com melhor preparação conseguirem dos seus alunos resultados aceitáveis, e de nem sequer os resultados positivos se manterem do

7º para o 8º ano, contrariamente ao que sucede noutros itens, leva-nos a afirmar que o tema não seria apropriado para estes alunos, o que é, aliás. afirmado no próprio relatório que temos vindo a analisar.

Os resultados sobre a aprendizagem de tópicos de Matemática Moderna obtidos pelo *Projecto* completam o que já tinha encontrado num estudo sobre o desempenho dos alunos do 2º ano do Ciclo Preparatório do Ensino Secundário que realizaram o exame nacional em 1972 (Matos, 2005). Aí pareceu claro que a introdução da terminologia característica da Matemática Moderna, embora superficialmente apreendida pelos alunos, os impediu de responder melhor a algumas questões. Agora neste estudo encontramos problemas relacionados com a formação de professores e com a desadequação de certos tópicos à idade mental dos alunos.

7 — A imagem da Matemática nos alunos e nos pais

O *Projecto* apresenta ainda dados sobre o modo como os alunos viam a Matemática. Em geral, em 1976/77 e nos alunos dos cinco estratos sócio-económicos inquiridos do distrito de Lisboa e do Nordeste, a Matemática figura simultaneamente entre as três disciplinas de que os alunos mais gostam e as que menos gostam (Mendonça, 1980, pp. 59-60). Esta polarização de opiniões volta a verificar-se nas respostas à questão de saber se a Matemática é difícil, com cerca de um terço das respostas a considerarem-na difícil ou muito difícil e outro terço fácil ou muito fácil (p. 62).

A polarização verifica-se de novo na região de Lisboa no estudo sobre os alunos de 9º ano em 1978/79 (Pedro, 1981). A Matemática lidera nesta região simultaneamente como a disciplina com mais e com menos interesse. Na região Nordeste, a polarização desapareceu e a Matemática quer como disciplina com mais ou com menos interesse não se destaca significativamente das outras (pp. 89-90).

Já no estudo que investigou as opiniões dos encarregados de educação de alunos do 9º ano em 1978/79 (Costa e Haglund, 1981), a Matemática liderou destacadamente como a disciplina onde os alunos tinham mais dificuldades: 40% dos inquiridos no Nordeste e 37% dos do distrito de Lisboa identificaram-na como a disciplina mais difícil. Nas duas regiões os encarregados de educação do escalão sócio-económico mais baixo destacaram-se nesta valorização (70% em Lisboa e 53% no Nordeste).

Existe ainda um outro factor que aponta para diferenças dentro do próprio sistema educativo. Assim, no estudo sobre os alunos de 9º ano em 1978/79 (Pedro, 1981), verifica-se que existem diferenças entre a atitude dos alunos do 9º ano perante a Matemática consoante o tipo de escolas frequentado. Assim, nota-se na região de Lisboa uma nítida diferença entre as escolas preparatórias e as recém-criadas escolas secundárias que em geral resultaram de uma alteração da antiga denominação de liceus e escolas técnicas. Nas escolas preparatórias, a Matemática é considerada como a disciplina mais difícil apenas por alunos de um dos estratos sociais mais baixos. Nos antigos liceus e escolas técnicas ela é unanimemente considerada como a disciplina mais difícil em todos os estratos sociais. No Nordeste, a Matemática é considerada mais difícil em dois dos escalões sócio-económicos mais baixos (p. 91).

Conclusão

O ambiente de debate em Portugal sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática era nesta altura muito limitado. O regime deposto em 1974 tinha limitado durante quase meio século o funcionamento de organizações onde as forças sociais se pudessem encontrar. A Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM), em particular, que desde a expulsão de muitos dos seus quadros no final dos anos 40, tinha uma actividade reduzida. No final dos anos 70, sem quaisquer organizações profissionais operantes, os professores de Matemática não possuem nenhuma estrutura formal de debate dos seus problemas.

Só a partir de 1977 começam a verificar-se algumas movimentações. Nesse ano é criado um grupo de trabalho de que fazem parte, entre outros, alguns autores de programas de Matemática. Pretende-se dinamizar a criação dos Núcleos de Investigação no Ensino da Matemática com funções semelhantes às dos IREM[59] franceses, no entanto o grupo termina a sua actividade em 1979 (Matos, 1989). Também em 1977 existem esforços para re-activar a SPM e que vão conduzir à realização do seu primeiro congresso em 1980.

Outras iniciativas são ainda muito esparsas. O *Grupo para a Renovação do Ensino da Matemática* só irá publicar o primeiro número da revista *Inflexão* em 1981 e a *Associação de Professores de Matemática* (APM) só será fundada cinco anos depois. Quanto à investigação sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática, ela só assumirá alguma expressão durante o primeiro ProfMat em 1985 e se consolidará com os mestrados a partir dos anos 90. A geração de

[59] Instituts de Recherche en Didactique des Mathématiques.

professores que vai impulsionar a APM ainda está, na sua maioria, a completar a formação científica ou pedagógica, embora estejam activos pequenos grupos em Lisboa e em Coimbra (Matos, 1989). Apesar desta geração ter nascido em oposição à Matemática Moderna, como se pode observar nas intervenções de educadores matemáticos nos raros fóruns dessa altura (VIII Jornadas Luso-Espanholas, Coimbra, 1981; Colóquio Ensino da Matemática nos Anos 80, de homenagem a Sebastião e Silva, Lisboa, 1982), as conclusões deste *Projecto* aparentemente tiveram pouco (ou nenhum) impacto no desenvolvimento do campo da educação matemática em Portugal nessa época.

A acompanhar esta a imagem de dispersão dos educadores matemáticos, temos a visão dada pelos relatórios de um sistema educativo em mudança acelerada. Por um lado, o crescimento sustentado da população escolar desde os anos 50 não foi acompanhado da criação de infra-estruturas e da formação de meios humanos adequados. Temos pois em simultâneo escolas superlotadas e professores muito jovens, muitos deles (a maioria nalgumas zonas do país) sem a formação científica e pedagógica adequada. Temos, por outro, a passagem de uma escola pensada para um corporativismo autoritário para uma escola em regime democrático.

Um segundo aspecto ressalta destes trabalhos. O panorama das aprendizagens da Matemática traçado nesta época é francamente desanimador. Escolas em mutação acentuada (integração Liceus-Técnicas, expansão rápida da rede escolar), aulas a começar com atrasos de meses, secções inteiras do programa que não são leccionadas, falta generalizada de professores com uma formação profissional adequada, novos programas de Matemática reclamando-se de uma filosofia radicalmente diferente, desajustados desta realidade e valorizando os aspectos mais formais da Matemática conjugam-se para produzir aprendizagens de fraca qualidade. Embora muitos destes problemas estejam hoje ultrapassados, é bom não esquecermos este passado para compreendermos melhor a situação actual.

Fontes

Catela, M. E. (1978a). *Ensino Secundário Unificado. A aprendizagem da Matemática. 7º e 8º anos. I - Testagem*. Lisboa: GEP.

Catela, M. E. (1978b). *Frequência do 7º ano de escolaridade em 1975-76 — Breve análise estatística retrospectiva*. Lisboa: GEP.

Leal, L. C. e Kilborn, W. (1981). *Ensino Secundário Unificado. A aprendizagem da Matemática — A capacidade em cálculo básico matemático*. Lisboa: GEP.

Catela, M. E. e Kilborn, W. (1979). *Ensino Secundário Unificado. A aprendizagem da Matemática em 1977/78. 7º e 8º anos*. Lisboa: GEP.

Costa, A. A. e Anjos, A. O. (s/ data). *Compêndio de Matemática. 1º ano do ensino liceal (antigo 3º ano)*. Porto: Porto Editora.

Costa, A. A. e Anjos, A. O. (1974). *Compêndio de Matemática. 2º ano do ensino liceal (antigo 4º ano)*. Porto: Porto Editora.

Costa, A. A., Anjos, A. O. e Lopes, A. A. (1974). *Compêndio de Matemática. 3º ano do Ensino Liceal (antigo 5º ano)*. Porto: Porto Editora.

Costa, M. L. T. e Haglund, S. (1981). *Ensino Secundário Unificado. Relatório de avaliação do 9º ano de escolaridade — Entrevistas a encarregados de educação do 6º, 9º e 10º anos - 1978/79*. Lisboa: GEP.

Coutinho, M. L. P. (1981). *Ensino Secundário Unificado. Relatório de avaliação do 9º ano de escolaridade. Inquéritos a Conselhos Directivos*. Lisboa: GEP.

Direcção-Geral do Ensino Secundário (1977a). *Curso Secundário Unificado. 1º ano (7º ano de escolaridade). Programa da disciplina de Matemática*. Lisboa: Ministério da Educação e Investigação Científica.

Direcção-Geral do Ensino Secundário (1977b). *Curso Secundário Unificado. 2º ano (8º ano de escolaridade). Programa da disciplina de Matemática*. Lisboa: Ministério da Educação e Investigação Científica.

Direcção-Geral do Ensino Secundário (1977c). *Curso Secundário Unificado. 3º ano (9º ano de escolaridade). Programa da disciplina de Matemática*. Lisboa: Ministério da Educação e Investigação Científica.

Direcção-Geral do Ensino Secundário (1980a). *Matemática - 7º ano unificado* [Programa mínimo]. Lisboa: Ministério da Educação e Investigação Científica.

Direcção-Geral do Ensino Secundário (1980b). *Matemática - 8º ano unificado* [Programa mínimo]. Lisboa: Ministério da Educação e Investigação Científica.

Direcção-Geral do Ensino Secundário (1980c). *Matemática - 9º ano unificado* [Programa mínimo]. Lisboa: Ministério da Educação e Investigação Científica.

Domingos, M. E., Correia, M. C. e Fernandes, T. T. (1976). *Eu e a Matemática. 1º ano do curso Secundário Unificado. Livro guia 1. Fichas de trabalho*. Porto: Edições ASA.

Domingos, M. E., Correia, M. C. e Fernandes, T. T. (1977). *Eu e a Matemática. 2º ano do curso Secundário Unificado. Livro de consulta 2*. Porto: Edições ASA.

Domingos, M. E., Correia, M. C. e Fernandes, T. T. (1978). *Eu e a Matemática. 9º ano de escolaridade. Livro de consulta 3 (1ª ed.)*. Porto: Edições ASA.

Folha, R. e Grácio, R. (1958). Bom augúrio. *Labor, Revista de Ensino Liceal*, *22*(172), 211-218.

Freitas, C. V. (1979). *Ensino Secundário Unificado. Relatório de avaliação do 7º ano de escolaridade 1975/1976*. Lisboa: GEP.

Godinho, L. M. M. (1980). *Ensino Secundário Unificado. Relatório de avaliação do 7º 8º e 9º ano de escolaridade. Inquéritos a Conselhos Directivos*. Lisboa: GEP.

Lima, I. M. V. (1963). Sobre o recrutamento e formação dos professores de matemática dos liceus. *Palestra*, *18*, 83-96.

Leal, L. C. e Fägerlind, I. (1981). *Ensino Secundário Unificado. A aprendizagem da Matemática — Influência da escola e da família — 7º, 8º e 9º anos de escolaridade de 1977 a 1979*. Lisboa: GEP.

Lundgren, U., Oliveira, M. A. M. e Pedro, E. R. (1977). *Breve introdução à avaliação em educação*. Lisboa: GEP.

Mendonça, M. A. (1980). *Ensino Secundário Unificado. Relatório de avaliação do 7º ano de escolaridade — 1976/77*. Lisboa: GEP.

Ministério da Educação e Investigação Científica (1975). *Programas — Sétimo Ano de escolaridade*. Lisboa: MEIC.

Ministério da Educação e Cultura (1974). *Matemática. Programa para o ano lectivo 1974-1975. Ensino liceal*. Lisboa: Ministério da Educação e Cultura.

Ministério da Educação Nacional (1972). *Programas a ensaiar ao abrigo do Decreto-Lei 48 547. 1º ano após o actual 1º Ciclo Preparatório do Ensino Secundário*. Lisboa: Ministério da Educação Nacional.

Ministério da Educação Nacional (1973). *Ensino Secundário Técnico. Cursos Gerais, Cursos Complementares*. Lisboa: Ministério da Educação Nacional.

Pedro, E. R. (1980). *Ensino Secundário Unificado. Avaliação do 8º ano de escolaridade — 1977/78. Estudos de caso*. Lisboa: GEP.

Pedro, E. R. (1981). *Ensino Secundário Unificado. Relatório de avaliação do 9º ano de escolaridade — os alunos - 1978/79*. Lisboa: GEP.

Referências

Carvalho, R. (1996). *História do Ensino em Portugal.* Lisboa: F. C. Gulbenkian.

Gimeno-Sacristán, S. J. (1998). *O currículo: uma reflexão sobre a prática.* Porto Alegre: Artmed.

Grácio, R. (1985). Evolução política e sistema de ensino em Portugal: dos anos 60 aos anos 80. Em J. E. Loureiro (Ed.). *O futuro da educação nas novas condições sociais, económicas e tecnológicas* (pp. 53-154). Aveiro: Universidade de Aveiro.

Grácio, S. (1986). *Política educativa como tecnologia social. As reformas do Ensino Técnico de 1948 e 1983.* Lisboa: Livros Horizonte.

Guimarães, H. M. (2007). Por uma matemática nova nas escolas secundárias — perspectivas e orientações curriculares da Matemática Moderna. Em J. M. Matos e W. R. Valente (Eds.), *A Matemática Moderna nas escola do Brasil e de Portugal: primeiros estudos* (pp. 21-45). São Paulo: GHEMAT.

Julia, D. (2001). A cultura escolar como objeto histórico. *Revista Brasileira de História da Educação*, *1*, 9-44.

Kline, M. (1976). *O fracasso da Matemática Moderna.* São Paulo: Ibrasa.

Matos, J. M. (1989). *Cronologia recente do ensino da Matemática*, 3ª edição. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Matos, J. M. (2005). Aprendizagens no Ciclo Preparatório de 1972: um estudo sobre o sucesso da Matemática Moderna. *Educação e Matemática*, *Novembro/Dezembro*, 7-12.

Matos, J. M. (2006). A penetração da Matemática Moderna em Portugal na revista Labor. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *5*, 91-110.

Ponte, J. P., Matos, J. M. e Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática. Implicações curriculares.* Lisboa: IIE.

Rosas, F. (1994). *História de Portugal, sétimo volume. O Estado Novo (1926-1974).* Lisboa: Círculo de Leitores.

Teodoro, A. N. D. (1999). *A construção social das políticas educativas. Estado, educação e mudança social no Portugal contemporâneo.* Tese de Doutoramento, Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia.

Sobre o autor:

José Manuel Matos
Departamento de Matemática
Faculdade de Ciências e Tecnologia, UNL
2825-118 Caparica, Portugal
jmm@fct.unl.pt

Los tratados franceses en la enseñanza del análisis en Colombia (1851-1951)

Luis Carlos Arboleda, Universidad del Valle, Colombia

En este trabajo[60] se exponen algunos de los resultados de la investigación que hemos venido adelantando sobre la formación de pensamiento matemático en Colombia en los siglos XIX y XX. Se analizan comparativamente cuatro momentos claves en la recepción, difusión y apropiación de los fundamentos del cálculo infinitesimal. Cada uno de estos casos particulares se estudia con base en fuentes documentales primarias y publicaciones originales poco conocidas, con lo cual este trabajo pretende contribuir a valorar nuestro patrimonio histórico en matemáticas. Hemos procurado situar cada momento en su respectivo contexto institucional y en su correspondiente fase de profesionalización de las matemáticas. Se ha tratado así mismo de caracterizar las prácticas pedagógicas asociadas con los distintos tipos de enseñanza del cálculo en los establecimientos de educación superior.

La investigación se adelantó sobre materiales educativos producidos en Colombia dentro de procesos de enseñanza inspirados en tratados y planes de estudio franceses. Nos hemos apoyado para ella en la tipología elaborada por uno de los miembros de este equipo de investigación, el matemático e historiador francés Martín Zerner.[61] De esta tipología hemos retenido la periodización y la

[60] Una versión preliminar de este artículo fue publicada en Arboleda (2002).

[61] Zerner (1986), (1989) y (1994). También nos hemos beneficiado de los seminarios de investigación y cursos doctorales realizados por Zerner en Cali y en París en el marco de la coorperación de nuestro grupo de historia de las matemáticas con el equipo Rehseis, CNRS-Universidad Paris VII, en los cuales se actualizaron las informaciones publicadas en los mencionados trabajos.

caracterización de las tres generaciones de los tratados franceses que de una u otra manera representaron la influencia francesa en la enseñanza del cálculo dentro en las instituciones seleccionadas en nuestro estudio. Estos son tales tratados junto con los intervalos en donde se sitúan sus correspondientes ediciones: (I) Lacroix (1802-1881) y Boucharlat (1813-1891), (II) Duhamel (1856-1886), Sturm (1857-1929), Bertrand (1864), Serret (1868-1911), Jordan (1ª ed., 1882) y (III) Tannery (1886-1904), Jordan (2ª ed., 1893), Goursat (1902-1942), Humbert (1903). Entre todos ellos los más significativos en este trabajo sobre la transformación de la cultura de los fundamentos del análisis en Colombia, son Boucharlat, Sturm y Humbert.

1 — Los pioneros de la enseñanza del cálculo infinitesimal: Mutis, Bergeron y Garavito

El primer intento sistemático para introducir en Colombia una cultura moderna sobre el cálculo diferencial e integral, fue hecho por el ingeniero Julio Garavito Armero. Desde 1898 Garavito aseguró la enseñanza del cálculo infinitesimal, la mecánica racional y otras asignaturas en la cátedra de matemáticas superiores de la Facultad de Matemática e Ingeniería de la Universidad Nacional de Colombia en Bogotá. En el Fondo Lleras de la Biblioteca del Departamento de Matemáticas y Estadística de esta Universidad, existe una copia manuscrita del curso de cálculo que Garavito dictó en 1912, hecha por sus discípulos José A. Muñoz T. Y Edmundo Merchán C.[62] Este manuscrito fue analizado por Graciela Villegas en su trabajo (inédito, 1992) Sobre el curso de Cálculo diferencial e

[62]Por comodidad de citación hemos colocado estas conferencias en la bibliografía como Garavito (1912), aunque ellas hayan sido redactadas por sus alumnos.

integral à la Cauchy de Julio Garavito, 1912. Villegas escoge este caso de estudio para mostrar las vicisitudes de aclimatar una teoría paradigmática en el contexto local, en aquellos períodos en los cuales todavía estaban en ciernes los procesos de institucionalización y de profesionalización de las matemáticas.

Villegas se interesa igualmente por caracterizar a grandes rasgos el papel que pudo haber ejercido esta enseñanza en la recepción del proceso europeo de fundamentación y aritmetizacion del análisis en Colombia. En este estudio exponemos algunos de los resultados a los cuales hemos llegado en el desarrollo de la investigación sobre este mismo curso, sometiendo las conclusiones de Villegas a la revisión de una documentación más amplia y a elementos de análisis que no estaban disponibles en nuestro grupo de investigación cuando se adelantó este trabajo hace diez años. En lo que sigue vamos a encuadrar el curso de Garavito en un periodo histórico más amplio, comparándolo con tres momentos estelares en la enseñanza del cálculo: Mutis a finales del siglo XVIII, Bergeron alrededor de los años 1850 y Acosta en el periodo que va de los años 1920 a 1951, fecha en que publica su libro de *Análisis matemático*.

El manuscrito del curso de Garavito empieza por la sección "Limites e infinitesimales". El tratamiento de los fundamentos del cálculo es similar al empleado en el curso de Sturm. Recordemos que textos como el Sturm[63] en los cuales todavía no era posible disponer de una construcción de los irracionales, y por ende de los

---

[63] La primera edición del curso de Sturm en dos volúmenes es respectivamente de 1857-1859. Nosotros hemos consultado un ejemplar de la 14ª edición de 1909, perteneciente a Luis Ignacio Soriano, fechado en enero de 1924 y que se encuentra en la Biblioteca de Matemáticas de la Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

reales, para sustentar el cálculo, empiezan haciendo una presentación completa de las propiedades de los infinitesimales de diferentes órdenes que serán empleados en la demostración de teoremas posteriores sobre continuidad, derivadas y diferenciales. En la fecha del curso de Garavito este patrón ha empezado a cambiar en las escuelas y facultades francesas[64].

Pero en el curso de cálculo diferencial e integral de Bogotá no se muestra ningún interés por adoptar el nuevo criterio de rigor consistente en fundamentar el cálculo sobre la estructura del continuo real. Aún existiendo entre nosotros desde los años 1850 una cierta tradición moderna de estudio de los números inconmensurables en los cursos de aritmética y álgebra, a comienzos del siglo XX Garavito mantenía el enfoque anterior de enseñar los fundamentos a la manera de Cauchy con las variaciones didácticas del curso de Sturm[65]. Como veremos más adelante, este enfoque empezó a introducirse en el país, en una variante débil, en la enseñanza del cálculo diferencial de Bergeron en los años 1850. Cincuenta años después Garavito hará una apropiación más sistemática del curso de Sturm. En el sentido que va a exponer en todo detalle las nociones preliminares del cálculo y los teoremas del método de los infinitesimales, haciendo uso de ellos en otros desarrollos temáticos. Este programa de enseñanza del cálculo se mantendrá más o menos inmodificado hasta que se implantan en

---

[64] Ver Dugac (1978) y Gispert (1983).

[65] A partir de información inédita sobre los planes de estudios y las tesis sustentadas en la Facultad de matemática e ingeniería en esta época, Clara Elena Sánchez ha constatado, primero, la influencia de libros como el cálculo de Sturm en la formación teórica y práctica de los alumnos; segundo, el poco o nulo compromiso de Garavito en enseñar la teoría de los inconmensurables de Liévano. Nos hemos beneficiado de estos y otros datos que nos comunicó en un seminario que la profesora Sánchez hizo en el grupo de historia y educación matemática de la Universidad del Valle. Esta idea se encuentra en Sánchez.

los años 1950 un conjunto de reformas curriculares e institucionales en las facultades y departamentos de matemáticas.

Recordemos que Cauchy se propuso "reconciliar el rigor que caracteriza mi *Curso de análisis*, con la simplicidad que resulta de la consideración directa de las cantidades infinitamente pequeñas" (Cauchy, 1821, p. 5)[66]. En efecto, el capítulo II del *Curso* sobre las funciones continuas empieza con un pequeño tratado sobre las cantidades infinitamente pequeñas e infinitamente grandes. Tanto en la definición de cantidad infinitesimal como en los teoremas del cálculo de infinitesimales Cauchy rompe con la tradición de considerar los infinitésimos con valor fijo, no nulo e indeterminado. Sus infinitamente pequeños son cantidades variables que tienen a cero como límite. Garavito traduce casi literalmente la siguiente definición de Sturm: "Una cantidad infinitamente pequeña o un infinitamente pequeño no es entonces una cantidad determinada, con un valor fijo asignable: es al contrario una cantidad esencialmente variable que tiene límite cero" (Sturm, 1909, p. 6).

Esta concepción dinámica aparece expuesta en el manuscrito de 1912 en cuatro teoremas o principios fundamentales del cálculo de infinitesimales. Incluso la noción de infinitesimal de orden superior refuerza esta concepción dinámica, pues permite comparar dos cantidades variables que convergen a cero, cuando una de ellas tiende más rápidamente a cero que la otra. Más adelante volveremos sobre este punto. Comentemos por ahora que al adoptar la exposición de los infinitesimales de Cauchy y de Sturm como base suficientemente sólida para fundamentar el cálculo,

[66]Ver al respecto Dugac (1978, pp. 13 y ss). Hemos utilizado la traducción al castellano que contiene la introducción de Jean Dhombres sobre "El rigor o cómo se construye una idealidad", y valiosas notas históricas y epistemológicas de Carlos Álvarez.

Garavito no fue conciente o no supo cómo hacer para incorporar en su enseñanza la construcción de los números inconmensurables que le enseñó su maestro Liévano.[67] Esta teoría hacía parte de hecho (aunque nunca obtuvo ese reconocimiento internacional) de los esfuerzos de construcción de los números reales que se adelantaron en Europa en la segunda parte del siglo XIX. Como tal, podría haber favorecido la recepción en el país por aquella época del movimiento de adopción de la aritmetización del análisis en las universidades.

Se podría especular si por aferrarse al enfoque de "enseñanza acabada" del libro clásico de Sturm, Garavito no supo aprovechar la preciosa oportunidad que se le ofrecía, de incorporar a la enseñanza del cálculo infinitesimal el enfoque de Liévano. Su trabajo divulgativo de 1887 sobre "Los números inconmensurables de Liévano"[68] es, en cierta medida, un tratamiento del continuo real desde el análisis; en efecto, Garavito intenta reconstruir los inconmensurables desde la teoría de series absolutamente convergentes. Por otra parte, en los parágrafos 85 al 125 del curso de 1912 consagrados a la teoría de series, se observa que Garavito no pudo formular ni demostrar proposiciones sobre las condiciones suficientes de la convergencia de una serie. Obviamente la mayor dificultad para enfrentar ese problema era no disponer de un conocimiento preciso de la estructura de los reales. Es posible que habiendo estudiado la construcción de los irracionales de Méray, le hubiera llamado la atención su crítica al uso, como axioma evidente,

[67] El primer estudio sobre el tratado de Liévano (1856) fue realizado por Albis y Soriano-Lleras (1976). Un trabajo más reciente y completo es Arbeláez (2002).

[68] Garavito (1897). La conexión que establece con la construcción de Méray muestra que Garavito comprendía la importancia de dotar al continuo real de una estructura matemática, para asegurar las bases del análisis.

de la proposición sobre la convergencia de toda sucesión de Cauchy, sin previamente haber exhibido tal construcción.

Como quiera que sea, el asunto era suficientemente delicado (y la poca claridad de su artículo sobre Liévano parece confirmarlo), como para que Garavito prefiriera, a la manera de la mayoría de los tratados de finales del siglo XIX, no plantear en la enseñanza la cuestión de las condiciones suficientes de la convergencia de series, sustituyéndola por la evidencia geométrica...aún yendo en contravía del rigor de los fundamentos. Habrá que examinar este asunto con mayor detenimiento en otra oportunidad. Como quiera que sea, el curso de Garavito representa un avance frente a lo que hasta entonces se había enseñado en el país en materia de fundamentos del cálculo. Para comprobarlo, vamos a considerar dos momentos que hasta donde los registros documentales existentes nos lo permiten afirmar, fueron los más significativos a este respecto en nuestras instituciones educativas de los siglos XVIII y XIX.

El primero tiene que ver con la enseñanza de los infinitésimos en la cátedra de matemáticas del Colegio del Rosario de Santafé. Esta cátedra fue regentada por José Celestino Mutis a lo largo de veinte años a partir de su creación en 1762. Luego, como catedrático perpetuo, influyó hasta más allá de su muerte sobre lo que en ella se enseñaba, a través de su alumno Fernando Vergara, y los subsiguientes directores: Jorge Tadeo Lozano y Francisco José de Caldas. Alrededor de los años 1770 Mutis orientó el trabajo de la cátedra a estudiar y traducir al castellano con sus alumnos más destacados, la edición latina de los *Principia* de Newton que contiene los muy célebres y eruditos comentarios de Leseur y Jacquier[69]. Estos comentarios introducen informaciones sobre nociones y técnicas matemáticas anteriores a los años 1740, relacionadas con diferentes cuestiones de los *Principia.* Uno de sus propósitos era hacerle evidente al lector el entramado matemático de la mecánica newtoniana, como también hacer precisiones sobre las elaboraciones matemáticas que Newton deja de lado o que menciona de manera circunstancial en su obra.

Así por ejemplo, en los comentarios 49 a 80 del Libro 1, Leseur y Jacquier exponen las concepciones matemáticas y metafísicas de la época sobre las nociones de infinito y cantidad infinitamente pequeña, los distintos órdenes de infinitésimos y las relaciones aritméticas, geométricas y algebraicas que se establecen entre ellos. Estas explicaciones son subsidiarias del discurso físico expuesto en el capítulo 4 sobre la divisibilidad del cuerpo al infinito y la pequeñez de las partes resultantes. El lector-traductor novogranadino de esta edición, tuvo la fortuna de familiarizarse con los elementos del cálculo de fluxiones de Newton. Después del bloque de comentarios 49-80 sobre los infinitésimos siguen los comentarios 136-170 en donde se exponen los conceptos y técnicas básicas de las fluxiones y, luego, en los comentarios 136 y 141 se ilustran las ventajas de este método comparado con los procedimientos infinitesimales de los antiguos y con el método de Cavalieri. Finalmente se presentan de manera general los algoritmos para calcular fluentes a partir de fluxiones conocidas, incluida su interpretación como la medida del área debajo de la curva. A pesar de la importancia de este manuscrito en la cátedra de matemáticas

[69] Con respecto a la enseñanza de las matemáticas de Mutis y su traducción de los *Principia,* ver los ensayos recogidos en mi monografía sobre "Matemáticas, cultura y sociedad en Colombia" (Arboleda, 1993).

de Santafé a finales del siglo XVIII, no puede decirse que él haya fomentado una cultura sobre los fundamentos del cálculo. No solo no hay un tratamiento sistemático de los temas del cálculo, sino que tampoco se trata de desarrollar de manera explicita los conceptos principales (variable, función, función continua, derivada, etc.) en la perspectiva epistémica de los infinitésimos como cantidades de valor fijo y determinado.

El otro momento significativo en la introducción de los fundamentos del cálculo tuvo lugar en el curso que enseñó Aimé Bergeron en el Colegio Militar de Bogotá en 1851[70].

Todavía hoy no existe claridad sobre la enseñanza matemática impartida en la red de colegios republicanos que fueron creados en las provincias del país en el marco de la reforma de la educación pública del general Santander en 1826. Lo que sí sabemos es que a partir de esta fecha se adopta de manera formal el patrón francés de enseñanza pública que perdurará a lo largo de más de siglo y medio.

Esta influencia francesa será decisiva en los inicios de los procesos de institucionalización y profesionalización de las matemáticas. Los establecimientos, con el apoyo de los gobiernos territoriales, contrataron profesores en Francia e importaron con ellos lineamientos curriculares, las metodologías pedagógicas y los textos y manuales franceses (particularmente los textos representativos de distintas cohortes de enseñanza del cálculo: Lacroix, Boucherlat, Sonnet, Sturm, Bertrand, Jordan, Appell, Laurent y Humbert). La formación de los profesores e ingenieros matemáticos que lideraron

---

[70] Las características del manuscrito y su localización se presentan en Albis y Sánchez (1998). Una trascripción provisional se encuentra en la página web del programa de investigaciones que ellos dirigen sobre Patrimonio Matemático Colombiano: http://www.accefyn.org.co Designaremos este manuscrito como Bergeron (1951).

este proceso durante cuatro o cinco generaciones (Lino de Pombo, Indalecio Liévano, Julio Garavito, Jorge Acosta), fue básicamente francesa. Los planes de estudio y la enseñanza de la ingeniería y de las matemáticas (al menos en su modelo inicial, aunque probablemente no siempre en su aplicación a la realidad), fueron todos de inspiración francesa[71].

Es en este contexto que se contrata a Bergeron en Francia. Desde 1848 hasta 1852, Bergeron y Lino de Pombo (probablemente con Antonio R. De Narváez y Joaquin Acosta) aseguraron la enseñanza de los cursos que se impartían en el Colegio Militar a lo largo de tres años. El más avanzado de estos cursos era el de cálculo diferencial e integral. La parte de cálculo diferencial, según el manuscrito de Bergeron que han localizado Albis y Sánchez, se compone de cuatro lecciones. Por su contenido, secuencia y concepción, el curso de Bergeron tiene una filiación estrecha con las cinco primeras lecciones del volumen 1 del curso de Sturm, cuyos títulos son los siguientes: nociones preliminares, teoremas sobre las derivadas y las diferenciales, reglas de diferenciación, nociones sobre series y diferenciación de funciones trascendentes[72].

Las nociones de variable, infinitésimo, función, función continua, límite, derivada y diferencial, fueron explicadas por Bergeron *grosso modo* en la manera como las enseñaba Sturm en la Escuela

---

[71] Ver Villegas (1992, pp. 52 y ss) sobre la influencia francesa en matemáticas; ver igualmente mi artículo "Dificultades estructurales de la profesionalización de las matemáticas en Colombia", en Arboleda (1993).

[72] Albis y Sánchez (1998) hacen un paralelo conceptual entre las nociones fundamentales que aparecen en el manuscrito de Bergeron y las definiciones de Cauchy. Pero, en nuestra opinión, hay una relación más directa del manuscrito con el curso de Sturm, que sin embargo fue publicado con posterioridad al curso de Bergeron de 1951 en Bogotá. Ello significaría que Bergeron pudo consultar alguna versión de las distintas copias manuscritas de las lecciones de Sturm que todavía existen en colecciones particulares o fondos documentales en París según nos lo ha informado Martín Zerner. Por otra parte no se han encontrado evidencias de que Bergeron hubiese sido alumno de Sturm. El origen y filiaciones del manuscrito del curso de Bergeron es pues una cuestión abierta.

Politécnica, cuando fue nombrado profesor de esa institución en 1840. Esto marca una diferencia sustancial con textos anticuados como los de Boucharlat y Lacroix que, en todo caso, circulaban ampliamente en las instituciones europeas y que en particular estaban ya a disposición de los estudiantes del Colegio Militar[73]. Como Boucharlat y Lacroix no hablan de funciones continuas, y en lugar de derivadas y diferenciales siguen utilizando los anacronismos de coeficientes diferenciales, se podría pensar que la modalidad del cálculo enseñado por Bergeron en Bogotá se encontraba dentro de las corrientes más adelantadas de Europa. Pero esta apreciación hay que matizarla si tenemos en cuenta que el criterio central del tratamiento sobre los fundamentos que caracteriza al curso de Sturm[74], es el principio de sustitución de las cantidades infinitamente pequeñas, y que según las evidencias disponibles, este criterio no fue enseñando por Bergeron sino por Garavito medio siglo más tarde. Examinemos este asunto con más detenimiento.

2 — El principio de sustitución de infinitesimales en el curso de Garavito de 1912

Recordemos que Bergeron define una cantidad infinitamente pequeña como "una cantidad esencialmente variable que se acerca a cero". Mencionemos de paso que el término "esencialmente"

---

[73] Según Albis y Sánchez(1998), estos textos aparecen en el listado de 64 obras que llegaron en 1849 en varios ejemplares, los cuales conformaban la dotación de libros que recibían los alumnos de las autoridades del Colegio Militar.

[74] Naturalmente este criterio importante para la segunda generación de textos de cálculo a la que pertenece Sturm, no lo será para la tercera (Tannery, Jordan, Goursat, Humbert, y otros), en la cual, o bien las cantidades infinitesimales son sustituidas por una presentación de la estructura de los reales, o bien son utilizadas en las partes geométricas del cálculo; ver Zerner (1994, pp.14-15).

aparece en la definición de Sturm, transcrita antes, más no en la definición del Curso de Cauchy. Hemos dicho que esta nueva noción marca una línea de demarcación epistemológica con la noción de infinitesimal con valor determinado utilizada con anterioridad a Cauchy. Esta concepción dinámica de los infinitesimales como sucesiones nulas, le permitió a Cauchy y a sus sucesiores manipular entes matemáticos sin los prejuicios metafísicos de antes. En Colombia, esta noción es un signo para distinguir el tipo de enseñanza de los fundamentos del cálculo que empezó a impartirse en el Colegio Militar con el curso de Bergeron, de aquella que incidentalmente profesaron Mutis y sus alumnos en la cátedra del Colegio del Rosario. Pero en el manuscrito nada permite afirmar que Bergeron presentó los teoremas del "método de los infinitesimales" ni los "diferentes órdenes de los infinitesimales" que aparecen en la primera lección de Sturm[75]. Desde este punto de vista, el cálculo que enseñó Bergeron es un cálculo operatorio, con una visión formalista de los fundamentos, pues no utiliza las propiedades de las cantidades infinitamente pequeñas en las demostraciones de importantes teoremas del cálculo en que son indispensables. Esta situación cambia sustancialmente en el curso de Garavito. Retornemos pues a la sección de "Limites e infinitesimales" del manuscrito.

Esta sección contiene un largo aparte en donde se explica el método infinitesimal y se pasa luego a demostrar cuatro teoremas sobre el álgebra de infinitésimos. La exposición se inspira fundamentalmente en los dos teoremas de la lección 1ª de Sturm, cuya idea original se encuentra ya en el Curso de Cauchy. Garavito

---

[75] Hay que aclarar que en la primera edición (1857) del curso de Sturm, el método infinitesimal aparecía al comienzo de la lección 15. De la segunda edición (1863) en adelante se incluirá definitivamente en la lección primera.

hace una presentación en la cual resalta el manejo operativo de las relaciones entre infinitesimales. En última instancia su propósito es justificar lógicamente el criterio que utilizará luego al presentar otras nociones y demostrar sus propiedades, en virtud del cual en las relaciones entre cantidades infinitesimales, se anula en el límite la parte que "hace la comparación y los cálculos más difíciles"[76].

Este criterio o principio de sustitución de los infinitesimales que le permite a Zerner caracterizar los tratados de análisis de la segunda generación, fue introducido por Duhamel en su tratado de 1856 como resultado de la enseñanza de sus cursos de análisis en la década anterior. Una primera formulación del "principio fundamental de los infinitésimos" es la siguiente[77]:

El límite de la suma o de la razón entre cantidades infinitamente pequeñas no cambia si se reemplaza estas cantidades por otras cuyas razones con las primeras tienen por límites respectivamente la unidad.

Los siguientes enunciados del principio en dos partes serían adoptadas en seguida por los demás tratados de segunda generación:

1. Si α y β son infinitamente pequeños y α' y β' solo difieren en cantidades infinitamente pequeñas en relación con ellos, la razón $\dfrac{\alpha'}{\beta'}$ tiene el mismo límite que la razón $\dfrac{\alpha}{\beta}$.

[76] Criterio de Duhamel citado en Sturm (1909, p. 11).

[77] Incidentalmente hemos encontrado las formulaciones del principio que aquí se presentan en la siguiente obra de Duhamel (1866): *Des méthodes dans les sciences du raisonnement. Deuxieme partie.*

2. Si la suma de términos positivos $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ tiene como límite *S* cuando *n* tiende a infinito, y si β_i solo difiere de α_i en un infinitésimo de orden superior, entonces $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n$ también tiene como límite a *S*.

El principio fundamental de los infinitésimos de Duhamel se enuncia en el lenguaje actual de la siguiente manera:

> Sean α_i y β_i cantidades infinitesimales. Se puede sustituir una por otra y despreciar su diferencia, sea cuando se calcula el límite de la relación entre ellas o en el límite de una suma, a condición que la relación $\dfrac{\alpha_i - \beta_i}{\alpha_i}$ sea un infinitamente pequeña.
>
> El problema de fondo se presenta aquí con respecto al límite de la suma. Sean las dos sumas $\sum_1^n \alpha_i$ y $\sum_1^n \beta_i$ y supongamos que la primera tiene un límite cuando *n* tiende a infinito. Como $\beta_i = \alpha_i + \varepsilon_i$ y $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\varepsilon_i}{\alpha_i} = 0$, entonces la segunda suma tiende al mismo límite que la primera. Nosotros sabemos que el asunto delicado que aquí se presenta, es cómo varia el índice *i* con el índice *n*. Esta doble indexación involucra el concepto de convergencia uniforme. Es decir, que para trabajar con el límite de expresiones infinitesimales de la forma $\alpha_{i,n} = \sum_1^n \alpha'_{i,k}$ y $\beta_{i,n} = \sum_1^n \beta'_{i,k}$, en las que $\beta_{i,n} = \alpha_{i,n} + \varepsilon_{i,n}$, se debe comenzar por fijar *i* de tal manera que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\varepsilon_{i,n}}{\alpha_{i,n}} = 0$.

Recordemos que el curso de Dini fue el primer tratado escrito con el propósito explícito de darle a los principios fundamentales del análisis, en sus enunciados y en sus demostraciones, todo el rigor requerido en matemáticas. En él se incluyen evidentemente el concepto y las propiedades de la convergencia uniforme, y se sanciona la polémica que enfrentó a la comunidad matemática durante varios decenios.[78] En ninguna de las ocho o nueve ediciones de Sturm posteriores a esta fecha se habla del asunto. (De hecho, ocurre lo mismo en casi todos los textos franceses a fines del siglo XIX). Si Sturm trabaja con series de funciones continuas, no establece ninguna conexión con el teorema falso de Cauchy ni formula teoremas sobre la diferenciabilidad o integrabilidad término a término, limitándose a encontrar el dominio de convergencia de algunas series de funciones.

Hacia los años 1910 Garavito ya está informado del concepto de convergencia uniforme. En el parágrafo 95 del manuscrito de 1912, titulado *Series cuyos términos son funciones de una variable*, Garavito define la convergencia en un punto y la convergencia uniforme de una serie infinita de funciones continuas. Lo hace más desde un punto de vista operativo y local, que para explotar las propiedades de la nueva convergencia en el análisis. No se propone, por ejemplo, comprobar la convergencia uniforme de algunas series; simplemente se reduce a establecer un criterio que consiste en comparar la serie de funciones término a término en valor absoluto, con una serie de términos positivos, convergente y numérica[79]. Una vez formulada la definición de convergencia uniforme, Garavito no la emplea en ninguna otra parte. Por supuesto tampoco la aprovecha en conexión con el método de los infinitesimales. Nada que extrañar: en el Curso de análisis de Jordan están muy bien presentes y diferenciadas ambas convergencias, pero el tratamiento

[78] Dini (1878). Ver una descripción del curso en Dugac (1978); pp. 106-109. Este es uno de los primeros tratados que comienza con una exposición de los números irracionales, con el criterio expreso de que “antes de emprender el estudio de las funciones de variables reales, es util exponer de manera precisa el concepto de números irracionales o inconmensurables y el de limite”. Esta obra es clave para el estudio de los orígenes de la moderna teoría de funciones, uno de los problemas de investigación de nuestro grupo de historia de las matemáticas.

[79] Ver la tesis de Villegas (1992, p. 183).

del principio de sustitución sigue haciéndose con base en el límite simple.

3 — Las ambigüedades sobre los fundamentos en el curso de Acosta Villaveces de 1951

Jorge Acosta Villaveces se graduó en la Facultad de Matemáticas e Ingeniería de la Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, en 1912, el mismo año en que dos estudiantes de la misma facultad, Muñoz y Merchán, escribieran las notas del curso de Garavito. Fue el primer alumno de su promoción, el más destacado discípulo de Garavito y, por ello mismo, su sucesor en la cátedra de matemáticas superiores de la misma facultad[80]. Uno de sus alumnos, el ingeniero Fernando Martínez, nos ha dado preciosas informaciones que hemos incorporado en este trabajo, principalmente sobre las características de la enseñanza que recibió de Acosta en los cursos de tercer año (1948) sobre cálculo integral y ecuaciones diferenciales[81]. Los estudiantes que tomaban este curso habían cursado la aritmética analítica en el primer año, y el álgebra superior y el cálculo diferencial en el segundo año. Los cursos de cálculo se impartían de acuerdo al Sturm, pero los estudiantes más aventajados tenían el Humbert como libro de consulta. Esta parece haber sido una costumbre que se practicaba de mucho tiempo atrás en la facultad, ya que entre la lista de libros del ingeniero civil Rito

[80] Ver la noticia biográfica de Acosta en el diccionario de Medina (2000, pp. 84-85).

[81] Ver Acosta (1932, pp. 578-587). Una vez establecida una fórmula entre una suma de Cauchy y la integral definida de una función cualquiera, Acosta presenta varios métodos para apreciar el grado de aproximación de esta suma. El razonamiento es puramente operatorio e instrumental, sin que se manifieste ninguna preocupación por las condiciones de existencia de la integral definida.

Antonio Martínez, padre de Fernando, se encontraban desde 1916 los dos volúmenes del curso de Humbert[82].

Acosta fue uno de los primeros matemáticos colombianos en asumir la tarea de publicar sus lecciones de cálculo en las revistas de mayor circulación entre ingenieros y profesores de matemáticas. En 1932 publicó en los Anales de Ingeniería un artículo sobre el cálculo del valor aproximado de una serie por medio de integrales, en donde expresa la concepción geométrica de integral definida como área bajo la curva de la función que analizaremos más adelante. Una vez creada la Revista de la Universidad Nacional de Colombia, Acosta publicará por entregas entre 1945 y 1948 varias lecciones de su curso de cálculo integral[83]. Luego, en 1951, apareció su libro *Análisis matemático* que incorpora la totalidad de las lecciones que durante más de veinte años impartió en la facultad en los cursos de cálculo integral y de ecuaciones diferenciales (Acosta, 1951). Este es el primer texto matemático de su clase que se publicó en el país, quince años antes de que los matemáticos y docentes universitarios colombianos asumieran la costumbre profesional de escribir y publicar libros para la enseñanza universitaria de las matemáticas. La publicación del "Análisis matemático" le mereció a Acosta los mayores reconocimientos de la comunidad académica de la época; en 1952 recibió el premio Diodoro Sánchez de la Sociedad Colombiana de Ingenieros, y en

[82]Ver Humbert (1903-1904). El ejemplar que hemos consultado en la Biblioteca de la Academia Colombiana de Ciencias perteneció a Santiago Garavito y contiene anotaciones al margen.

[83] Acosta (1945) y Acosta (1948). Por "Análisis matemático" se entiende solamente aquí el cálculo integral y las ecuaciones diferenciales: los cursos más avanzados de la formación en la Facultad de Matemáticas e Ingeniería. La formación en cálculo diferencial es considerada tan básica como la de los cursos de aritmética, álgebra y geometría analítica. Probablemente por ello y porque desde Garavito (si no antes, desde Bergeron) se había impuesto un patrón de enseñanza del cálculo diferencial de acuerdo al Sturm, no se hizo necesaria entre nosotros la publicación de un libro en esta área.

1954 la medalla Francisco José de Caldas. En lo que sigue presentamos algunos de los resultados a los que hemos llegado en el estudio de esta obra, particularmente en conexión con el tratamiento de las cuestiones de los fundamentos del cálculo y los nuevos cánones del rigor del análisis.

El capítulo 1 empieza precisando el objeto del cálculo integral: "En el cálculo diferencial se estudian los procedimientos para obtener las derivadas de las funciones: el problema inverso, o sea la investigación de las funciones cuyas derivadas se conocen, es el objeto del cálculo integral". Acosta traduce enseguida el primer parágrafo de la lección 27 del curso de Sturm, en el que se explica en qué consiste en términos matemáticos "la investigación de las funciones cuyas derivadas se conocen". La idea se formaliza en la siguiente proposición matemática que hoy conocemos como el primer teorema fundamental del cálculo (TFC1): "Sea $f(x)$ una función continua de la variable x; vamos a demostrar que siempre existe otra función $\varphi(x)$ que tiene por diferencial a $f(x)dx$".

Aquí encontramos una diferencia notable con Sturm: Acosta agrega la condición de *continuidad*. En ello se distingue de la tradición de los textos de cálculo del siglo XIX que representa Sturm (los cuales no hacen explícita esta condición en éste y otros teoremas, aunque la asumen de hecho), y se aproxima a los cursos de Tannery, Jordan, Goursat y Humbert, entre otros. Anotemos tres consideraciones con respecto al curso de Garavito de 1912: allí también se agrega la condición de continuidad a la propiedad antes mencionada, se designa tal propiedad como "principio fundamental" y se enuncia en términos de derivadas y no de diferenciales. Sin embargo, agregar o no al enunciado la continuidad de f es solo una diferencia nominal, ya que Garavito y Acosta tanto como Sturm entienden esta condición en el sentido que la representación geométrica de f es una curva continua. Luego volveremos sobre este asunto.

Antes hay que señalar que la determinación de Garavito y Acosta de formular y "demostrar" de entrada el TFC1, plantea una distinción muy importante con el estilo de Cauchy. Mientras que para los primeros el TFC1 es el punto de partida o el "objeto de estudio" del cálculo integral, para Cauchy la integral no comienza siendo antiderivada, sino un objeto matemático cuya propiedad característica es preciso definir de manera analítica. En el capítulo 21 del *Cours d'Analyse* Cauchy define la integral y establece su existencia. Sólo después está en capacidad de formular y demostrar proposiciones sobre este objeto matemático nuevo. El TFC1 aparece en el capítulo 26 y su demostración involucra al menos dos de tales proposiciones: el Teorema del Valor Medio para integrales y la aditividad de la integral definida sobre intervalos. De esta manera, Cauchy inaugura una tradición que hace parte de la cultura matemática actual.

La adopción de este punto de vista se justificó históricamente al menos por tres consideraciones[84]: Uno, se sabía que existen casos en los que es posible definir la integral en el sentido del área bajo la curva, sin que el valor del área coincida con el valor de la derivada en los extremos del intervalo. Dos, Fourier había trabajado con áreas de funciones continuas que sin embargo son discontinuas en el sentido de Euler. Tres, era conocido que se puede determinar la integral definida de una función representable por series

[84] Estas consideraciones y algunas de las que siguen son planteadas para el caso del curso de Garavito en la tesis de Villegas (1992); ellas son igualmente aplicables al curso de Acosta.

trigonométricas aunque la función que representa la integral no sea diferenciable. Garavito y Acosta o no eran suficientemente concientes de estas razones, o consideraron que no eran pertinentes para introducir el rigor de Cauchy en la enseñanza en Colombia. El hecho es que a lo largo de medio siglo se reprodujo en nuestra más importante universidad el anacronismo consistente en pensar la integración como la inversa de la diferenciación, de la forma como lo hacían Euler, Bernoulli, Lagrange y Laplace en el siglo XVIII. Esta decisión parece corresponder a un interés pedagógico deliberado de aprovechar representaciones mentales de la relación inversa entre ambas operaciones, mediante el modelo geométrico de la integral como área.

Una vez formulado el TFC1, Acosta pasa a demostrar la existencia de la integral por medio del área determinada por el grafo de f y los ejes cartesianos. El procedimiento es similar al empleado por Garavito. Ambos se inspiran en Sturm, aunque éste no habla explícitamente de demostrar. Garavito y Acosta pretenden establecer que la diferencial Δu del área u es la función. (Primera dificultad: ninguno de los dos demuestra la existencia del área; seguramente porque suponen como Sturm que ésta es una noción común, y por tanto aceptable a priori. Más adelante volveremos sobre esta dificultad). El procedimiento de Acosta es sensiblemente diferente en este punto al de Sturm. Sturm no utiliza el principio de sustitución, sino que supone implícitamente que la función es monótona para preservar en el límite las relaciones geométricas entre los rectángulos y el elemento de área; es decir, para permitir que sean posibles las siguientes desigualdades cuando $x \to x'$.

$$f(x) \leq \frac{\Delta u}{\Delta x} \leq f(x')$$

$$\lim_{f(x') \to f(x)} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f(x)$$

$$du = f(x)dx.$$

Acosta elude la comparación del Δu con los rectángulos $f(x)\Delta x$ y $f(x')\Delta y$ la anterio y consideración de desigualdades. Supone que Δu y Δx son infinitesimales asociados y que Δu se descompone en un rectángulo y un triángulo. El rectángulo $f(x)\Delta x$ es del mismo orden infinitesimal de Δx y corresponde a la parte principal del incremento Δu; es decir, la diferencial *du*. Entonces, $du = f(x)dx.$

En resumen, Acosta asume la monotonía de la función (continua) en los intervalos $(x, f(x'))$; también utiliza (implícitamente) el principio de sustitución cuando elimina una cantidad infinitesimal para quedarse con la parte principal del incremento. Adicionalmente su demostración reposa sobre la aceptación de que el área es una noción *a priori*. Estas son las tres características que, desde el punto de vista de los fundamentos, distinguen a un texto de análisis como de la segunda generación.

Demostrada existencia de $\varphi(X)$ cuya diferencial es $f(x)dx$ [85], siendo f continua, a continuación se introducirá la integral indefinida utilizando esta propiedad fundamental. Acosta y Garavito siguen las ideas de la exposición de Sturm en los parágrafos 321 y 322 de la lección veintisiete. En lo único en que difieren sus presentaciones es que antes de continuar transcribiendo (con ligeras

[85] Acosta (1951) retoma (p. 9) la imagen utilizada por Garavito (p. 341) de que siendo la integración y la diferenciación dos operaciones inversas, los signos que las representan, aplicados a la misma función, *se destruyen mutuamente*.

modificaciones) los apartes de la lección de Sturm sobre las reglas de integración[86], Acosta incluye casi textualmente en su libro la siguiente advertencia tomada del curso de Humbert:

> Debe advertirse que no hay *ningún método general* para encontrar las integrales de las funciones: es más, si la función *f(x)* es una combinación de funciones elementales (algebraicas, exponenciales, circulares directas o inversas, logarítmicas, etc.), sólo en casos muy particulares su integral será una combinación semejante, de suerte que el cálculo integral conduce desde el principio al estudio de funciones nuevas[87].

Antes hemos dicho que parece haber obrado un criterio pedagógico cuando Acosta escoge el enfoque de Sturm como lineamiento general para presentar su cálculo integral. Este interés debe haberse originado en la formación impartida por Garavito de acuerdo con este enfoque, y en su larga apropiación dentro de la cátedra de matemáticas superiores que Acosta regentó por más de veinticinco años como sucesor de su maestro. Esta formación y esta práctica pedagógica estructuraron las concepciones sobre la enseñanza del cálculo que se expresan en su libro. Sus lecturas personales de libros más avanzados con respecto al Sturm, como el curso de Humbert parece que no alcanzaron a afectar sustancialmente tales concepciones. Pero no deja de ser interesante desde el punto de vista histórico, tener evidencias de que Acosta sí estaba enterado de cuestiones decisivas del programa de rigor del análisis, como las que plantea Humbert en conexión con la cita anterior sobre la integración.

---

[86] Pequeños detalles convencionales que podrían sugerir filiaciones: Acosta introduce aquí el subtitulo de *Reglas y procedimientos usuales de integración*; Garavito había hecho lo propio pero con un titulo ligeramente diferente: *Reglas para la integración de funciones*. Este es el título de Sturm. Humbert titula el parágrafo correspondiente: *Procedimientos de integración.*

[87] Humbert(1903, p. 57) y Acosta (1951, p. 9). Esta advertencia por supuesto no aparece ni en Sturm ni en Garavito.

En la continuación de su argumentación, Humbert aboga por un tratamiento "puramente algebraico" de la demostración de TFC1, y critica la demostración geométrica por cuanto reposa sobre la noción primitiva de área (Humbert, 1903, pp. 84-85): "cuando se utiliza una representación (tracé) geométrica, ésta supone que la curva $y = f(x)$ satisface ciertas condiciones (entre otras la continuidad) que no son definidas de manera precisa y que no desempeñan un papel explícito en el razonamiento". En pie de página observa al respecto que hablando geométricamente, toda función continua debería tener derivada, puesto que su curva continua tendría una tangente en cada punto. Pero, "se sabe que esto no es así, y este ejemplo comprueba el peligro de los razonamientos geométricos en las cuestiones de puro rigor". Recordemos que cuando Humbert publica el segundo volumen del cálculo integral, en 1904, ya se conocen dos resultados de 1875 en conexión con este asunto: la función de Weierstrass que no es derivable y tampoco monótona en ningún intervalo, y la función de Darboux que no es monótona en ningún intervalo.

En cuanto a la caracterización puramente algebraica de la integral definida como el límite de las sumas de Cauchy cuando se divide el intervalo en una partición, Acosta seguramente sabía (por su lectura de Humbert u otros) que aquí subyace la propiedad del teorema de Heine de 1872 de que toda función continua es continuamente uniforme. Es por esta razón que Humbert comienza por introducir los teoremas sobre los distintos tipos de continuidad en su presentación de la integral definida, y con base en este presupuesto define el concepto y establece sus propiedades. Se plantea entonces una delimitación clara y precisa que separa conceptualmente los textos de cálculo de la segunda generación (Sturm) de los textos de la tercera generación (Humbert). Pero, nuevamente, Acosta pasa de largo en su enseñanza sobre un punto tan fundamental. La exposición del capitulo 2 de su libro sobre la integral definida como área es *grosso modo* la de Sturm. Sin embargo, se aparta de Sturm cuando da una "demostración puramente analítica" de la integral definida como limite de las sumas de Cauchy; en esta prueba implícitamente pretende subsanar la ausencia del concepto de continuidad uniforme, utilizando una de las versiones del principio de sustitución[88].

4 — La enseñanza de los fundamentos del análisis en los años 1950, entre tradición y modernidad

Durante los cien años que van desde que Bergeron enseñó su curso de cálculo diferencial en el Colegio Militar, hasta la publicación del libro de Acosta en la Universidad Nacional, se aclimató en el país una cultura sobre los fundamentos del análisis de corte esencialmente francesa. Los planes de estudio de los colegios e instituciones universitarias legitimaron esta influencia, por lo menos en lo que se refiere al último año de la formación en cálculo diferencial, integral, ecuaciones diferenciales (en épocas más recientes) y mecánica racional. En nuestras instituciones circularon textos de análisis de primera, segunda y tercera generación que venían precedidos del prestigio de haber sido empleados para la enseñanza en escuelas y facultades francesas.

Sin embargo, las concepciones de los pioneros de esta enseñanza, las prácticas pedagógicas de naturaleza operatoria e instrumental,

[88] El "teorema conocido" de que si $\lim \sum \Delta x = b - a$, entonces $\lim \sum \varepsilon \Delta x = 0$. (Acosta, 1951, p. 86).

los débiles intercambios con los medios matemáticos internacionales, la precariedad de monografías y memorias originales en nuestras bibliotecas y la casi inexistente demanda interna de conocimientos avanzados en matemáticas puras y aplicadas, favorecieron que esta cultura llevara la impronta del libro más influyente del período estudiado por nosotros: el curso de Sturm, una obra de segunda generación. Esta situación es la misma aún en la etapa de los años 1940 cuando en el marco de esta cultura operatoria, se expresaron tímidamente corrientes de rigor del análisis pertenecientes a textos de la tercera generación como el de Humbert. Estos libros se encontraban de tiempo atrás en las bibliotecas públicas y privadas en donde nuestros profesores y estudiantes más aventajados los consultaron para su formación personal;[89] pero no por ello se generó algún interés en apropiarse de tales obras para transformar cualitativamente las muy conservadoras prácticas pedagógicas.

Una situación algo distinta se presentaba por la misma época en otros países latinoamericanos. En Perú, por ejemplo, en donde el estudio de las matemáticas en la Universidad Católica de Lima era entonces reconocido por su alto nivel, se publicó en 1945 un completo curso en dos volúmenes de análisis matemático[90]. Por su factura esta obra parece ubicarse en el nivel de tercera generación según la rejilla analítica de Zerner. Su autor, Cristóbal Losada y Puga, catedrático de esa universidad y célebre hombre público, se doctoró en ciencias matemáticas en la Universidad de San Marcos

---

[89] Para el caso de Humbert ver la nota 20.

[90] Losada y Puga (1945). En la biblioteca de la Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Colombia se encuentra el ejemplar de esta obra que fue enviada personalmente por Losada a Bogotá en 1945 inmediatamente después de su aparición en Lima.

de Lima en 1923 con una tesis sobre teoría de curvas. También se graduó de Ingeniero de Minas en la Escuela de Ingenieros. Como resultado de la enseñanza de varios años en estas instituciones y en la Universidad Católica, produjo su Curso de Análisis Matemático, tal vez la más conocida de sus publicaciones.

En el prólogo, Losada y Puga explica que éste se originó en la necesidad de "poner al alcance de mis alumnos aquellos puntos teóricos que no suelen encontrarse tratados en los textos corrientes de cálculo" (1945, p. viii); se refiere a los fundamentos de la teoría de conjuntos, la teoría de los números reales y la teoría de funciones continuas. En particular reconoce las filiaciones de los capítulos de su tratado sobre las funciones continuas, con el "gran *Cours d'Analyse Mathématique* del maestro francés Édouard Goursat" (p. viii). También dice haber consultado en la elaboración de su libro todos los tratados clásicos de análisis franceses que "como todos lo saben y reconocen, (es en esto) la maestra del mundo" (p. vii). El curso de Losada y Puga responde al *desideratum* de su autor de presentar a sus alumnos en español "una exposición amplia y rigurosa del Análisis, que permita abordar primero el estudio de las obras monográficas y luego el de las memorias originales de los investigadores, así como por otra parte resolver las cuestiones — a menudo arduas — que plantean las ciencias aplicadas" (p. vii).

Losada y Puga consideraba que el principio de sustitución de infinitesimales era legítimo y aportaba claridad en ciertas "cuestiones arduas" del cálculo, y por ello abogaba por su empleo en la enseñanza. En el *Curso* el autor introduce el principio de Duhamel al inicio del primer volumen, en la parte correspondiente a las derivadas e infinitesimales, a partir de lo cual se desarrollan en seguida las aplicaciones de la diferenciación a las tangentes, máximos y mínimos y velocidades. El hecho no deja de ser sorprendente para una obra que se reclamaba en la introducción del paradigma francés de tratado moderno de análisis y que, tanto por la claridad y rigor de su exposición como por la calidad de su edición, aspiraba a justo título a ser utilizada como texto de enseñanza en el Perú y otros países.

Al reseñar el *Curso* para el *American Mathematical Monthly*[91], un matemático prestante como Ralph Philip Boas, con amplia experiencia investigativa en análisis real y complejo y al mismo tiempo bien enterado de la producción internacional de textos universitarios en este campo, no duda en recomendarlo a los profesores norteamericanos del primer curso de cálculo como "una fuente de enfoques alternativos para la enseñanza de tópicos familiares". "Es saludable darse cuenta, continua Boas, que ni la organización del material, ni el método de prueba, ni los ejemplos ilustrativos, tienen que ser aquellos a los que estamos acostumbrados". Pero un poco después Boas le reprocha a Losada y Puga precisamente el hecho de haberle dado un tratamiento equivocado al teorema de Duhamel. Conviene volver en detalle sobre este punto en posteriores trabajos.

Desde antes de la aparición de su *Curso* Losada ya se había mostrado partidario de sustituir el rigor de los procedimientos aritméticos del análisis por la operatoria con infinitesimales cuando quiera que ello fuera indispensable para preservar la intuición del concepto o materia que estaba en juego. Esta posición se observa

[91] El tomo 1 del Curso fue reseñado en Boas (1946). La reseña del tomo 2 [Boas (1948)] no agrega ninguna opinión especial a la descripción del contenido de series, aplicaciones geométricas del cálculo diferencial y cuestiones relativas a la integración, salvo reafirmar que "el segundo volumen continúa en el mismo estilo cuidadoso y claro del precedente".

en una nota suya de 1939 publicada en el *Bulletin de la Société Mathématique de France*[92], en la cual presenta un procedimiento para facilitar los cálculos de los ángulos y arcos de triángulos infinitesimales curvilíneos del plano. En este tipo de cálculos Losada hace intervenir de manera implícita el principio de sustitución en el manejo de infinitesimales de diversos órdenes.

Es en un artículo didáctico publicado el año anterior en *L'Enseignement Mathématique* (Losada y Puga, 1938), en donde más se hace evidente el tratamiento geométrico que éste daba al principio de sustitución en su enseñanza del cálculo infinitesimal, en temas como las relaciones diferenciales en el triángulo, la explicación del método de la integración por partes, las aplicaciones de derivadas parciales de orden superior, o en cálculos de aproximación por series como la constante de Euler. El recurso privilegiado a este tratamiento se justificaba en el siguiente planteamiento con el cual Losada y Puga introduce el artículo mencionado:

> Incluso los más rigurosos de los aritmetizantes [*sic,* en clara alusión a los seguidores del enfoque de aritmetización del análisis de la escuela de Weierstrass], quienes no le confieren a la intuición ningún derecho como elemento demostrativo, y que desconfían de ella, creo que estarían dispuestos a aceptarla al menos como un elemento auxiliar de explicación, particularmente asequible y claro. (Losada y Puga, 1938, p. 51)

Otro es el punto de vista de los autores de textos de la tercera generación como Jordan y Goursat, en los cuales dice basarse el

---

[92] La nota Losada y Puga (1939) es un caso de estudio puntual relacionado con las investigaciones más generales de Tullio Levi-Civita sobre la trigonometría de triángulos curvilíneos infinitesimales definidos sobre una superficie cualesquiera, La memoria en la que Levi-Civita expone sus resultados, fue publicada en el mismo tomo del Bulletin. El interés de Losada y Puga por esta cuestión seguramente tenía relación con el tema de su tesis y, en particular, con el hecho de que por aquella época Levi-Civita había dado en Lima una conferencia sobre su memoria. Observemos que en el volumen del Bulletin en el cual se publica la nota de Losada y Puga hay contribuciones, además de Levi-Civita, de prestantes figuras de la época en los medios matemáticos como Montel, Volterra, Denjoy, Riesz, Zaremba, Lévy, Aronszajn, Krasner, Godeaux, Mises, Young y Favard; además del geómetra y filósofo Gonseth y el historiador de las matemáticas Sergescu.

curso de Losada y Puga. Como se sabe[93], los cursos de segunda generación como Duhamel, Sturm y Serret empleaban el principio de manera natural cada vez que se trataba de calcular límites asociados con problemas como la rectificación de curvas o el cálculo de áreas. Jordan introducirá un tratamiento alternativo mediante el enunciado de teoremas, por ejemplo, sobre las condiciones necesaria y suficiente que debe cumplir una curva expresada en su forma paramétrica para ser rectificable, y su demostración basada en el empleo estricto de técnicas aritméticas en el lenguaje ε-δ. Goursat hace suyo el tratamiento formal y analítico de Jordan en ésta y otras materias de teoría de curvas, un asunto que como hemos visto era del mayor interés para Losada y Puga. Precisamente Goursat plantea lo siguiente que viene bien a propósito de la opinión del carácter "auxiliar de explicación" de la intuición geométrica de curva:

> el razonamiento no hace más que confirmar la intuición geométrica, pero no hay que creer que ello siempre es así. Peano ha dado un ejemplo bien curioso de una curva plana que tiene la siguiente propiedad singular. Cuando se hace variar el parámetro t, el punto de coordenadas $x = f(t)$, $y = g(t)$ coincide sucesivamente con *todos los puntos interiores de un cuadrado*. Si citamos este resultado es para mostrar hasta dónde la noción analítica de curva es más compleja que la noción vulgar. (Goursat, 1910, vol. 1, p. 30)

Por lo que parece, la estrategia pedagógica de Losada y Puga de recurrir a la intuición geométrica de lo infinitesimal cada vez que se hiciera necesaria, iba de hecho en contravía de uno de los propósitos centrales del patrón de texto francés de tercera generación que parece haber moldeado su enseñanza en las

---

[93] Ver en particular Zerner (1989).

universidades de Lima y la propia escritura de su *Curso de Análisis Matemático*.

Pero, como también lo hemos constatado en el caso de Acosta Villaveces, ni la cuestión de determinar el nivel de rigor de la organización del material de los cursos de cálculo diferencial e integral, ni mucho menos su aplicación en estrategias de enseñanza, admitían respuestas simples ni uniformes en contextos institucionales y profesionales tan diferentes como el de las universidades de Bogotá, Lima y París.

Mientras a mediados de los años 1940 la enseñanza en nuestros países sigue, con las variantes que se han señalado, el patrón de libros de tercera generación como el Goursat, en Francia se está gestando desde hace una década un distanciamiento radical con respecto a ese patrón. Los textos de tercera generación y concretamente el Goursat, ya no satisfacían las expectativas de la generación de matemáticos como Weil, Cartan, Chevalley, Delsarte, Dieudonné y Mandelbrot, varios de ellos egresados de la influyente y prestigiosa Escuela Normal Superior de París, y quienes como miembros de la élite matemática de entonces aseguraban la enseñanza del análisis en París y en las universidades de provincia. Sus intereses iban en la dirección de sistematizar los conocimientos matemáticos universitarios en una obra con una organización temática y un estilo distintos a la factura clásica de los textos utilizados por sus maestros Hadamard, Denjoy, Borel, Lebesgue, Montel, Julia y Fréchet.

La idea de producir un tratado de análisis alternativo al Goursat se convertiría en un ambicioso programa para elaborar el tratado *Éléments de mathématique* como un emprendimiento colectivo del célebre grupo Bourbaki. De acuerdo con el testimonio de un miembro del grupo, Armand Borel,

En 1934 A. Weil y H. Cartan eran Maîtres de Conférences [el equivalente a profesores asistentes] en la Universidad de Estrasburgo. Su función principal era, obviamente, la enseñanza del cálculo diferencial e integral. El texto estándar era el *Traité d'Analyse* of E. Goursat que les parecía deficiente en varios aspectos. Cartan asediaba frecuentemente a Weil con preguntas sobre cómo presentar este material; de manera que para resolver el asunto de una vez por todas, Weil propone escribir entre ambos un nuevo *Traité d'Analyse*. Esta sugerencia se hizo pública y rápidamente un grupo de unos diez matemáticos comenzó a reunirse regularmente para planear este tratado. Pronto se pusieron de acuerdo que el trabajo sería colectivo sin ningún reconocimiento a las contribuciones individuales. En el verano de 1935 se escogería el seudónimo de Nicolás Bourbaki[94].

Por distintos factores como el aislamiento relativo de la actividad real de los centros académicos franceses, los eventos de la guerra y la propia dinámica de las instituciones universitarias en nuestros países, este proceso de transformaciones radicales en la investigación y en la enseñanza de las matemáticas escapó a la consideración de las élites de Bogotá y Lima. Habrá que esperar la siguiente década, la de los años 1950, para que estos acontecimientos sean reconocidos y empiecen a incidir en transformaciones en la enseñanza del análisis y de las matemáticas

[94] Ver Borel (1998). Otros episodios de esta primera fase de constitución del grupo Bourbaki en lo que tiene que ver con la modernización del Goursat, pueden consultarse en la tesis y otras publicaciones de Liliane Beaulieu, particularmente en Beaulieu (1993).

en general, dentro de entornos institucionales distintos, y a través de las relaciones que establecerían con Bourbaki algunos de los matemáticos e ingenieros formados por la generación de Acosta Villaveces, y Losada y Puga.

Referencias

Acosta, J. (1932). Cálculo aproximado de la suma de un número finito de términos de una serie por medio de las integrales definidas. *Anales de Ingeniería*, *40*(471), 578-587.

Acosta, J. (1945-1948). Curso de análisis matemático dictado en la Facultad de Matemáticas e Ingeniería. *Revista de la Universidad Nacional de Colombia, 3* (1945), 335-346; *4* (1945), 309-331; *12* (1948), 261-274.

Acosta, J. (1951). *Análisis matemático. Curso dictado en la Facultad de Matemáticas e Ingeniería de la Universidad Nacional.* Bogotá: Editorial Minerva.

Albis, V. y L. I. Soriano-Lleras (1976). The work of Indalecio Liévano on the foundations of real numbers. *Historia Mathematica, 3*, 161-166.

Albis, V. S. y C. H. Sánchez (1998). Descripción del curso de cálculo diferencial de Aimé Bergeron en el Colegio Militar. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, *22*(85).

Arbeláez, G. (2002). Las nociones de infinito y continuo en la obra del matemático Indalecio Liévano Reyes. En L. C. Arboleda y M. Paty (eds.), *Formación de cultura científica. Ensayos sobre matemáticas y física.* Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Arboleda, L. C. (1993). Matemáticas, cultura y sociedad en Colombia. En E. Quevedo et al. *Historia social de la ciencia en Colombia.* 11 volúmenes (pp. 15-172). Bogotá: Colciencias-Tercer Mundo Editores.

Arboleda, L. C. (2002). Los tratados franceses en la enseñanza del Análisis en Colombia (1851-1951): Sturm, Humbert y los otros. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 26*, 533-543.

Arboleda, L. C. y M. Paty (2002). (eds.). *Formación de cultura científica. Ensayos sobre matemáticas y física.* Cali, Colombia: Universidad del Valle.

Beaulieu, L. (1993). A Parisian café and ten protoBourbaki meetings (1934-1935). *The Mathematical Intelligencer*, *15*(1), 2735.

Bergeron, A. (1851). *Cuaderno de cálculo diferencial. Lecciones dictadas por Aimé Bergeron. Año de 1851, Bogotá.* Manuscrito en el Fondo Pineda de la Biblioteca Nacional de Colombia, nº de índice 2310.

Boas, R. P. (1946). Review. Curso de análisis matemático. Tomo I. Por Cristóbal de Losada y Puga. Lima, Universidad Católica del Perú, 1945. *American Mathematical Monthly, 53*(5), 268-269.

Boas, R. P. (1948). Review. Curso de análisis matemático. Tomo II. Por Cristóbal de Losada y Puga. Lima, Universidad Católica del Perú, 1945. *American Mathematical Monthly, 55*(2), 107.

Borel, A. (1998). Twenty-five years with Nicolas Bourbaki (1949-1973). *Notices of American Mathematical Society*, *45*(3), 373-380.

Cauchy, A.-L. (1821/1994). *Cours d'analyse.* (Algébrique). París. Traducción al español: *Curso de Análisis*. México: Colección Mathema, UNAM.

Dini, U. (1878). *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali.* Pise: Nistri.

Dugac, P. (1978). *Sur les fondements de l'analyse de Cauchy à Baire.* Tesis de Doctorado de Estado en Matemáticas. París: Universidad Pierre et Marie Curie.

Duhamel, J.-M.-C. (1856). *Éléments de calcul infinitésimal.* París: Mallet-Bachelier.

Duhamel, , J.-M.-C. (1866). *Des méthodes dans les sciences du raisonnement. Deuxième partie*. París: Gauthier-Villars.

Garavito, J. (1897). Los números inconmensurables. *Anales de Ingeniería, 9*, 338-346.

Garavito, J. (1912). *Conferencias de cálculo diferencial e integral.* Profesadas por Julio Garavito Armero en 1912 en la Facultad de Matemáticas e Ingeniería de la Universidad Nacional de Bogotá. Redactadas por los alumnos José A. Muñoz T. Y E. Merchán C. Manuscrito inédito conservado en el Fondo Lleras de la Biblioteca del Departamento de Matemáticas y Estadística de la Universidad Nacional de Bogotá.

Gispert, H. (1983). Sur les fondements de l'analyse en France (à partir de lettres inédites de G. Darboux et de l'étude des différentes éditions du "Cours d'analyse" de C. Jordan). *Archive for History of Exact Sciences*, *28*(1), 37-108.

Goursat, E. (1910). *Cours d'analyse Mathématique.* 2 volumes, deuxième edition, Gauthier-Villars, Paris. [Primeira edição, 1902]

Humbert, G. (1903-1904). *Cours d'analyse professé à l'École Polytechnique.* 2 vols. París: Gauthier-Villars.

Levi-Civita, T. (1939). La trigonométrie des petits triangles curvilignes sur une surface. *Bulletin de la Société Mathématique de France, 67*, 101-134.

Losada y Puga, C. de (1938). Sur quelques appels à l'intuition géométrique dans "L'enseignement de l'analyse". *L'Enseignement Mathématique, 37*, 51-67.

Losada y Puga, C. de (1939). Sur la trigonométrie des petits triangles curvilignes plans. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, *67*, 132-136.

Losada y Puga, C. de (1945). *Curso de análisis matemático.* 2 vols. Lima: Editorial Lumen.

Medina Muñoz, L. R. (2000). *Tradición académica. Diccionario biográfico y bibliográfico de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.* ACCEFyN, Bogotá; 84-86.

Quevedo, E. et al. (1993). *Historia social de la ciencia en Colombia.* 11 volúmenes. Bogotá: Colciencias-Tercer Mundo editores.

Sánchez Botero, C. H. (2002). Cien años de historia de la matemática en Colombia. *Revista Academia Colombiana Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 26*, 239-260.

Sturm, Ch. (1857-1859). *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique.* 1ª edición. (1909) 14ª edición. Dos volúmenes. París: Gauthier-Villars.

Villegas, G. (1992). *Sobre el curso de cálculo diferencial e integral "à la Cauchy" de Julio Garavito, 1912.* Tesis de Magíster en Matemáticas. Universidad del Valle, Cali. Colombia.

Zerner, M. (1986). Sur l'analyse des traités d'analyse: les fondements du calcul différentiel dans les traités français, 1870-1914. *Cahiers de didactique des mathématiques*, *30*, 1-30.

Zerner, M. (1989). La rectifiabilité des courbes dans les traités d'analyse français de la deuxième moitié du XIXème siècle. *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, *10*, 267-281.

Zerner, M. (1994). La transformation des traités français d'analyse (1870-1914). *Laboratoire Jean-Alexandre Dieudonné*, Université de Nice, Prépublication nº 389, pp. 1-89.

Sobre o autor:

Luis Carlos Arboleda
Grupo de Historia de Matemáticas
Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Ciudad Universitaria-Meléndez, Cali, Colômbia
arboleda@univalle.edu.co

Los textos de cálculo: una visión de las reformas y contrarreformas

Ricardo Cantoral y Rosa María Farfán, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México

En el curso de la década de los años setenta del siglo veinte tuvo lugar un gran movimiento académico y social que pretendía difundir la llamada Matemática Moderna, movimiento que buscaba trasladar, con fines de extensión, divulgación, democratización y universalización, desde la Universidad a las enseñanzas básica y media el método axiomático, el lenguaje lógico – simbólico y las llamadas estructuras algebraicas que al nivel de la comunidad matemática habían servido para "unificar a las Matemáticas". Es bien sabido que los impulsores de esa corriente eran los matemáticos de la corriente *bourbakista* quienes consiguieron convencer de su criterio a colegas de diversas latitudes. En el año 1993, tuvimos la oportunidad de escuchar en París en la *École Normale Supérieure* una disertación de Gustave Choquet, uno de los impulsores del movimiento *bourbakista*, en la que sostenía las bondades de la iniciativa aunque reconocía también los excesos en los que se había incurrido.

En esos años, surgieron defensores y detractores de la iniciativa, en América Latina por ejemplo se formaron asociaciones con el afán de difundir y estabilizar la iniciativa y dar lugar a la enseñanza de la matemática moderna en el continente. Aun hoy, algunos de aquellos defensores se han tornado curiosamente, en sus críticos más iracundos. En esos años, la obra de Morris Kline, *El fracaso de la matemática moderna. ¿Por qué Juanito no sabe sumar?* (1973), tuvo un valor significativo pues desde la postura de un académico de alta talla mundial, se denunciaron los errores del sistema tradicional memorístico y a la vez se alertaba sobre los nuevos desastres que la arrolladora modernidad conjuntista traería consigo hacia las escuelas e institutos. En ese tenor, el movimiento de *matemática educativa mexicano* se opuso a tales iniciativas y propuso el estudio sistémico y sistemático de las condiciones que garantizan el libre ejercicio de la docencia, el aprendizaje genuino de los estudiantes y la autonomía relativa de los sistemas educativos. Aquí se gestó una de las más grandes diferencias en nuestra opinión, entre los matemáticos educativos mexicanos y otros educadores matemáticos del continente. Por fortuna, el tiempo ha venido dando la razón a quienes se opusieron a introducir en las escuelas dicha reforma sin antecederla de estudios académicos serios sobre sus consecuencias y al día de hoy quizá todos, defensores y detractores de entonces, asumen posturas semejantes.

El énfasis de los análisis teóricos respecto de los efectos del movimiento de la matemática moderna sobre los sistemas de enseñanza, se puso entonces en la educación básica, quizá suponiendo que era ahí donde los estragos serían mayores. Sin embargo, al nivel de la educación superior también se tuvieron consecuencias desastrosas. En este artículo, usaremos la figura de libro de texto — manual escolar — para mostrar como los movimientos de *reforma* y los de *contrarreforma* se expresan por igual en esa síntesis cultural que representa la obra escrita.

Cada época en la historia de la enseñanza produce, mediante sus *prácticas sociales* cotidianas, conocimiento. Al establecerlo como un cierto paradigma temporal forma lo que llamaremos una *estructura imaginaria de saberes didácticos*; en ella se condensan y precipitan a la vez, diferentes consideraciones de los más diversos órdenes. Esta estructura se modifica abruptamente de una época a otra y hace de su historia más una epopeya que un soneto. En esta historia el libro de texto juega un papel protagónico: se constituye como un objeto pluridimensional que puede juzgarse desde diferentes enfoques. Es a la vez apoyo del saber en tanto que impone una distribución y una jerarquía de los conocimientos y contribuye a forjar los andamios intelectuales tanto de alumnos como de profesores; y es un instrumento de poder en tanto que contribuye a la uniformación lingüística de la disciplina, a la nivelación cultural y a la propagación de las ideas dominantes[95].

Después del triunfo del método pedagógico de la enseñanza simultánea – que supone que todos los alumnos de una misma clase progresan a un mismo paso y siguen por tanto libros idénticos – el Cálculo se introdujo en la enseñanza del bachillerato a finales del siglo pasado y con él, el uso sistemático del libro de texto. Recientemente la enseñanza del Cálculo ha tenido otros dos episodios destacados, por un lado las secuelas educativas que produjo, en muchos países, la reforma francesa de la matemática moderna y por otro, la más reciente puesta en escena estadounidense de tecnología para la enseñanza. El primero modificó la estructuración teórica del contenido de los textos, mientras que el segundo parece estar movilizando las jerarquías de su argumentación discursiva. Ambos movimientos se han originado por causas un tanto externas a la propia práctica educativa. Volveremos a ello más adelante.

[95] Véase al respecto a Choppin, 1980.

1 — Reformas y contrarreformas

La enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral nuevamente se encuentra en un cruce de caminos y, como suele ocurrir, las reformas se suceden de reformas. Describamos brevemente tres componentes del escenario actual. Por un lado, *las investigaciones en enseñanza de la matemática* han documentado a lo largo de los últimos veinte años, con un aceptable rigor metodológico, algunos de los efectos de las prácticas de enseñanza sobre el aprendizaje de los estudiantes. Prácticas inducidas por dos causas principales: las modificaciones debidas al movimiento de reforma de la matemática moderna, tanto en lo concerniente al contenido como a su filosofía, y el proceso súbito de masificación de los sistemas de enseñanza superior. En otro lado se encuentra la cada vez más extendida presencia de *los nuevos recursos tecnológicos* diseñados *ex-professo* para la enseñanza escolar. Y como tercer componente, vemos en la gran mayoría de las propuestas actuales de cambio (la contrarreforma) aspectos de un mismo *discurso matemático escolar* que, como una *didáctica normal* — parafraseando a Khun —, no cesa de imponer a las comunidades docentes un estilo discursivo para el Cálculo escolar cuya vigencia data de 1794. La existencia de esta tercera componente es, a nuestro juicio, la más clara expresión de la desarticulación evidente entre las dos primeras.

Analizaremos la figura de libro de texto y no la existencia de las nuevas tecnologías para la enseñanza. Buscamos aportar elementos para la reflexión que, como punto de partida, auxilien en los ensayos de aproximaciones didácticas que no sólo atiendan a los nuevos recursos, sino que incorporen también en sus diseños aspectos de la realidad específica y sistémica en la que se encuentra nuestra escuela, pues si bien el Cálculo es universal, su enseñanza no. Los acercamientos didácticos franceses, alemanes o estadounidenses, fieles a sus propias tradiciones, son distintos entre sí. Nuestro asunto trata entonces del escenario latinoamericano y de cómo éste juega un papel en este proceso de cambio de finales de siglo.

2 — El bicentenario de un paradigma didáctico: 1794-1994

En este apartado argumentamos en torno de la hipótesis de que el actual movimiento de contrarreforma plantea un nuevo currículo para el Cálculo Infinitesimal. Buscamos precisar en qué medida se logra y en cuáles de sus aspectos se torna notorio. Hemos elegido a la figura del libro de texto como crisol de estudio, de modo que nuestro primer señalamiento será en relación con las ideas que estructuran los contenidos matemáticos de algunas de las diferentes propuestas de texto en este movimiento de contrarreforma. Nos referimos al acercamiento simultáneo y coordinado de los aspectos numéricos, geométricos y analíticos – eventualmente en situaciones contextuales – y muy particularmente a la noción matemática de linealidad local. Al respecto sostenemos que es impreciso atribuir a la contrarreforma la originalidad de dicho aporte en la enseñanza del Cálculo. En todo caso, consideramos que hace de él un uso extensivo a través de la nueva tecnología disponible: la calculadora con capacidad de graficación y los programas didácticos para el manejo de representaciones múltiples en la microcomputadora. Para mostrarlo elegimos tres ejemplos tomados de otros tantos textos clásicos.

Con la fundación de la Escuela Politécnica en Francia se fortaleció el proceso de matematización de la ingeniería, se favoreció el establecimiento de la figura profesional de matemático y se concedió a la matemática la alta jerarquía de lo analítico. En ese ambiente, el año 1841 vio nacer, como respuesta al programa de fundamentación del Cálculo de A.-L. Cauchy en los años veinte, el texto de A.-A. Cournot donde se manifestó partidario de una aproximación teórico – empirista que retomaba algunos de los elementos propuestos por Lacroix (1797). El texto de Cournot reunió así en uno solo aquellos dos grandes tratados del siglo dieciocho: la *Introducción al análisis infinitesimal* de Euler y la *Teoría de las funciones analíticas* de Lagrange, de donde retoma como objeto de estudio del Cálculo a las funciones y como su fundamento los principios del Cálculo Infinitesimal.

Cournot planteó que las funciones, ya sean matemáticas o empíricas, disponen de ciertas propiedades generales que son de gran importancia, no solamente para la teoría abstracta del Cálculo, sino más bien para la interpretación de fenómenos naturales. Señaló, además, la conveniencia de tratar a las funciones en sus representaciones múltiples, tablas de valores, gráficas, enunciados, o fórmulas algebraicas. Citemos al respecto aquella que él mismo consideró la más destacada de las propiedades de esas funciones, que consiste en saber que las variaciones del valor que tiene una función, a partir de un valor determinado, son sensiblemente proporcionales a las variaciones correspondientes de la variable dependiente, cuando éstas variaciones son muy pequeñas. Comentó también que ya el lector habría visto una aplicación muy importante de este principio, en la manera de usar las diferencias proporcionales anexas a las tablas de logaritmos. Con estos mismos elementos, dos siglos después, se han estructurado algunas de las propuestas actuales como la de Tall (1986), Demana (1992), Hughes (1993) o Callahan (1992).

Trataremos enseguida algunos ejemplos. Respetando el calendario, iniciamos con uno tomado del texto de Cournot. Se considera a la función algebraica $f(x)=\frac{x^2-7x+6}{x-7}$ representada por las dos ramas de la curva hiperbólica (*ilmn*, *suv*, en su notación) que se separan por una ordenada asintótica, correspondiente a la abscisa x = 10. Se presenta el siguiente tratamiento numérico para apoyar su argumentación,

X	y	diferencia	x	y	diferencia
x=1,00	y=0,00000		x=6,00	y=0,00000	
x=1,01	y=+0,00555	+0,00555	x=6,01	y=-0,01256	-0,01256
x=1,02	y=+0,01109	+0,00554	x=6,02	y=-0,02523	-0,01267
x=1,03	y=+0,01662	+0,00553	x=6,03	y=-0,01278	-0,01278

La ley de proporcionalidad se verifica con una gran aproximación en los dos casos. A pesar de que se ha hecho variar el valor de x por grados iguales y se han considerado crecimientos iguales de x, equivalentes a un céntimo – esta no es una fracción muy pequeña –, los valores de y varían más rápidamente en el segundo caso que en el primero. Si hubiéramos puesto una serie de valores de x equidistantes por un milésimo, la proporcionalidad de variaciones correspondientes de y se tendría de una manera mucho más próxima.

Por su parte, D. Hughes et al. (1992) señalan que dos principios guían sus esfuerzos. El primero, al que llaman "La regla de tres", dice que todo tópico debe ser presentado geométrica, numérica y algebraicamente. El segundo consiste en asumir que las definiciones formales y los procedimientos provienen de la investigación de problemas prácticos. Incorporan en su tratamiento el uso de la tecnología. Veamos como ejemplo la presentación de la derivada de $f(x) = x^2$. Notan que cerca de $x = 1$, cada que el valor de x crece por 0,001, el valor de x^2 crece aproximadamente por un valor de 0,002. Así que cerca de $x = 1$ la gráfica es aproximadamente lineal con pendiente $\frac{0.0020000201}{0.0010000201}$, lo cual exhiben en una serie de gráficas. En seguida tratan el problema de su determinación numérica.

x	x^2	Diferencia en los valores x^2
0,998	0,996004	
0,999	0,998001	0,001997
1,000	1,000000	0,001999
1,001	1,002001	0,002001
1,002	1,004004	0,002003
x aumenta 0,001		todos aproximadamente 0,002

Finalmente, el texto de J. Callahan et al. (1993) dice, con respecto a su punto de vista, que el Cálculo puede ser para los estudiantes lo que fue para Euler y los Bernoulli: un lenguaje y una herramienta para explorar toda la fábrica de la ciencia. Ello obedece a su consideración de que gran parte de la fortaleza del Cálculo radica precisamente en sus conexiones con otras ciencias. Proponen un acercamiento que utiliza las tecnologías actuales y estudia las relaciones funcionales en el contexto de las ciencias y de la matemática. Veamos un ejemplo de la manera en que opera su acercamiento. Se trata de encontrar *f*(*27*) de $f(x) = \frac{2 + x^3 \cos x + 1.5^x}{2 + x^2}$

Para ello, señalan que necesitan hacer una serie de zooms sobre la gráfica de *f* en el punto (27, *f*(27)) = (27, 69,85904). Muestran entonces imágenes que son una replica a escala y retocada de lo que se verá en la calculadora con capacidades gráficas. Señalan que la razón *f*(27) es la pendiente de la gráfica de *f* cuando magnificamos suficientemente la gráfica como para hacerla ver como una recta. Se preguntan sobre la necesidad de encontrar el valor numérico de la pendiente y para ello proponen la siguiente tabla:

Δx	Δy	$\Delta y / \Delta x$
0,08	$-2{,}1155662 \cdot 10^{-2}$	-0,264445769
0,008	$-2{,}1782025 \cdot 10^{-3}$	-0,272275301
0,0008	$-2{,}1788289 \cdot 10^{-4}$	-0,272353602
0,00008	$-2{,}178835 \cdot 10^{-5}$	-0,272354362

Finalmente señalan que *f*(27) es igual a la pendiente de la gráfica, que es igual a $\lim_{\Delta x \to \infty} \left(1 + \frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$.

La similitud en el tratamiento de estos ejemplos es palpable, así como la coincidencia en la noción que se pretende resaltar, la linealidad local.

3 — Aspectos generales de la reforma y la contrarreforma

La reforma de la matemática moderna introdujo en los años sesenta cambios en la imagen y funcionamiento del Cálculo escolar. Así, por ejemplo, en los entonces nuevos libros de texto se produjeron cambios como el de anticipar al estudio propiamente del Cálculo, el de sus fundamentos y se introdujo el uso de los cuantificadores lógicos de manera vigorosa. Empero, el cambio fundamental se manifestó en la adopción de una nueva estructura axiomática que abarcaba por igual tanto a los números reales como a los conceptos tradicionalmente más fundamentales: función, límite, derivada e integral. El cambio de la fisonomía del contenido y de la filosofía asociada fue entonces notorio.

Otro tipo de cambios se manifestaron en cuanto a la seriación de los cursos de Cálculo, se abandonó por ejemplo el acostumbrado crecimiento gradual en el número de variables reales (una, dos y tres variables) y se tornó de golpe del estudio de las funciones reales de una variable real al de funciones de R^n en R^m. Lo anterior cambió también la ubicación en la retícula escolar de los cursos de Álgebra Lineal y de Ecuaciones Diferenciales. Del primero, se dio una introducción temprana, entre el curso básico de Cálculo y el intermedio. Mientras que al segundo se le condenó a un abandono didáctico sin parangón en la historia reciente de la enseñanza. El Cálculo se tornó entonces, el antecedente del análisis matemático clásico y ya no más, como fue durante la primera mitad del siglo, el compañero irreemplazable de las ecuaciones diferenciales. Esta desarticulación ahondó el precipicio en el tratamiento dual de conceptos comunes al Cálculo y a las Ecuaciones Diferenciales, como es el caso de la integral, la diferencial o la continuidad.

Otro de sus efectos se manifestó en el surgimiento de una nueva estratificación de saberes socialmente aceptada. Una especie de peyoración social de saberes presentó como entes de menor valía, por ejemplo, a las aplicaciones o a los acercamientos puramente numéricos, visuales o simbólicos (que por una razón que nunca he entendido se insiste en oponerlos a los conceptuales). Todos recordamos las viejas (¿qué tanto?) disputas entre aplicados o puros, formales e intuitivos. Situaciones cotidianas de nuestra escuela latinoamericana, como es esta anécdota de dos estudiantes durante esos años, lo confirman. Uno de ellos es estudiante de ingeniería en la especialidad de geología y el otro de la licenciatura en física y matemáticas.

> Ingeniero: empecé mi curso propedéutico de matemáticas para la ingeniería.
>
> Matemático: y ¿qué están viendo?
>
> Ingeniero: los axiomas de Peano y las propiedades de campo de los reales, ¿y tu?
>
> Matemático: yo también.

Por su parte, la contrarreforma articula el discurso de los libros de texto al desarrollo de la tecnología. Estos acercamientos modifican las entidades tradicionales de un texto, tales como definiciones, teoremas, pruebas, ejemplos o ejercicios, en la medida en que las tecnologías afectan las prácticas sociales. Veamos como ejemplo la definición que aparece en Callahan et al. (1993) de pendiente de la gráfica en un punto (se refieren en realidad a la pendiente de la recta tangente a la gráfica en un punto).

> Definición. La pendiente de una gráfica en un punto es el límite de la pendiente vista en un microscopio en el punto, cuando el campo de visión se encoge hacia cero.

O bien en Demana (1992) se definen y distinguen los términos “gráfica” y “la gráfica” de una función en términos del aspecto que exhibe la componente visual de la información que aparece en una pantalla de cristal líquido de una supercalculadora.

Por otra parte, aunque este proceso de modificación de la jerarquía en la presentación de argumentos en los textos permite introducir, de manera temprana, temas que hasta hace poco estaban mucho más al interior de los textos (v. gr. funciones trascendentes), las nociones mismas de derivada e integral siguen conservando el estilo introducido por la reforma precedente. La integral sigue siendo la integral de Riemann y la derivada se conserva como la insinuada por D' Alambert y definida por Cauchy, aunque sea con más ejemplos numéricos, gráficos y analíticos. Es decir, conservan el significado y la presentación alcanzada con el acercamiento propuesto por el programa *bourbakista*.

4 — El envejecimiento de la palabra nuevo

Revisemos otro aspecto de las reformas, estudiemos la tendencia en los artículos de Cálculo de la *American Mathematical Monthly* desde su aparición en 1894 hasta 1994. Esta revista se consagra al tratamiento de la matemática escolar y en esa medida ha tenido una influencia en los textos de Cálculo estadounidenses que, en muchos de los casos, se han usado en Latinoamérica. Elegimos artículos de tres periodos. En todos ellos se usó la palabra nuevo en la enseñanza del Cálculo. Iniciemos con la introducción de su primer número en enero de 1894:

> Hoy en día no hay ninguna revista de matemáticas que se publique en los EUA lo suficientemente elemental como para que se dirija a alguien… La mayoría de las revistas existentes tratan casi de manera exclusiva temas que están más allá del alcance del estudiante promedio o del profesor de matemáticas, o al menos temas con los que ellos no están familiarizados. Y muy pocos, si no ninguno, se dedica a la solución de problemas.

En los dos primeros números de ese primer volumen aparece un artículo cuyo título resulta a todas luces atractivo para el motivo de la discusión: "Aplicaciones de la nueva educación al Cálculo integral y diferencial" de Fletcher Durell. El autor presenta un método de enseñanza de la matemática. Lo han llamado nueva educación y dice:

> El estudiante en cada nuevo avance debe comenzar con el objeto concreto, algo que pueda ver y manipular y tal vez hacer, y después continuar con abstracciones, sólo en favor de las ventajas observadas. Dibujar debe preceder a la Geometría formal (euclideana) y trazar curvas debe preceder a la Geometría Analítica. En el transcurso de la discusión se señaló que el trazado de curvas debe hacerse como un medio para proveer las nociones fundamentales del Cálculo Diferencial e Integral.

En seguida presenta ejemplos de su uso:

> La diferenciación puede ahora verse provisionalmente como el método de encontrar la pendiente de una curva a través del método diferencial.

Anota también que éste se extiende de manera natural a la variable compleja. Finalmente comenta que este nuevo método concuerda con aquél de ir de lo conocido a lo desconocido por pasos continuos; y sobre el entendimiento de los estudiantes dice:

> La idea de pendiente ya se ha establecido de manera firme en la mente del estudiante desde el estudio de la Geometría Analítica.

En 1902 se publicó "Acerca de los límites", donde por vez primera en la revista aparece el símbolo ε. En 1958, en pleno movimiento de reforma, se presentó el artículo "Actualización del Cálculo" de M. Munroe:

> con respecto a la modernización del curso de Cálculo para estudiantes de pregrado, el Cálculo se ha mantenido en un cuarto frío por más de cincuenta años.

A continuación de éste se publica una serie de artículos que daban cuenta de maneras "más sencillas, más generales" para obtener la δ en función de ε en el tratamiento usual de límites y continuidad para diferentes funciones elementales. Esto se vio reflejado en los textos de entonces, que planteaban ejercicios y casos particulares de distintos teoremas del Cálculo, para practicar la aritmética del $\varepsilon - \delta$, una tarea casi algorítmica. En los años noventa aparecen ya los "nuevos" acercamientos apoyados en la supercalculadora.

5 — Cálculo y cognición, la pareja ausente

El Cálculo es un producto cultural y no sólo una colección de teoremas y algoritmos. Es un fruto de la actividad humana. Sobre él se han escrito desde siglos pasados tanto libros de texto como ensayos y artículos especializados. En torno de él se han organizado reuniones y congresos académicos. Es enseñado en la escuela contemporánea a los jóvenes desde los quince, dieciséis o diecisiete años. Es el antecedente indispensable de nuevas y diversas ramas de la matemática y de las ciencias. A partir de él se han revisado los fundamentos de la matemática y se ha articulado un gran cúmulo de extensiones a otras ramas del saber contemporáneo. Es una de las perlas de la historia del pensamiento científico.

Nos interesa hablar ahora del Cálculo y la cognición (Cantoral, 1997). Esta mezcla entre matemáticas y psicología sólo puede tener cabida si miramos al Cálculo no como un producto terminado, una pieza más de la matemática, sino como la arena donde se desarrolla una actividad humana. Ello resulta útil cuando estamos interesados en conocer el proceso de formación del pensamiento matemático y, en esa medida, si nos interesa la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo. Es ahí donde ubicamos la figura de texto de Cálculo.

Hace unos doscientos años, Lacroix (1805) escribió:

> confieso mi ignorancia sobre la manera como se adquieren las ideas de número y e medida; y me propongo aquí examinar

> cómo, con estos materiales ya elaborados por una instrucción primaria, empírica si se quiere, se puede hacer entrar en cabezas de quince a dieciséis años la teoría elemental de las ciencias matemáticas y las formas de los métodos que le son propias.

Esta ignorancia declarada por Lacroix sobre los aspectos cognitivos nos recuerda uno de los elementos comunes de las dos reformas: el no incorporar sistemáticamente los aspectos cognitivos de aquellos a quienes se busca enseñar. Es decir, a pesar de la existencia y disponibilidad de diversos estudios con respecto al Cálculo, sigue prevaleciendo el tono voluntarista de quienes sostienen las "nuevas" propuestas. Por ejemplo, con insistencia se señalan las bondades que da el contar con el acceso a las representaciones múltiples, y cegan los juicios de crítica al insinuar que con su sola introducción en la, clase los problemas del aprendizaje se resolverán en el acto. Este desenfrenado abuso del éxito anunciado lleva habitualmente a un juicio erróneo: ¡la x es la culpable! Se señala en casi todas las introducciones que el abuso en el acercamiento algebraico es uno de los principales problemas para lograr la "comprensión" en Cálculo (Steen, 1987).

Este énfasis en la culpabilidad del abuso de la algoritmia sugiere una supuesta incapacidad pretecnológica al uso de otros acercamientos. Como no disponíamos de zooms no podíamos ver lo maravilloso que resulta la rectitud local de las curvas que bosquejan a las gráficas de las funciones derivables. Nos parece que esa idea es falaz en dos sentidos:

> 1) porque desde hace algunos años la investigación sobre cognición reporta dificultades para lograr la articulación de diversos registros de representación, donde lo visual, por ejemplo, resulta complejo para muchos de los estudiantes y profesores (Ocampo, 1992);

> 2) y porque el uso de la representación simbólica algebraica tiene bondades interesantes. No es la malvada de la obra y, en todo caso, sus dificultades están justo en la fuente de su fortaleza.

Un acercamiento que articula los dos señalamientos de las críticas anteriores se está realizado, particularmente, en nuestras acciones de actualización de profesores de los ciclos medio y superior, desde el año 1982. En tales acciones hemos ensayado y adecuado un acercamiento al Cálculo que se ha basado fundamentalmente en la incorporación de las componentes visual y numérica, aunándolas al manejo de representaciones simbólicas flexibles para permitir acrecentar el universo de formas en el repertorio de recursos del profesor.

Es necesario explorar el efecto que estas propuestas de la contrarreforma tienen en nuestros sistemas escolares y no sólo escuchar los cantos de sirena que anuncian un estupendo porvenir. El enunciado "enseñar para conocer y conocer para enseñar" adquiere ahora una vigencia renovada, después de dos décadas de investigación en enseñanza de las matemáticas sobre los llamados temas avanzados (postalgebraicos). Hoy se dispone de sendos reportes sobre las dificultades que los estudiantes muestran con diferentes nociones y procesos mayoritariamente del Cálculo (ver Tall, 1991). Se sabe, por ejemplo, de los problemas que los estudiantes manifiestan para establecer los vínculos entre las diferentes representaciones de conceptos como el de función o el de límite, o para interpretar de manera aislada alguna de tales representaciones y manipularlas en contextos específicos (Mamona, 1990). El reconocimiento de tales dificultades ha llevado a buscar una mayor precisión sobre la propia noción de aprender y también sobre las nociones de representación. Paralelamente se han ensayado diferentes escenarios escolares tratando de abordar la cuestión pedagógica del cómo tratar tales dificultades en clase (Farfán y Montiel, 2005).

Desde esta perspectiva nos encontramos ante una efervescencia creciente, especialmente en EUA, por el uso de tecnologías recientes, pues han abierto de manera generalizada el ámbito de representaciones poco tratadas en la escuela (Fey, 1992). Sin embargo, en tales aproximaciones sigue dominando, como en los textos de la contrarreforma, el tono voluntarista de quienes sustentan las propuestas pero desatienden los resultados de la investigación epistemológica y cognitiva disponible. Finalmente, a continuación se procurará una explicación de algunos de los distintos trabajos de investigación de nuestro equipo. Debemos aclarar que estas reflexiones no buscan descalificar las propuestas, ni mucho menos echar en saco roto un esfuerzo como el que han emprendido tanto editoriales, asociaciones e instituciones educativas.

Consideraciones finales

Los libros de texto en Cálculo son entidades protagónicas de las prácticas sociales en el ambiente de la escuela. Una visión crítica de sus principios y de sus propuestas de articulación con otros elementos del proceso escolar resulta indispensable para hacer un balance adecuado de su funcionamiento. Los dos movimientos de reforma que hemos estudiado se califican por igual como nuevos y materializan sus propuestas en los textos.

Hemos analizado la figura del texto escolar en momentos de cambio, de búsqueda de alternativas didácticas. Hemos señalado que éste es un condensado de las sociedades que lo producen y, en esa medida, hemos sugerido la necesidad de emprender la ardua labor de elaborar materiales didácticos para nuestros alumnos atendiendo a los resultados que la investigación en enseñanza de la matemática nos reporta. Empero, hoy día el texto escolar se ve acompañado en su labor didáctica de otros medios y, en consecuencia, su funcionalidad cambia.

Ante la falsa dicotomía – no se puede pensar matemáticamente si no se cuenta con una supercalculadora, o no se puede pensar matemáticamente cuando se cuenta con una supercalculadora – que puede atar a nuestras comunidades en batallas intelectuales encarnizadas (¿y de las otras?) sin un clara ganancia específica para nuestros sistemas de enseñanza, debemos oponer una actitud crítica, científica y democrática.

Estamos de nuevo ante un fenómeno de gran dimensión. La contrarreforma se apoya de la gran industria de las comunicaciones a través de diferentes organismos de financiación de la actividad académica. Esta es un hecho inevitable del que habrá que sacar provecho para las prácticas educativas. Sin embargo, dado que somos una comunidad acostumbrada a la traducción de textos y al uso sistemático de propuestas que no fueron pensadas para nuestros sistemas educativos, resulta de la mayor importancia estudiar y manejar el proceso de una manera adecuada que coordine los conocimientos disponibles mundialmente, con nuestras particularidades regionales. Por esta razón, las investigaciones en educación matemática que se desarrollen deben jugar un papel protagónico en este proceso. Es decir, debemos considerar aspectos relativos al papel de la escuela latinoamericana, la relación que se establece entre el texto y el lector (Codocedo, 1991), el papel que desempeña el profesor así como el repertorio de que dispone y la manera como se comporta ante el conocimiento (Ocampo, 1992; Reséndiz, 2006). Incluso vale la pena preguntarse, considerando las características de sociedades poco tecnologizadas, cómo en éstas se incorpora la tecnología y qué papel juegan en ese proceso los libros de texto de matemáticas.

En seguida listo algunos hallazgos de estudios que se encuentran en fase de desarrollo y que están vinculados con los textos de Cálculo. En un estudio realizado en la región sur mexicana con profesores de matemáticas de bachillerato y universidad, se obtuvieron datos como estos:

> 1) Veinte años después de la reforma (en un momento en el que supuestamente los profesores habían ya incorporado las nuevas propuestas a su práctica), aquellos que se habían formado antes de la reforma no podían leer satisfactoriamente los nuevos libros, así que seguían usando los textos de la primera mitad del siglo.
>
> 2) Los nuevos maestros, aquéllos que si habían estudiado en los nuevos textos, mayoritariamente conferían a la estructura sintáctica un mayor rango social que a la discusión de ideas o conceptos, de modo que podríamos decir que sabían poco Cálculo.
>
> 3) La visualización es una actividad compleja que lograban después de trabajo intenso sobre el tópico. De hecho, quienes lograban dominarla, dominaban ya los otros acercamientos.

Un estudio más reciente sobre la incorporación de la tecnología en el aula nos ha reportado que el primer uso que se hace del instrumento está subordinado a las prácticas precedentes. Además, la tendencia mayoritaria entre los profesores es que ésta es útil para una etapa posterior al aprendizaje, no para la acción de aprender. Por otro lado, sus conocimientos didácticos se han visto inmutables puesto que siguen creyendo que la integral de Riemann es “la integral” y que el límite es esencial para aprender Cálculo. Otro estudio sobre la manera como los profesores llevan la información de los textos a los apuntes de sus alumnos muestra que tales apuntes son una copia mal hecha del libro y que el texto se usa con flexibilidad sólo en sus aspectos algorítmicos. Otro estudio, con auxilio de tecnología, muestra al profesor usando sus conocimientos analíticos dominantes y al estudiante avanzado, en cambio, adicto a intuiciones y descripciones corporales; no así otros estudiantes.

Proponemos entonces estudiar el efecto de los nuevos cambios en nuestros sistemas de enseñanza y desde ahí trabajar en el diseño de propuestas propias que, obvio es decirlo, sin ignorarlos se nutran de sus posibilidades.

Mediante una traducción de la lengua de origen (no siempre de las unidades empleadas ni del contexto de que se sirve como la tradicional altura con *h* hemos enfrentado el arduo camino de preparar materiales para los alumnos. Los textos de Cálculo no son la excepción. Los encontramos en un sinnúmero de presentaciones y orígenes. No hacemos un llamado a la quema de textos extranjeros ni a cerrarle las puertas a los nuevos, sino más bien señalamos la necesidad de iniciar proyectos para la elaboración de materiales didácticos que tomen en cuenta a los actores directos de la acción educativa, y que incluso atiendan las grandes diferencias regionales que suelen presentarse en nuestros ambientes de enseñanza. Nuestros estudiantes y profesores no son sujetos *a-sociales, a-históricos* ni pertenecen a sociedades homogéneas. Todo ello merece de nuestra parte un esfuerzo mayor y más profundo.

Referencias

Apostol, T. *et al.* (Eds.) (1992). *A century of calculus.* Part I 1894-1968 y II 1969-1991. EUA: MAA.

Biehler, R. *et al.* (Eds.) (1994). *Didactic of mathematics as a scientific discipline.* Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Callahan, J. *et al.* (1993). *Calculus in context.* EUA: W. H. Freeman & Co.

Cantoral, R. (1992). Acerca de la intuición del rigor. Notas para una reflexión didáctica. En *Memorias de la VI Reunión Centroamericana y del Caribe en Formación de Profesores e Investigadores en Matemática Educativa, 6*(1), 24-29.

Cantoral, R. (1993). Hacia una didáctica del Cálculo basada en la cognición. En *Memorias de la VII Reunión Centroamericana y del Caribe en Formación de Profesores e Investigadores en Matemática Educativa*, *7*(1), 397-410.

Cantoral, R. (1997). Los textos de cálculo: Una visión de las reformas y contrarreformas. *Revista EMA. Investigación e innovación en Educación Matemática*, *2*(2) 115-131.

Cauchy, A-L. (1821). *Cours d'analyse de l'Ecole Royal Polytechnique.* Paris: Gauthier-Villars.

Cauchy, A-L. (1823). *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal.* Paris: Gauthier-Villars.

Cauchy, A-L. (1826). *Leçons sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie.* Paris: Gauthier-Villars.

Cauchy, A-L. (1829). *Leçons sur le calcul différentiel.* Paris: Gauthier-Villars.

Codocedo, T. (1991). Acerca de un curso tradicional de Cálculo diferencial en ingeniería. En *Memorias de la VI Reunión Centroamericana y del Caribe en Formación de Profesores e Investigadores en Matemática Educativa, 6*(1), 189-193.

Cournot, A-A. (1841). *Traité elémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal.* Paris: Blachart.

Choppin, A. (1980). L'histoire des manuels scolaires: une approche globale. *Histoire de l'éducation*, *9*(4), 1-25.

Demana, F. *et al.* (1992). *Calculus.* EUA: Addison-Wesley.

Fey, J. (Ed.) (1992). *Calculators in mathematics education.* EUA: NCTM.

Hughes, D. *et al.* (1992). *Calculus.* EUA: John Wiley & Sons, Inc.

Konior, J. (1983). *Analiza konstrukcji tekstu dowodu jako srodka przekazu w matematyce.* Katowice: Uniwesytet Slaski.

Konior, J. (1993). Research into the construction of mathematical texts. *Educational Studies in Mathematics*, *2*, 251-256.

Kline, M. (1973). *El fracaso de la matemática moderna. ¿Por qué Juanito no sabe sumar?* México: Siglo XXI Editores.

Krygowska, Z. (1969). Le texte mathématique dans l'enseignement. *Educational Studies in Mathematics*, *2*, 360-370.

Lacroix, S-F. (1797). *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral.* Paris: Courcier.

Lacroix, S-F. (1805). *Essai sur l'enseignement en général et sur celui des mathématiques en particulier*. Paris: Courcier.

Mamona, J. (1990). Calculus-analysis: a review of recent educational research. En *Memorias del Simposio Internacional de Investigación en Educación Matemática*, *2* (Cálculo), 11-36.

Ocampo, J. (1992). La dimensión gráfica de los conceptos de límite y derivada. *En Memorias de la VI Reunión Centroamericana y del Caribe en Formación de Profesores e Investigadores en Matemática Educativa*, *6*(1), 82-87.

Reséndiz, E. (2006). La variación y las explicaciones didácticas de los profesores en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(3), 435-458.

Steen, L-A. (Ed.) (1987). *Calculus for a new century: a pump, not a filter*. EUA: MAA Notes 8.

Tall, D. *et al.* (1986). *Graphics Calculus I, II, III*, (BBC compatible software). RU: Glentop Press.

Tall, D. (Ed.) (1991). *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Sobre os autores

Ricardo Cantoral Uriza
Departamento de Matemática Educativa Cinvestav IPN. México
Av IPN 2508. Col. Zacatenco. México 07360 DF
rcantor@cinvestav.mx

Rosa María Farfán Márquez
Departamento de Matemática Educativa Cinvestav IPN. México
Av IPN 2508. Col. Zacatenco. México 07360 DF
rfarfan@cinvestav.mx